Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις
Εξέταση 27 Σεπτεμβρίου 2024

Άσκηση 1. (25 βαθμοί) Έστω $(M_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale με $M_0 = 0$ και φραγμένο στον L^2. Δείξτε ότι:

(α) $\sup_{t\geq 0} |M_t| \in L^2$ και $\mathbf{E}(\langle M, M\rangle_\infty) < \infty$.

(β) Η ανέλιξη $(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale.

[Υπόδειξη: Για το δεύτερο μέρος του (α), θεωρήστε τους χρόνους διακοπής $S_n := \inf\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t \geq n\}, n \in \mathbb{N}$, και το local martingale $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$.]

Άσκηση 2. (20 βαθμοί) Έστω $B = (\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown και $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που προκύπτει από την πλήρωση της διήθησης που παράγει η B. Θέτουμε

$$X_t := \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{\frac{B_t^2}{2(1+t)}}$$

για κάθε $t \geq 0$.

(α) Να υπολογιστεί το διαφορικό dX_t.

(β) Να δειχθεί ότι η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Άσκηση 3. (20 βαθμοί) Έστω $B = (\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί με χρήση της ανισότητας Doob ότι για κάθε $a, t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{s\in[0,a]} |B_s| \geq a\Big) \leq 2e^{-a^2/(2t)}.$$

Άσκηση 4. (20 βαθμοί) Έστω B τυπική κίνηση Brown, και $a > -1/2$. Θεωρούμε την ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ με

$$X_t := \int_0^t (1+s)^a \, dB_s \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

(α) Για $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(X_1 \geq x)$ ως συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής Φ της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0, 1)$.

(β) Να δειχθεί ότι το όριο $\lim_{t\to\infty} X_t$ δεν υπάρχει αλλά $\lim_{t\to\infty} X_t/t^{2a+1} = 0$.

Άσκηση 5. (20 βαθμοί) Έστω οι ανελίξεις B, X από την Άσκηση 2 και $T > 0$. Στην $\mathcal{F}_\mathrm{T}$ ορίζουμε το μέτρο $\mathbf{Q}$ μέσω της $d\mathbf{Q} = X_T d\mathbf{P}$.

(α) Να βρεθεί martingale $L = (L_t)_{t\in[0,T]}$ ώστε $X_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t}$ για κάθε $t \in [0, T]$.

(β) Προσδιορίστε ανέλιξη $A = (A_t)_{t\in[0,T]}$ φραγμένης κύμανσης ώστε η ανέλιξη $\mathrm{X} - \mathrm{A}$ να είναι local martignale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ και το μέτρο $\mathbf{Q}$. [Να δικαιολογηθεί το ότι η A που προτείνατε είναι φραγμένης κύμανσης.]

Άριστα είναι το 100. Καλή επιτυχία!