

Γραμμικά εξισώσεις διαφορών 1ης τάξης

27/2/2024

Εξετάζουμε την εξίσωση διαφορών (μὲ  $A \neq 0$ )

$$y_{k+1} = A y_k + B, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση για  $k=0, 1, 2, \dots$

$k=0:$   $y_1 = A y_0 + B$

$k=1:$   $y_2 = A y_1 + B = A(A y_0 + B) + B = A^2 y_0 + AB + B.$

$k=2:$   $y_3 = A y_2 + B = A(A^2 y_0 + AB + B) + B$   
 $= A^3 y_0 + A^2 B + AB + B.$

Επαγωγικά:

$$y_k = A^k y_0 + A^{k-1} B + A^{k-2} B + \dots + B$$
$$= A^k y_0 + B(1 + A + \dots + A^{k-1}).$$

Εκνύφ:

$$1 + A + A^2 + \dots + A^{k-1} = \frac{1-A^k}{1-A} \quad A \neq 1.$$
$$= k \quad A = 1.$$

Άρα  $y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B \quad (A \neq 1)$

~~$= A^k y_0 + B$~~

$= y_0 + kB \quad (A = 1).$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση  $y_{k+1} = 2y_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0.$

Θέτοντας  $A=2, B=1:$   $y_k = 2^k y_0 + \frac{1-2^k}{1-2} \cdot 1$

$\Rightarrow y_k = 2^k y_0 + (2^k - 1) = (y_0 + 1)2^k - 1.$

$\forall y_0 = -1 \Rightarrow y_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (o.i.)$

$y_0 \neq -1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= +\infty & \text{av } y_0 > -1 \\ &= -\infty & \text{av } y_0 < -1 \end{aligned} \right\}$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση  $y_{k+1} = 0.5y_k + 2$ . ΕΣΩ

$A = 0.5, B = 2$  και

$$y_k = 0.5^k y_0 + \frac{1 - 0.5^k}{1 - 0.5} 2 = 0.5^k y_0 + 4(1 - 0.5^k)$$
  
$$= (y_0 - 4) 0.5^k + 4$$

$\forall y_0 = 4 \Rightarrow y_k = 4 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (o.i.)$

$y_0 \neq 4 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 4$

Παράδειγμα:  $y_{k+1} = -y_k + 1, k \in \mathbb{N}_0$ . ( $A = -1, B = 1$ )

$$y_k = (-1)^k y_0 + \frac{1 - (-1)^k}{1 - (-1)} = (-1)^k y_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^k)$$

$$\Rightarrow y_k = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) (-1)^k + \frac{1}{2}$$

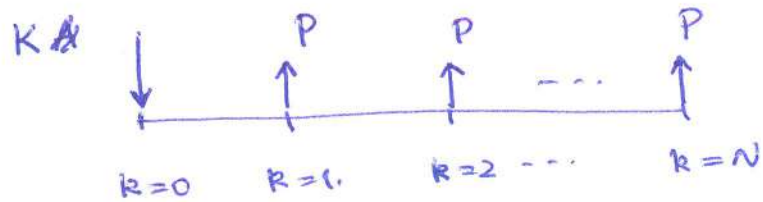
$\forall y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_k = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (o.i.)$

$y_0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (k = 2n): & y_k = y_0 \\ (k = 2n+1): & y_k = 1 - y_0 \end{aligned} \right\}$

Ενταύτη η λύση εναλλάσσεται (μέσ ομαδοποιήματος)

μεταξύ των τιμών  $y_0$  και  $1 - y_0$ .

Παράδειγμα: Αν κάποιος πάρει δάνειο  $K$  με επιτόκιο  $\epsilon$  την περίοδο που πρέπει να εξοφληθεί σε  $N$  ισόποσες δόσεις, ποση είναι η δόση ανά περίοδο;



Αν  $y_k$  το ποσό που απομένει μετά από  $k$  περιόδους

$$y_{k+1} = y_k + \epsilon y_k - P \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Συνοριακές συνθήκες  $y_0 = K$ ,  $y_N = 0$ . Επομένως

$$y_{k+1} = \underbrace{(1+\epsilon)}_A y_k - \underbrace{P}_B$$

$$\Rightarrow y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B =$$

$$= (1+\epsilon)^k \cdot K - \frac{1-(1+\epsilon)^k}{1-(1+\epsilon)} P$$

$$= (1+\epsilon)^k K + \frac{P}{\epsilon} [1 - (1+\epsilon)^k]$$

$k=N \Rightarrow y_k = 0$ :

$$0 = (1+\epsilon)^N K + \frac{P}{\epsilon} [1 - (1+\epsilon)^N]$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\epsilon} [(1+\epsilon)^N - 1] = K(1+\epsilon)^N \Rightarrow P = \frac{K\epsilon(1+\epsilon)^N}{(1+\epsilon)^N - 1}$$

$$\Rightarrow P = \frac{K\epsilon}{1 - (1+\epsilon)^{-N}}$$

# Σημεία Ισορροπίας / Ευσταθία

(4)

Έστω η εξίσωση διαφορών :  $y_{k+1} = f(y_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Ορισμός : Το σημείο  $\alpha$  είναι σημείο ισορροπίας αν είναι σταθερό σημείο της  $f$ , δηλ.  $\alpha = f(\alpha)$ .

(Ισοδύναμα αν  $y_0 = \alpha \Rightarrow y_k = \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ ).

Παράδειγμα : Έστω  $y_{k+1} = A y_k + B$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Αν  $\alpha$  είναι σημείο ισορροπίας, τότε

$$\alpha = A\alpha + B \Leftrightarrow (1-A)\alpha = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{B}{1-A}, \quad A \neq 1$$

δηλ.  $\alpha = B/(1-A)$  είναι το μοναδικό σ.ι.

Όταν  $A=1$  η εξίσωση δίνει εκτ. σ.ι. (εκτός αν  $B=0$ )  
οπότε κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  είναι σ.ι.

Παράδειγμα : Έστω :  $y_{k+1} = (y_k + 4)y_k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

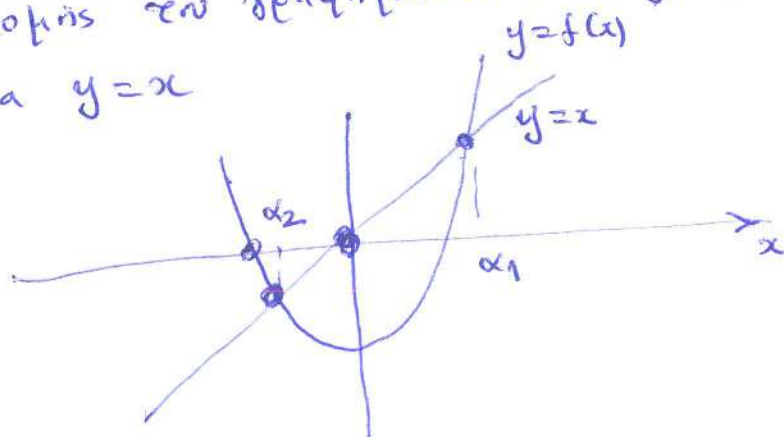
Τα σ.ι. είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha + 4)\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \quad \text{η} \quad \alpha = -2 \end{aligned}$$

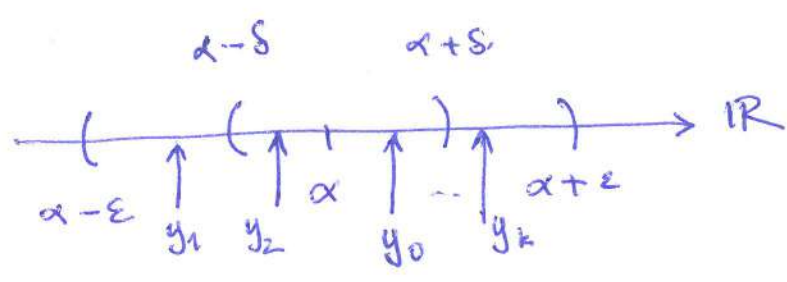
Άρα υπάρχουν δύο σταθερά λύσεις της εξίσωσης,

$y_k = -1$  και  $y_k = -2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Παρατήρηση : Γεωμετρικά τα σ.ι. είναι τα σημεία τομής του γραφήματος της  $y = f(x)$  με την ευθεία  $y = x$



Ορισμός: Το σ.ι.  $\alpha$  είναι εσοαδός (κατά Λυαρινόν) αν  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \epsilon$   
 $\forall k \in \mathbb{N}_0$ .



Το  $\alpha$  είναι εσοαδός (κατά Λυαρινόν) αν μπορούμε να περιορίσουμε την ακολουθία  $y_k$  σε διάστημα κέντρου  $\alpha$  και αδιάμετρου ακτίνας  $\epsilon > 0$  (όσο θέσουμε μικρός) περιορίζοντας την αρχική τιμή  $y_0$  σε κατάλληλο διάστημα κέντρου  $\alpha$  και ακτίνας  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ .

Ορισμός: Αν ένα σ.ι.  $\alpha$  δαν είναι εσοαδός (κατά Λυαρινόν), τότε λέγεται ασοαδός σ.ι.

Ορισμός: Το σ.ι.  $\alpha$  είναι ελκυστός (σημείο έλξης) αν υπάρχει  $\eta > 0 : |y_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \alpha$   
 Αν  $\eta = \infty$ , τότε το  $\alpha$  είναι ολικός ελκυστός (ολικό σημείο έλξης).

Ορισμός: Το σ.ι.  $\alpha$  είναι ασυμπτωτικά εσοαδός αν είναι ασοαδός εσοαδός κατά Λυαρινόν και σημείο έλξης. Αν  $\eta = \infty$  (ομοιομορφία στο σημείο έλξης) τότε το  $\alpha$  είναι ολικός ασυμπτωτικά εσοαδός.

Θέωρημα: Το σ.ι.  $\alpha = \frac{B}{1-A}$  της εξίσωσης διαφορών (6)

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \quad A \neq 1, k \in \mathbb{N}_0$$

είναι σλική ασ. σειράς αν  $|A| < 1$  και έχει

$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \alpha \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$ . Αν  $|A| > 1$  το  $\alpha$  είναι ασταθής

και  $\lim_{k \rightarrow \infty} |y_k| = \infty \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}, y \neq \alpha$ . Τέλος αν  $A = -1$ ,

τότε  $y_0 = y_2 = y_4 = \dots$  και  $y_1 = y_3 = y_5 = \dots$  και το  $\alpha$  είναι

ασταθής κατά Lyapunov.

Απόδειξη: Αν  $A \neq 1$  η άβαν της εξίσωσης είναι

$$y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B = A^k \left( y_0 - \frac{B}{1-A} \right) + \frac{B}{1-A}$$

$$\Rightarrow y_k = (y_0 - \alpha) A^k + \alpha.$$

Συνεπώς  $y_k - \alpha = (y_0 - \alpha) A^k \Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha|$

Εστω  $\varepsilon > 0$  και  $\delta = \varepsilon$ . Αν  $|A| < 1$  τότε  $|y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha| \leq |y_0 - \alpha| < \delta = \varepsilon$  και το

$\alpha$  είναι ασταθής κατά Lyapunov. Επίσης

$$|A| < 1 \Rightarrow y_k \rightarrow \alpha \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

και το  $\alpha$  είναι ασυμπτωτική ασταθής σ.ι.

Αν  $|A| > 1$  το  $\alpha$  είναι ασταθής σ.ι. Γιατί, αν πουν

ασταθής κατά Lyapunov, τότε για  $\varepsilon = 1$  θα υπήρχε  $\delta > 0$

ε.ω.  $\forall y_0: |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Επιπλέον, και για το  $y_0 = \alpha + \frac{\delta}{2}$  θα είχαμε  $|y_k - \alpha| < 1$

$\forall k \in \mathbb{N}_0$ . Όμως,

$$|y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha| = |A|^k \frac{\delta}{2} < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |A|^k < \frac{2}{\delta} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Που είναι αδύνατον καθώς  $|A|^k \rightarrow \infty$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ .  $|A| > 1$ .

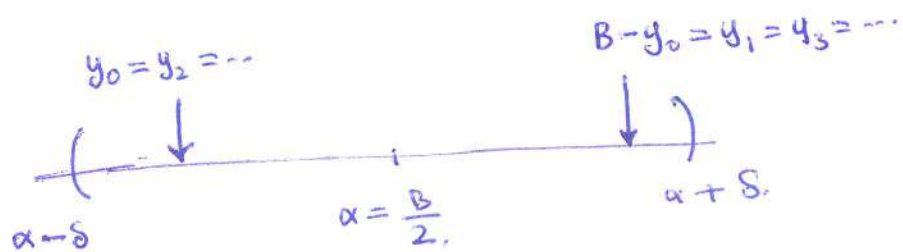
Άρα  $\alpha$  είναι ασταθής σ.ι.

Τέλος στην περίπτωση  $A = -1$ , το σ.ι.  $\alpha$  είναι

$$\alpha = -\alpha + B \Rightarrow \alpha = \frac{B}{2}$$

Επίσης:  $y_{k+2} = -y_{k+1} + B = -(-y_k + B) + B = y_k$

δηλ  $y_0 = y_2 = \dots = y_{2k}$  και  $y_1 = y_3 = \dots = y_{2k+1} = -y_0 + B$ .



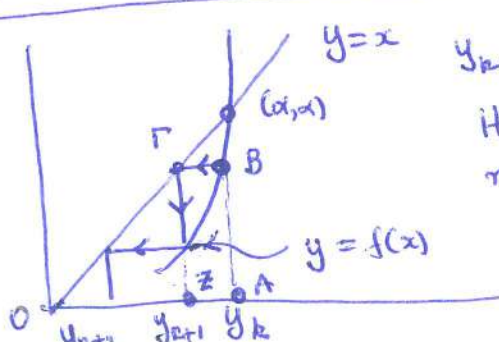
Έστω  $\epsilon > 0$  και  $\delta = \epsilon$ . Τότε

$$|y_0 - \alpha| < \delta \Leftrightarrow |y_0 - \alpha| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y_{2k} - \alpha| < \epsilon & \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ |y_{2k+1} - \alpha| < \epsilon & \forall k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Επομένως  $|y_k - \alpha| < \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$  και το σ.ι. είναι ασταθές κατά Lyapunov.

Γεωμετρική-τριγωνική μέθοδος χαρακτηρισμού σ.ι.



$y_{k+1} = f(y_k) = (AB) = (\Gamma Z) = OZ$   
Η ακολουθία συγκλίνει στο  $(\alpha, \alpha)$  η αποκλίνει και το  $\alpha$  είναι ασταθές η ασταθές, αντίστοιχα.

Θέωρημα: Έστω α σ.ι. της  $y_{n+1} = f(y_n)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  και 8

έστω ότι η  $f$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο  $\alpha$ . Τότε

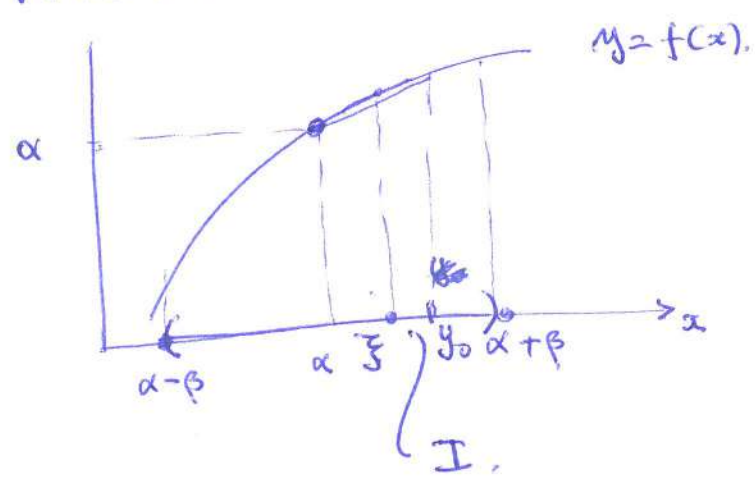
- (i)  $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$  Το  $\alpha$  είναι ασ. ευραδής σ.ι.
- (ii)  $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow$  Το  $\alpha$  " ασταθής σ.ι.

12/3/24

Απόδειξη:

(i) Έστω ότι  $|f'(\alpha)| < M < 1$ . Λόγω συνέχειας της  $f'$  υπάρχει διάστημα  $I = (\alpha - \beta, \alpha + \beta)$  π.ω

$$|f'(y)| \leq M < 1 \quad \forall y \in I.$$



Αν  $y_0 \in I, y_0 > \alpha$ , τότε  $\exists \xi \in (\alpha, y_0)$ :

$$f(y_0) - f(\alpha) = f'(\xi)(y_0 - \alpha)$$

(από το Θέωρημα Μέσης Τιμής). Παρόμοια, αν  $y_0 \in I, y_0 < \alpha$ , τότε  $\exists \xi \in (y_0, \alpha)$  με την ίδια ιδιότητα. Σε κάθε περίπτωση  $\exists \xi \in I : f(y_0) - f(\alpha) = f'(\xi)(y_0 - \alpha)$  και επομένως:

$$\underbrace{|f(y_0) - f(\alpha)|}_{y_1} = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq M} \cdot |y_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |y_1 - \alpha| \leq M |y_0 - \alpha| < |y_0 - \alpha|$$

και επομένως  $y_1 \in I$ . Επαναγωγική,



$$|y_k - \alpha| \leq \underbrace{M^k}_{\leq \delta} \underbrace{|y_0 - \alpha|}_{\leq \delta} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Δοθέντος  $\varepsilon > 0$ , θέτουμε  $\delta = \varepsilon$ . Τότε αν  $|y_0 - \alpha| < \delta$ ,

$$|y_k - \alpha| \leq M^k |y_0 - \alpha| < M^k \delta = M^k \varepsilon < \varepsilon \quad (k \geq 1)$$

$$= \varepsilon \quad (k=0)$$

και  ~~$|y_k - \alpha| \geq \varepsilon$~~

Επομένως,  $|y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$  και το σ.ι.  $\alpha$  είναι  
 ευαδιάκριτος κατά Lyapunov. Επιπλέον  $\forall y_0 \in I$

$$|y_k - \alpha| \leq M^k |y_0 - \alpha| \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } k \rightarrow \infty$$

και το  $\alpha$  είναι ασυμπτωτικά ευαδιάκριτος.

(ii) Υποθέτουμε ότι  $|f'(\alpha)| > 1$ . Θα δείξουμε ότι το  $\alpha$   
 είναι ασυμπτωτικά σ.ι. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y_0 \text{ με } |y_0 - \alpha| < \varepsilon, y_0 \neq \alpha, \exists k \in \mathbb{N} :$$

$$|y_k - \alpha| \geq \varepsilon.$$

Αν  $|f'(\alpha)| > 1$ , τότε λόγω συνέχειας της  $f'$ ,

$\exists$  διάστημα  $I_\varepsilon = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  και αριθμό  $M > 1$

ε.ω.  $|f'(x)| \geq M > 1 \quad \forall x \in I_\varepsilon$ . Θα δείξουμε ότι

$\forall y_0 \in I_\varepsilon, y_0 \neq \alpha, \exists k \in \mathbb{N}$  για το οποίο  $y_k \notin I_\varepsilon$

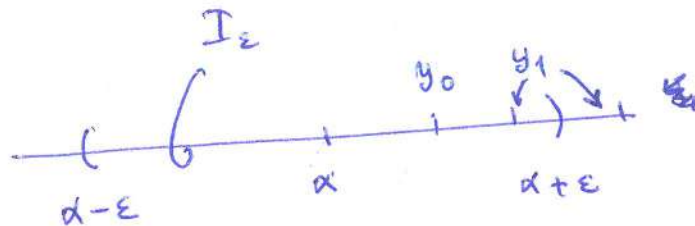
Έστω  $y_0 \in I_\varepsilon, y_0 \neq \alpha$ . Από το ΘΜΤ :

$$|f(y_0) - f(\alpha)| = |f'(\xi)| \cdot |y_0 - \alpha|$$

για κάποιο  $\xi \in (\alpha, y_0)$  ή  $\xi \in (y_0, \alpha)$ . Επομένως

$$|y_1 - \alpha| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\geq M} \cdot |y_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |y_1 - \alpha| \geq M |y_0 - \alpha| > |y_0 - \alpha|$$



Αν  $y_1 \notin I_\epsilon$  η απόδειξη ολοκληρώθηκε, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και έχουμε

$$|y_2 - \alpha| \geq M |y_1 - \alpha| \geq M^2 |y_0 - \alpha|$$

Εφόσον  $M > 1$ ,  $M^i \rightarrow \infty$  καθώς  $i \rightarrow \infty$  και είναι προφανές ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων (έστω  $k$ ) θα έχουμε  $y_i \in I_\epsilon$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$  και  $y_k \notin I_\epsilon$  □

Παράδειγμα: Έστω η μη-γραμμική εξίσωση  $y_{k+1} = 1.5y_k - 0.5y_k^2$ . Θέτουμε  $y = f(x) = 1.5x - 0.5x^2$ . Η λύση της  $x = f(x)$  δίνει:

$$x = 1.5x - 0.5x^2 \Rightarrow 0.5x - 0.5x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 0.5x(1-x) = 0 \Rightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=1}$$

Επομένως  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Επίσης  $f'(x) = 1.5 - x$

και  $f'(\alpha_1) = f'(0) = 1.5$  και  $f'(\alpha_2) = f'(1) = 0.5$

Άρα  $\alpha_1 = 0$  ασταθές σ.ι και  $\alpha_2 = 1$  ασ. ευσταθής σ.ι.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση διαφοράς

$$y_{k+1} = \frac{a y_k}{b + y_k} \quad \text{όπου } b > 0$$

Σημεία ισορροπίας:

$$f(x) = x \iff \frac{ax}{b+x} = x \iff bx + x^2 = ax$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (b-a)x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = a-b$$

$$f'(x) = \frac{a(b+x) - ax}{(b+x)^2} = \frac{ab}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x_1) = f'(0) = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ασταθής σ.ι.}$$

$$f'(x_2) = f'(a-b) = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow x_2 = a-b \text{ ασ. σταθής.}$$

Στην συνέχεια αναλύουμε την περίπτωση  $f'(x) = 1$ .

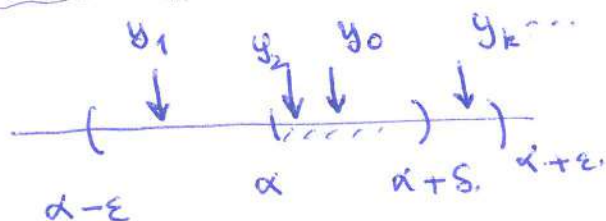
Ορισμός: Το σ.ι.  $\alpha$  της εξίσωσης  $y_{k+1} = f(y_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$

λέγεται άνω ημιεπαρκής αν  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  π.ω.

$y_0 \in (\alpha, \alpha + \delta) \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ . Αν επιπλέον

$\exists n > 0$  π.ω.  $y_0 \in (\alpha, \alpha + n) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \alpha$ , τότε το

$\alpha$  είναι ασυμπτωτικά άνω ημιεπαρκής



Παρόμοια ορίζεται "κάτω ημιτωσάδα":

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : y_0 \in (a-\delta, a) \Rightarrow |y_n - a| < \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

και ασυμπτωτική κάτω ημιτωσάδα.

Θεώρημα: Έστω α σ.ι. της  $y_{k+1} = f(y_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , δηλ

$$a = f(a). \text{ Τότε}$$

(i) Έστω  $f \in C^{2k}(\mathbb{R})$ . Αν  $\underbrace{f'(a) = \dots = f^{(2k)}(a)}_{\text{αργός}} = 0$  και  $f'(a) = 1$

και  $f^{(2k)}(a) \neq 0$ , τότε το α είναι

- Ασυμπτωτική κάτω ημιτωσάδα αν  $f^{(2k)}(a) > 0$
- " " " " " " αν  $f^{(2k)}(a) < 0$

(ii) Έστω  $f \in C^{2k+1}(\mathbb{R})$ . Αν  $f'(a) = 1$  και  $\underbrace{f''(a) = \dots = f^{(2k)}(a)}_{\text{πρώτος}} = 0$  και  $f^{(2k+1)}(a) \neq 0$ ,

τότε το α είναι

- Ασυμπτωτική εσοσάδα αν  $f^{(2k+1)}(a) < 0$
- Ασοσάδα αν  $f^{(2k+1)}(a) > 0$ .

"Απόδειξη": (i) Έστω ορα  $f'(a) = 1, f''(a) = \dots = f^{(2k)}(a) = 0$  και  $f^{(2k)}(a) > 0$ . Από το Θεώρημα Taylor για  $\delta > 0$

~~"Αρκούντως μικρό"~~

$$f(a+\delta) = \underbrace{f(a)}_a + \underbrace{f'(a)}_1 \delta + \frac{f''(a)}{2!} \delta^2 + \dots + \frac{f^{(2k-1)}(a)}{(2k-1)!} \delta^{2k-1} + \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!} \delta^{2k}$$

(13)

όπου  $\xi \in (\alpha, \alpha + \delta)$ . Αν επιλέξουμε το  $\delta$  "αρκετά μικρό" τότε λόγω συνέχειας της  $f^{(2k)}$  έχουμε ότι  $f^{(2k)}(\xi) > 0$

Και :

$$f(\alpha + \delta) = \alpha + \delta + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\xi) \delta^{2k}}{(2k)!}}_{> 0}$$

$$\Rightarrow \underline{f(\alpha + \delta) > \alpha + \delta.}$$

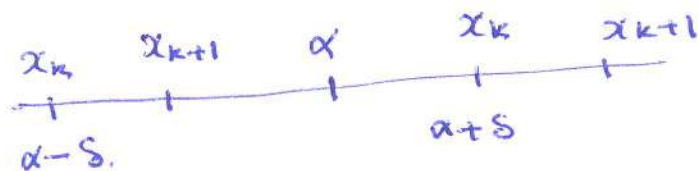
Παρόμοια, για κάποιο  $\xi \in (\alpha - \delta, \alpha)$  και  $\delta > 0$  αρκετά μικρό:

$$f(\alpha - \delta) = \alpha - \delta + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\xi) \delta^{2k}}{(2k)!}}_{> 0}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha - \delta < f(\alpha - \delta) < \alpha}$$

$$\text{Αρα: } x_k = \alpha + \delta > \alpha \Rightarrow x_{k+1} > x_k$$

$$x_k = \alpha - \delta < \alpha \Rightarrow \alpha - \delta < x_{k+1} < \alpha.$$



Παρόμοια για (i)β και (ii). □

Πρόβλημα: (i) Έστω  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\alpha = f(a)$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $f''(a) > 0$ . Τότε

το  $\alpha$  είναι κάτω ημιτωσαδικό

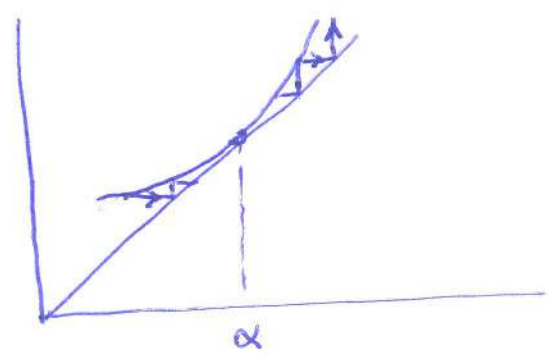
(ii) Έστω  $\alpha = f(a)$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $f''(a) < 0$ . Τότε το

$\alpha$  είναι άνω ημιτωσαδικό

(iii) Έστω  $f \in C^3(\mathbb{R})$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $f''(a) = 0$ ,  $f'''(a) < 0$   
Τότε το  $a$  είναι ασυμπτωτική ευθεία

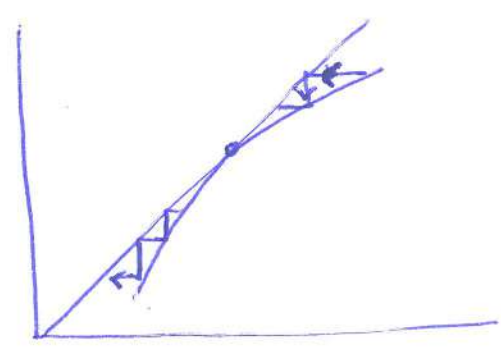
(iv) Έστω  $f \in C^3(\mathbb{R})$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $f''(a) = 0$ ,  $f'''(a) > 0$   
Τότε το  $a$  είναι αόρατη.

(i)  $\alpha = f(a)$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $f''(a) > 0$  (Η  $f$  στρέφει τα κείλα προς τα άνω).



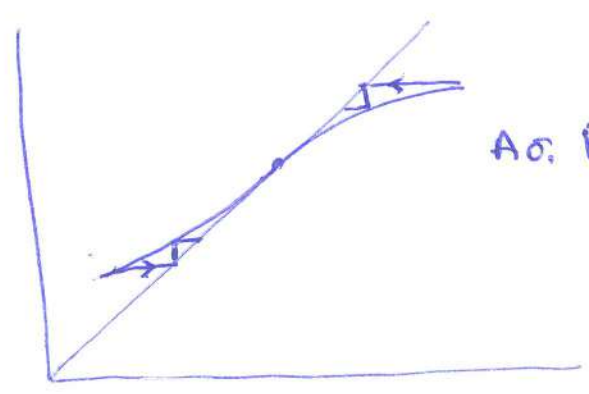
Κάτω ημιτοσάδης

(ii)  $\alpha = f(a)$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $f''(a) < 0$  (Η  $f$  στρέφει τα κείλα προς τα κάτω).



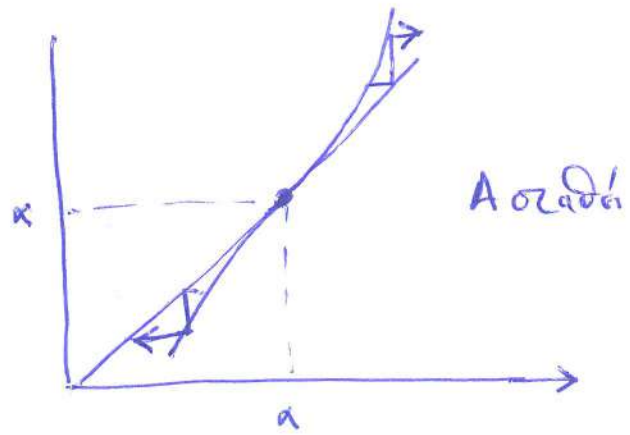
Άνω ημιτοσάδης

(iii)  
 $\alpha = f(a)$   
 $f'(a) = 1$   
 $f''(a) = 0$   
 $f'''(a) < 0$



Ασ. Ευθεία

$$(iv) \left. \begin{aligned} f(x) &= x \\ f'(x) &= 1 \\ f''(x) &= 0 \\ f'''(x) &> 0 \end{aligned} \right\}$$



Παράδειγμα: Έστω η ε.δ.  $y_{k+1} = y_k - y_k^3$ .

Έχουμε  $f(x) = x - x^3$  και βρίσκουμε την εξίσωση

$$x = f(x) \Rightarrow x - x^3 = x \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (μοναδικό σ.ι.)}. \text{ Επίσης:}$$

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -6x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -6 < 0$$

και άρα σ.ι.  $x=0$  είναι ασπλάκη

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y_{k+1} = y_k^4 - 2y_k^3 + 3y_k - 1, \text{ Έχουμε}$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$$

και σημεία ισορροπίας είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x = f(x) \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 3x - 1 = x$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 1)^3 = 0$$

Επομένως έχουμε για την συνάρτηση  $g$  :

$$g(x) = x, \quad g'(x) = 1, \quad g''(x) = 0, \quad g'''(x) = 2 \neq f(x)$$

Από το προηγούμενο θεώρημα (η περίπτωση)

$$Sf(x) < 0 \Rightarrow x \text{ ασυμπτωτικά ελατά σ.ι.}$$

$$Sf(x) > 0 \Rightarrow x \text{ αστάθ. σ.ι.}$$

(για την  $g$  και άρα και για την  $f$ ). □

Παράδειγμα : Έστω η ε.δ.  $y_{k+1} = y_k^2 + 3y_k, k \in \mathbb{N}$

Τα σημεία ισορροπίας λύσης της  $f(x) = x, f(x) = x^2 + 3x,$

δηλ

$$x^2 + 3x = x \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=-2}$$

$$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \Rightarrow x=0 \text{ αστάθ. σ.ι.}$$

$$f'(-2) = -4 + 3 = -1$$

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με

$$f''(x) = 2, \quad f'''(x) = 0 \quad \text{έχουμε}$$

$$-2 f'''(-2) - 3 [f''(-2)]^2 = 0 - 3 \cdot 2^2 = -12 < 0$$

και συνεπώς το  $x = -2$  είναι ασυμπτωτικά ελατά σ.ι.  
σημείο ισορροπίας.



Επίσης:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = -4 - 6 + 3 = -7$$

$\Rightarrow \alpha = -1$  είναι ασκήσιμη σημείο ισορροπίας. Επίσης

$$f'(1) = 4 - 6 + 3 = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 \Rightarrow f''(1) = 12 - 12 = 0$$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(1) = 24 > 0.$$

και επομένως σ.ι.  $\alpha = 1$  είναι επίσης ασκήσιμη.

Παράδειγμα: Έστω  $y_{k+1} = y_k^2 + 5y_k + 4$

Έχουμε:  $f(x) = x^2 + 5x + 4$  και

$$\alpha = f(\alpha) \Rightarrow \alpha^2 + 5\alpha + 4 = \alpha \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \text{ μοναδικό σ.ι.}$$

Επίσης:

$$f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(-2) = -4 + 5 = 1.$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

και  $\alpha = -2$  είναι ασ. κάτω ημιωσκήσιμη.

Θέσημα: Έστω  $\alpha$  σ.ι. της  $y_{k+1} = f(y_k)$  και  $f'(\alpha) = -1$ .

Έστω ότι:  $Sf(\alpha) = \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2$  (μαθηματικά

Schwartz). Έστω επίσης τότε:

- (i)  $Sf(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha$  ασυμπλεκτική σειρά σ.ι.
- (ii)  $Sf(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$  σειρά σ.ι.

Απόδειξη: Έστω  $g = f \circ f := f^2$  και έστω η εξίσωση διαφοράς  $y_{k+1} = g(y_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Τότε ισχύουν

•  $\alpha = f(\alpha) \Rightarrow \alpha = g(\alpha)$  ( $g(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$ ).

- $\alpha$  ασ. σειρά σ.ι. για την  $y_{k+1} = g(y_k) = f(f(y_k))$
- $\Rightarrow \alpha$  " " " " "  $y_{k+1} = f(y_k)$  (ασκηση!)

Έχουμε:  $Sf(\alpha) = \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2$

$\Rightarrow Sf(\alpha) = -f'''(\alpha) - \frac{3}{2} [f''(\alpha)]^2$

Επίσης:

$g'(x) = [f(f(x))]' = f'(x) f'(f(x))$

$\Rightarrow g'(\alpha) = f'(\alpha) f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) = [f'(\alpha)]^2 = (-1)^2 = 1$

Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο πορίσμα για την συνάρτηση  $g$ .

Exemple:

$$g''(x) = [f'(x) f'(f(x))]'$$

$$= f''(x) f'(f(x)) + f'(x) f'(x) f''(f(x))$$

$$\Rightarrow g''(a) = f''(a) \underbrace{f'(f(a))}_a + \underbrace{[f'(a)]^2}_{(-1)^2} \underbrace{f''(f(a))}_a$$

$$\Rightarrow g''(a) = -f''(a) + f''(a) = 0$$

Erreurs:

$$g'''(x) = [f''(x) f'(f(x)) + [f'(x)]^2 f''(f(x))]'$$

$$= f'''(x) f'(f(x)) + f''(x) f'(x) f''(f(x)) +$$

$$+ 2 f'(x) f''(x) f''(f(x)) +$$

$$+ [f'(x)]^2 f'(x) f'''(f(x))$$

$$\Rightarrow g'''(a) = f'''(a) \underbrace{f'(f(a))}_a + f''(a) \underbrace{f'(a)}_{-1} \underbrace{f''(f(a))}_a$$

$$+ 2 \underbrace{f'(a)}_{-1} f''(a) \underbrace{f''(f(a))}_a + \underbrace{[f'(a)]^2}_{(-1)^2} \underbrace{f'(a)}_{-1} \underbrace{f'''(f(a))}_a$$

$$\Rightarrow g'''(a) = -f'''(a) - (f''(a))^2 - 2(f''(a))^2 - f'''(a)$$

$$\Rightarrow g'''(a) = -2f'''(a) - 3(f''(a))^2 = 2Sf(a)$$

## Μετασχηματισμός Z

Αν  $(y_k) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε ορίζουμε

$$\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots \quad (*)$$

(μονόπλευρος μετασχηματισμός Z).

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι το σύνολο των  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία η δυναμοσειρά (\*) συγκλίνει. Συνήθως χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκλισης λόγου:

Πρόταση: Έστω ότι  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right|$ . Τότε η ανώτερη

περιοχή σύγκλισης που περιέχει το  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ .

Απόδειξη: Από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει αν

(για  $z \neq 0$ ):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{k+1} z^{-(k+1)}}{y_k z^{-k}} \right| < 1 \iff \frac{1}{|z|} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| < 1$$

$$\iff \frac{R}{|z|} < 1 \iff |z| > R$$

Πρόταση: Έστω  $(y_k)$  εκθετικά φρασμένη (δηλ. έστω ότι  $\exists \alpha > 0, M > 0 : |y_k| \leq M \alpha^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ ). Τότε η  $\hat{y}(z)$  είναι καλά ορισμένη και έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το σύνολο  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \alpha\}$ .

Απόδειξη: Έστω ότι  $|y_k| \leq M \alpha^k, k \in \mathbb{N}_0$ . Τότε για κάθε  $z : |z| > \alpha$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_k|}{|z|^k} \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{|z|^k}$$

Έστω  $\beta = \frac{\alpha}{|z|} < 1$ . Τότε

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} \right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{M}{1-\beta} < \infty$$

Μετασχηματισμός Z τυπικών ακολουθιών

(1)  $\left. \begin{matrix} \delta_k = 1, & k=0 \\ & = 0, & k \neq 0 \end{matrix} \right\}$  Συνάρτηση "κενός"

$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1$ , Περιοχή σύγκλισης =  $\mathbb{C}$

(2)  $u_k = 1, k \geq 0$  (Βηματική συνάρτηση)

$$\mathcal{Z}\{u_k\} = \hat{u}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

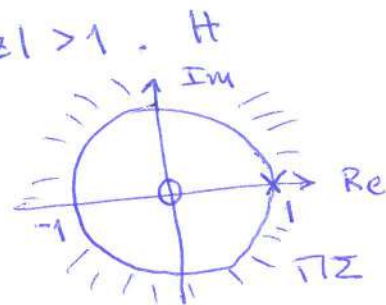
Περιοχή σύγκλισης  $|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$ . Η

συνάρτηση  $\hat{u}(z)$  έχει πόλο

πολυπλοσθέντος 1 στο  $z=1$

και μηδενικό πολυπλοσθέντος 1

στο  $z=0$ .



(3)  $y_k = k (k \geq 0)$ .

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = z^{-1} (1 + 2z^{-1} + \dots)$$

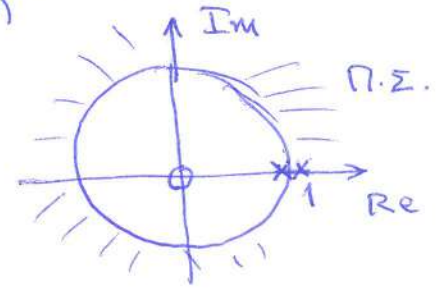
Έστω  $S(x) = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}, |x| < 1$ .

Στην περιοχή σύγκλισης η δυναμότητα παραγωγίζεται  
κατά όρο και,

$$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Επομένως,  $\hat{y}(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$ ,  $|z| > 1$

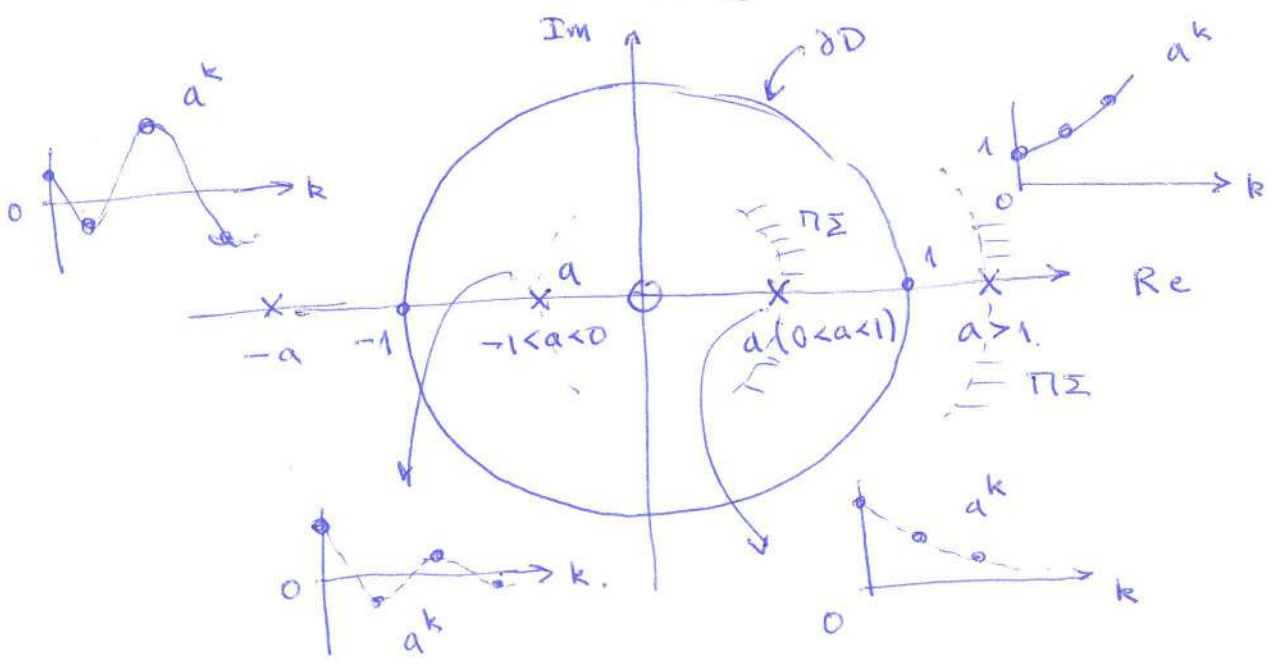
Παρατηρήστε ότι η  $\hat{y}(z)$  έχει



(4)  $y_k = a^k$  ( $k \geq 0$ )      Εκθετική συνάρτηση ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k = \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

και περιοχή σύγκλισης =  $\{z \in \mathbb{C} : |a z^{-1}| < 1\}$   
=  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |a|\}$ .



Παρατηρήστε ότι  $\hat{y}(z)$  έχει πόλο στο σημείο  $z=a$   
και μηδενικό στο σημείο  $z=0$ . Αν  $|a| < 1$  (ο πόλος είναι

Εντός του μοναδιαίου κύκλου ( $|z|=1$ ) τότε  ~~$z^k$~~   $y_k \rightarrow 0$  (4)  
 καθώς  $k \rightarrow \infty$ . Αν  $|a| > 1$ , τότε  $|y_k| \rightarrow \infty$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ ,  
 αν  $a=1$  τότε έχουμε σταθερή συνάρτηση (περίπτωση 2)  
 και αν  $a=-1$  τότε η  $(y_k)$  ταλαντώνεται χωρίς απόβροση  
 μεταξύ των σημείων 1 και -1. Στην 1<sup>η</sup> περίπτωση  
 $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\} \subseteq \text{π.Σ.}$ . Στις άλλες περιπτώσεις  
 $\partial D \cap \text{π.Σ.} = \emptyset$ .

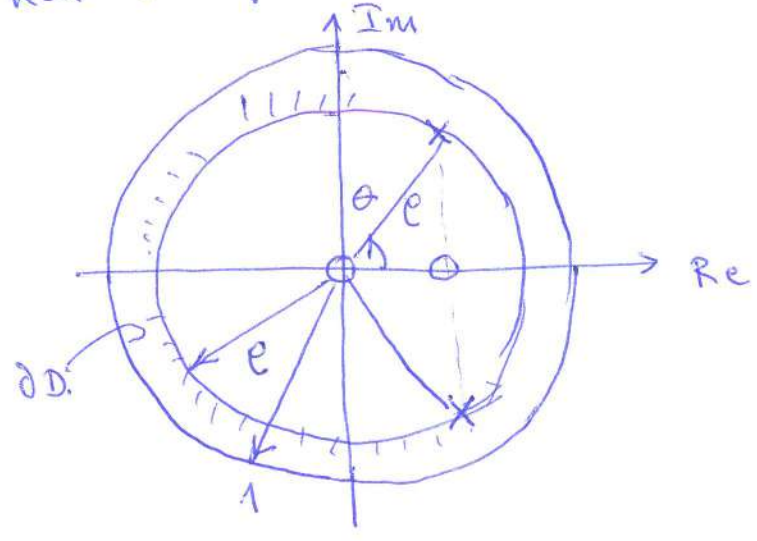
(5)  $y_k = \rho^k \cos(k\theta) = \frac{1}{2} \rho^k (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .  
 Λόγω πραγματικότητας του μετασχηματισμού (ιδιότητα  
 $\mathbb{I}_1$ ),

$$\begin{aligned} \hat{y}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho e^{i\theta} z^{-1})^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho e^{-i\theta} z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \rho e^{i\theta} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \rho e^{-i\theta} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \rho e^{-i\theta} z^{-1} + 1 - \rho e^{i\theta} z^{-1}}{1 - \rho(e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - \rho(e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^{-1}}{1 - 2\rho \cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - 2\rho \cos\theta z^{-1}}{1 - 2\rho \cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \\ &= \frac{1 - \rho \cos\theta z^{-1}}{1 - 2\rho \cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} = \frac{z(z - \rho \cos\theta)}{z^2 - 2\rho \cos\theta z + \rho^2} \end{aligned}$$

με περιοχή συγκλίσεως  $\Pi. \Sigma. = \{z \in \mathbb{C} : |z| > e\}$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μιγαδικούς συζυγείς πόλους

$z = \rho e^{\pm i\theta}$  και δύο μη δυνικά ( $z=0$  και  $z = \rho \cos \theta$ ),



Αν  $\rho = 1$  οι δύο πόλοι  $\in \partial D$ . Αν  $\rho < 1$ , τότε  $y_k \rightarrow 0$  καθώς  $k \rightarrow \infty$  και αν  $\rho > 1$ ,  $|y_k| \rightarrow \infty$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ .  
 Όταν  $\rho = 1$  η ακολουθία  $y_k$  ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση. Παρόμοια,

$$\mathcal{Z} \{ e^k \sin(k\theta) \} = \frac{e^{\sin \theta} z}{z^2 - 2e^{\cos \theta} z + e^2}$$

με  $\Pi. \Sigma. = \{z \in \mathbb{C} : |z| > e\}$ ;

$$\begin{aligned} \hat{y}(z) &= \frac{1}{2i} e^k (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{y}(z) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (e e^{i\theta} z^{-1})^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (e e^{-i\theta} z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1 - e e^{i\theta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e e^{-i\theta} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1 - e e^{-i\theta} z^{-1} - 1 + e e^{i\theta} z^{-1}}{1 - e(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) z^{-1} + e^2 z^{-2}} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{1 - 2\rho \cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} = \frac{\rho \sin\theta z^{-1}}{1 - 2\rho \cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} = \frac{\rho \sin\theta \cdot z}{z^2 - 2\rho \cos\theta z + \rho^2} \quad (6)$$

15/3/2024

### Ιδιότητες μετασχηματισμού

(I<sub>1</sub>) Γραμμικότητα:  $\mathcal{Z}\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha \hat{x}(z) + \beta \hat{y}(z)$ ,  
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , με ακτίνα σύγκλισης  $R = \max\{R_x, R_y\}$ , όπου  
 $R_x, R_y$  οι ακτίνας σύγκλισης των  $\hat{x}(z)$  και  $\hat{y}(z)$ , αντίστοιχα

(I<sub>2</sub>) Μετατόπιση: Η ιδιότητα ισχύει για τον συνδυασμό  
 μετασχηματισμού  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{Z}\left[(y_k)_{k=-\infty}^{\infty}\right] = \hat{x}(z) =:$   
 $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$  (συνάρτηση Laurent που συνκλίθεται σε  
 δακτύλιο  $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ ).

Αν  $y_k = 0$  για  $k < 0$ , τότε (i)  $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n} \hat{y}(z)$   
 ( $n \geq 0$ ) και (ii)  $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = z^n \hat{y}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$

Απόδειξη: Για  $n \geq 0$   
 (i)  $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-(k-n)}$

Θέτοντας  $m = k - n$ ,  
 $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} y_m z^{-m} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m}$

(εφόσον  $y_m = 0$  για  $m = -n, -n+1, \dots, -1$ ) και  
 άρα  $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n} \hat{y}(z)$ .

(ii)  $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+n} z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+n} z^{-(k+n)}$

Θέτοντας  $m = k + n$ ,  
 $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} y_m z^{-m} = z^n \left[ \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{-m} \right]$   
 $= z^n \hat{y}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$

(I<sub>3</sub>) Θεώρημα αρχικής σειράς: Αν  $\hat{y}(z) = \sum \{y_k\}$  και το όριο (7)  
 $\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{y}(z)$  ορίζεται, τότε  $\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{y}(z) = y_0$

Απόδειξη: Αν  $\hat{y}(z) = \sum \{y_k\}$ , τότε

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots$$

Παίρνοντας το όριο  $z \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{y}(z) = y_0$

(I<sub>4</sub>) Θεώρημα επιλογής σειράς: Αν  $\hat{y}(z) = \sum \{y_k\}$  και η μιγαδική συνάρτηση  $(z-1)\hat{y}(z)$  είναι αναλυτική για  $|z| > 1$ , τότε  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\hat{y}(z)$

(I<sub>5</sub>) Ιδιότητα συνέλιξης: Έστω  $(x_k), (y_k) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$   
 ορίσουμε  $(\omega_k) = (x_k) * (y_k)$  ως:

$$\omega_k = \sum_{m=0}^k x_{k-m} y_m \quad (k \geq 0).$$

Τότε  $\hat{\omega}(z) = \hat{x}(z) \cdot \hat{y}(z)$  και  $\text{π.σ.} \hat{\omega} \supseteq \text{π.σ.} \hat{x} \cap \text{π.σ.} \hat{y}$

(I<sub>6</sub>)  $\sum \{a^k x_k\} = \hat{x}\left(\frac{z}{a}\right)$  με  $\text{π.σ.} = (\text{π.σ.} \hat{x}) \cdot |a|$ .

(I<sub>7</sub>) Ανάλυση μετασχηματισμός

1<sup>η</sup> μέθοδος: (μέθοδος μερικών κλασμάτων - επί συνάρτησης).

Παράδειγμα: (Ακολουθία Fibonacci). Έστω π.Α.Τ.

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k, \quad y_0 = 0, y_1 = 1$$

Έχουμε:

$$\sum \{y_{k+2}\} = \sum \{y_{k+1}\} + \sum \{y_k\} \Rightarrow$$

$$z^2 \hat{y}(z) - z y_0 - z y_1 = z \hat{y}(z) - z y_0 + \hat{y}(z)$$

$$\Rightarrow (z^2 - z - 1) \hat{y}(z) = z y_0 + z (y_1 - y_0) = z$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Αρα } \frac{1}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z_1 - z_2}\right)}{z - z_1} + \frac{\frac{1}{z_2 - z_1}}{z - z_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - z_1} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - z_2}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k, \quad k \geq 0$$

Μέθοδος 2<sup>η</sup> (Ολοκληρωτικά υπολοίπων).

$$\text{Έστω } \hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_k z^{-k} + \dots$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) z^{k-1} = y_0 z^{k-1} + y_1 z^{k-2} + \dots + y_k z^{-1} + y_{k+1} z^{-2} + \dots$$

(Σερα Laurent με κέντρο το αψήφο  $z=0$ . Έστω  $C$  κύκλος κέντρου  $0$  και ακτίνας  $R$  που περικλείει όλους τους πόλους της ανίερσης  $\hat{y}(z) z^{k-1}$ . Τότε, από

το θεώρημα Cauchy,

$$y_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \hat{y}(z) z^{k-1} dz = \sum_i \text{ολοκ. υπόλοιπα}(\hat{y} z^{k-1}, z_i)$$

οπότε το άθροισμα είναι ως προς τους πόλους της  $\hat{y}(z) z^{k-1}$ .  
 Έστω ότι  $\hat{y}(z) z^{-k} = \frac{h(z)}{g(z)}$ ,  $h, g$  πρώτα πολυώνυμα.

Υπάρχουν δύο πιθανότητες:

- Η  $g(z)$  έχει απλή ρίζα (ισοδυνατά  $\hat{y}(z) z^{-k}$  έχει απλούς πόλους). Τότε  
 ολοκ. υπόλοιπο ( $\hat{y}(z) z^{k-1}, z_i$ ) =  $\lim_{z \rightarrow z_i} \left[ (z - z_i) \frac{h(z)}{g(z)} \right]$
- Η  $g(z)$  έχει ρίζα πολλαπλότητας  $> 1$ . Στην περίπτωση αυτή το ολοκ. υπόλοιπο σε πόλο  $z_i$  πολλαπλότητας  $r$  δίνεται από:

$$\begin{aligned} \text{ολοκ. υπόλοιπο}(\hat{y}(z) z^{k-1}, z_i) &= \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[ (z - z_i)^r \frac{h(z)}{g(z)} \right] \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να υποδοχθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $\hat{y}$  της συνάρτησης:

$$\hat{y}(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}$$

Έχουμε:  $\hat{y}(z) z^{k-1} = \frac{z^k(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}$  πω έχει

έναν απλό πόλο στο  $z=3$  και έναν πόλο πολλαπλότητας 2 στο  $z=2$

(10)

$$\text{Apa } y_k = \underbrace{0 \lambda \cdot \gamma_n \left( \tilde{y}(z) z^{k-1}, -3 \right)}_{K_1} + \underbrace{0 \lambda \cdot \gamma_n \left( \tilde{y}(z) z^{k-1}, 2 \right)}_{K_2}$$

$$= \oint_{|z|=R} \tilde{y}(z) z^{k-1} dz, \quad R = R_0 > 3$$

$$= \oint_{|z|=R} \frac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 (z+3)} dz.$$

$$K_1 = \lim_{z \rightarrow -3} \left[ \cancel{(z+3)} \frac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 \cancel{(z+3)}} \right] = \frac{(-3)^k (-3-1)}{(-3-2)^2}$$

$$= -\frac{4}{25} (-3)^k.$$

$$K_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[ \cancel{(z-2)}^2 \frac{z^{k+1} - z^k}{(z-2)^2 (z+3)} \right].$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{[(k+1)z^k - kz^{k-1}](z+3) - (z^{k+1} - z^k) \cdot 1}{(z+3)^2}$$

$$= \frac{[(k+1)2^k - k2^{k-1}](5) - \cancel{2} 2^{k+1} + 2^k}{5^2}$$

$$= \frac{1}{25} \left[ \cancel{2} 10(k+1) - 5k - 4 + 2 \right] 2^{k-1}$$

$$= \frac{1}{25} (5k+8) 2^{k-1} \quad \cancel{k \neq 0.}$$

$$= \frac{5k+8}{50} 2^k.$$

$$\text{Apa } y_k = K_1 + K_2 = -\frac{4}{25} (-3)^k + \frac{5k+8}{50} 2^k$$

# Διακριτά Συστήματα Εισόδου- Εξόδου

19/3/2024

11

Ορίζεται ως τελεστής που απεικονίζει διακριτά

ακολουθίες εισόδου  $\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$  μ

$\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\dots, \underline{u}_{-1}, \underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$  σε διακριτά

ακολουθίες εξόδου  $\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$  μ

$\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\dots, \underline{y}_{-1}, \underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$ . Συμβολικά

γράφεται:  $\underline{y}_t = (G_{\Sigma} u)_t, t \in \mathbb{N}_0$  ή  $t \in \mathbb{Z}$ . (όπου

$t$  ο διακριτός δείκτης χρόνου).

Ορισμός: Το σύστημα λέγεται "αίτιατο" (causal) αν η έξοδος την χρονική στιγμή  $t \in \mathbb{N}_0$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους  $\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$

Ισοδύναμα

$$(\underline{u}_t = \underline{v}_t \quad \forall t \leq t_0) \Rightarrow (G_{\Sigma} u)_t = (G_{\Sigma} v)_t \quad \forall t \leq t_0.$$

Ορισμός: Το σύστημα είναι γραμμικό αν η απεικόνιση  $G_{\Sigma}$  είναι γραμμική, δηλ.

$$(i) \quad G_{\Sigma}(u+v) = G_{\Sigma}(u) + G_{\Sigma}(v), \quad \text{και}$$

$$(ii) \quad G_{\Sigma}(\lambda u) = \lambda G_{\Sigma}(u), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Αν το σύστημα είναι γραμμικό και αίτιατο η απεικόνιση εισόδου-εξόδου είναι της μορφής:

$$(G_{\Sigma} u)_t = \sum_{k=0}^t G(t,k) \underline{u}_k, \quad t \in \mathbb{N}_0$$

όπου  $\underline{u}_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $(G_{\Sigma} u)_t \in \mathbb{R}^p$ ,  $G(t,k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Ορισμός: Το σύστημα  $\Sigma$  είναι χρονικά αναλλοίωτο αν η έξοδος του συστήματος σε είσοδο μετατοπισμένη  $k$  χρονικά στιγμή είναι η έξοδος στο μηδέν της μετατοπισμένης είσοδο, μετατοπισμένη  $k$  χρονικές στιγμές, δηλ. αν  $S$  ο τελεστής μετατόπισης,

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

τότε το  $\Sigma$  είναι χρονικά αναλλοίωτο αν  $G_\Sigma S = S G_\Sigma$

Παρατήρηση: Αν το σύστημα  $\Sigma$  είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε  $G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

Εφόσον  $G_\Sigma S = S G_\Sigma \iff G_\Sigma S u = S G_\Sigma u \quad \forall u = (u_0, u_1, \dots)$

τότε και για είσοδο  $Su = (0, u_0, u_1, \dots)$  έχουμε:

$$G_\Sigma S(Su) = S G_\Sigma (Su)$$

$$\implies G_\Sigma S^2 u = S(G_\Sigma S)u = S(S G_\Sigma)u = S^2 G_\Sigma u$$

και γενικά  $G_\Sigma S^k u = S^k G_\Sigma u \quad \forall u = (u_0, u_1, \dots)$

δηλ.  $G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma$

Πρόταση: Έστω  $\Sigma$  απειράτο, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο. Τότε η απεικόνιση είσοδος-έξοδος ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^t G(t-k) \underline{u}_k, \quad t \geq 0.$$

Απόδειξη: Έστω  $e$  η παλμική συνάρτηση ακολουθία (ακολουθία κρούσης)  $e = (\underline{u}_0, \underline{0}, \underline{0}, \dots)$ , όπου  $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^m$  αυθαίρετο. Τότε,

$$\begin{aligned}
 (G_{\Sigma} e)_t &= \sum_{k=0}^t G(t, k) \underline{u}_k = \\
 &= G(t, 0) \underline{u}_0 + G(t, 1) \underline{u}_1 + G(t, 2) \underline{u}_2 + \dots \\
 &= G(t, 0) \underline{u}_0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (S^k G_{\Sigma} e)_t = G(t-k, 0) \underline{u}_0, \quad t \geq k$$

Επίσης:

$$\begin{matrix}
 k \text{ θέσε} \\
 \downarrow \\
 (S^k e)_t = (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}, \underline{u}_0, \underline{0}, \dots)
 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (G_{\Sigma} S^k e)_t &= G(t, 0) \underline{0} + \dots + G(t, k) \underline{u}_0 + \dots \\
 &= G(t, k) \underline{u}_0, \quad t \geq k
 \end{aligned}$$

Εφόσον το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο,

$$G_{\Sigma} S^k = S^k G_{\Sigma} \Rightarrow G(t-k, 0) \underline{u}_0 = G(t, k) \underline{u}_0 \quad \forall \underline{u}_0 \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \underline{G(t-k, 0) = G(t, k)}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που έχουμε γραμμικό, αδιακό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (με μικρή βλάβη στη βολογραφία)  $G(t-k) = G(t-k, 0)$ , Στην περίπτωση αυτή οι πίνακες  $(G(0), G(1), G(2), \dots)$  είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η έξοδος του συστήματος σε έναν είσοδος είναι ακολουθία κρούσης δίνεται από την εξίσωση:

$$G_{\Sigma} (\underline{u}_0, \underline{0}, \underline{0}, \dots) = (G(0) \underline{u}_0, G(1) \underline{u}_0, \dots)$$



Πρόταση: Έστω  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$ , εκθετικά φραγμένη ακολουθία με παραμέτρους  $(M_1, \alpha_1)$  και  $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  εκθετικά φραγμένη ακολουθία πινάκων  $G_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$  με  $\alpha_2$  παραμέτρους  $(M_2, \alpha_2)$ , Έστω,

$$\underline{y}_t = (G \Sigma u)_t = \sum_{k=0}^t G(t-k) \underline{u}_k, \quad t \geq 0$$

Τότε  $\{\underline{y}_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$  είναι εκθετικά φραγμένη ακολουθία διανυσμάτων στο  $\mathbb{R}^p$  και ο μετασχηματισμός  $\mathcal{Z}$ ,

$$\mathcal{Z}(\underline{y}_t) = \hat{\underline{y}}(z)$$

είναι καλά ορισμένος (δηλ. η δυναμοσειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$  συγκλίνει σε περιοχή  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  για κάποιο  $R > 0$ ).

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \|\underline{y}_t\| &= \left\| \sum_{k=0}^t G(t-k) \underline{u}_k \right\| \leq \sum_{k=0}^t \|G(t-k)\| \cdot \|\underline{u}_k\| \\ &\leq \sum_{k=0}^t M_2 \alpha_2^{t-k} \cdot M_1 \alpha_1^k = M_1 M_2 \alpha_2^t \sum_{k=0}^t \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k \end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Άρα,

$$\begin{aligned} \|\underline{y}_t\| &\leq M_1 M_2 \alpha_2^t \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k = M_1 M_2 \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \alpha_2^t \\ &= M_1 M_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \alpha_2^t := M_3 \alpha_2^t \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{:= M_3} \end{aligned}$$

Άρα  $\{\underline{y}_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$  είναι εκθετικά φραγμένη και επομένως  $\hat{\underline{y}}(z)$  είναι καλά ορισμένη (δυναμοσειρά συγκλίνει σε  $|z| > \alpha_2$ ). □

Παρατηρούμε ότι τα άσθητα  $\Sigma$  είναι δυναμικά, (έχουν "μνήμη") καθώς η έξοδος την χρονική στιγμή  $t$  δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή, αλλά και από τις εισόδους παρελθόντος χρόνου  $t-1, t-2, \dots, 0$ .

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον ορισμό εκθετικά φραγμένων ακολουθίας για ακολουθίες διανυσμάτων και ακολουθίες πινάκων.

Ορισμός: Έστω  $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ . Ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα του  $\underline{u}$  ως:  $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u}^T \underline{u}} = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2\right)^{1/2}$ . Αν

$$(\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots), \quad \underline{u}_i \in \mathbb{R}^m, \quad \text{τότε η}$$

ακολουθία είναι εκθετικά φραγμένη αν  $\exists \alpha_1 > 0, M_1 > 0$ , ε.ω:

$$\|\underline{u}_k\| \leq M_1 \alpha_1^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Ορισμός: Έστω  $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Ορίζουμε ως  $\|G\|$  την φασματική νόρμα:

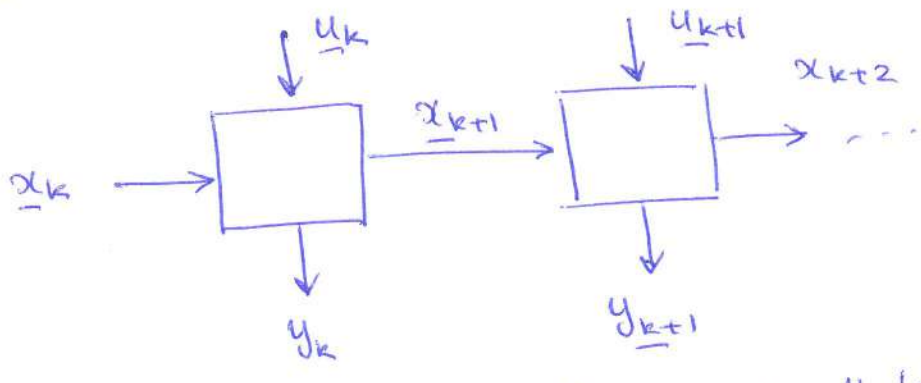
$$\|G\| = \max \{ \|G\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \|\underline{x}\| = 1 \}$$

(όπου  $\|\underline{x}\|$  και  $\|G\underline{x}\|$  είναι οι Ευκλείδειες νόρμες των διανυσμάτων  $\underline{x}$  και  $G\underline{x}$ , αντίστοιχα). Ισχύει ότι:

$$\|G\| = \sigma_1(G) = \sqrt{\lambda_{\max}(G^T G)} \quad (\text{μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του } G).$$

Έστω:  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (G_0, G_1, G_2, \dots)$  ακολουθία πινάκων με  $G_k \in \mathbb{R}^{p \times m}, k \geq 0$ . Η ακολουθία λέγεται εκθετικά φραγμένη αν  $\exists M_2 > 0, \alpha_2 < 1$  ε.ω  $\|G_k\| \leq M_2 \alpha_2^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

Παρατηρούμε ότι αν  $(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$  είναι γνωστά διαδοχικά  
τότε  $(\underline{x}_{k+1}, \underline{y}_k)$  είναι μονοσήμαντα ορισμένα.



Το διάνυσμα κατάστασης  $\underline{x}_k$  "συμπυκνώνει" όλη την  
πληροφορία για την εξέλιξη του σήματος μέχρι  
την χρονική στιγμή  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα σήματα κατ. χώρου

Της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A(k) \underline{x}_k + B(k) \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C(k) \underline{x}_k + D(k) \underline{u}_k \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}_0.$$

όπου  $A: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$   
και  $D: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$

Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα σήματα κατ. χώρου

Της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C \underline{x}_k + D \underline{u}_k \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}_0$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Παρατήρηση: Από την ιδιότητα συνέλιξης έχουμε:

$$\underline{y}_t = (G_t) * (\underline{u}_t) = \sum_{k=0}^t G(t-k) \underline{u}(k), \quad t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\underline{y}}(z) = \hat{G}(z) \hat{\underline{u}}(z).$$

Η πίνακο-συνάρτηση  $\hat{G}(z) = \mathcal{Z}\{G_t\} \in \mathbb{R}(z)^{p \times m}$  ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του (γραμμικού, αδιατάκτου, χρονικά-αναλλοίωτου συστήματος  $\Sigma$ ).

Συστήματα καταστάσεων-χώρου (state-space) διακριτού χρόνου

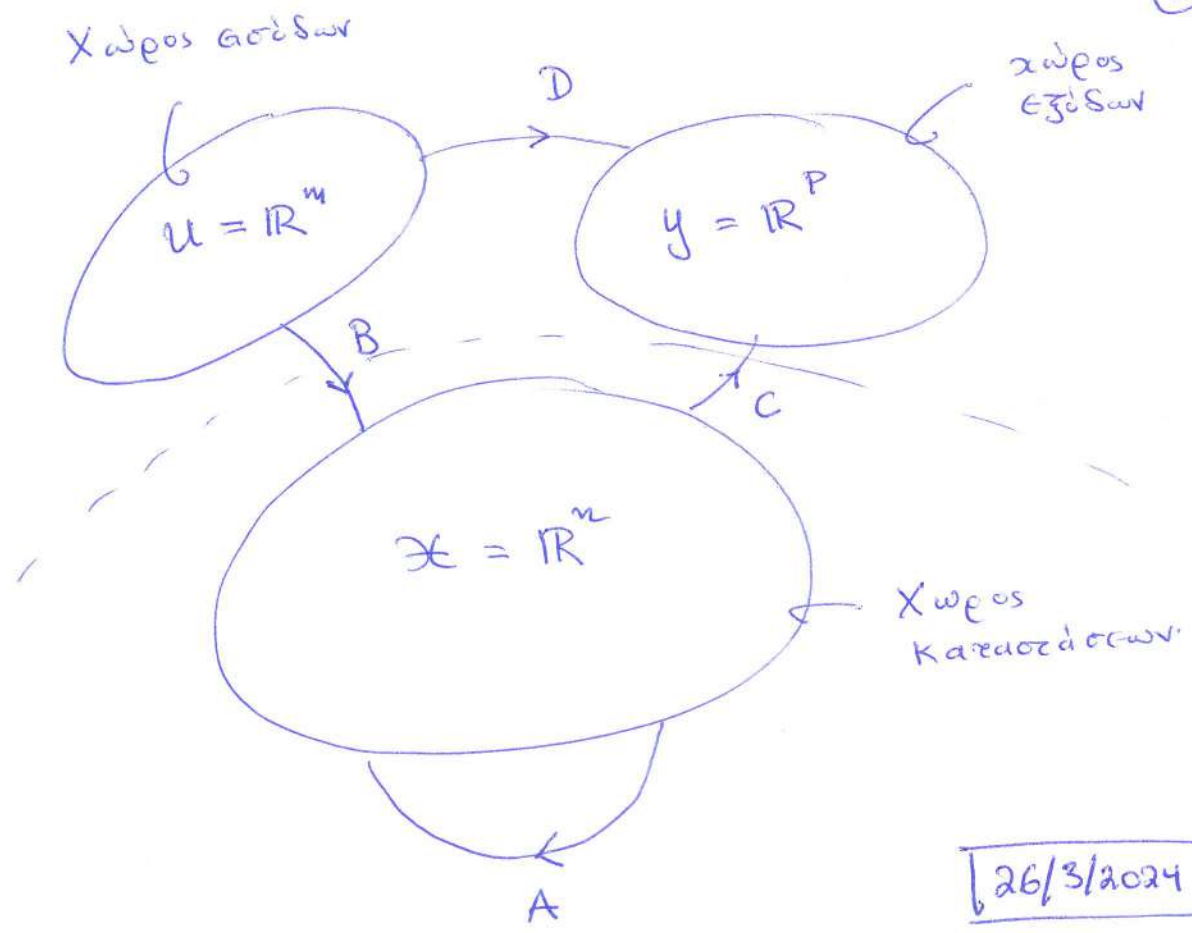
Ορίζεται από εξισώσεις της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} x_i(k+1) &= f_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ &\quad i=1, 2, \dots, n \\ y_i(k) &= g_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ &\quad i=1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\}$$

Σε πιο απλά μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{f}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \\ \underline{y}_k &= \underline{g}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \end{aligned} \right\}$$

όπου  $\underline{f}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{g}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Το διάνυσμα  $\underline{x}_k$  λέγεται διάνυσμα κατάστασης, και το διάνυσμα  $\underline{y}_k$  λέγεται διάνυσμα εξόδου. και το  $\underline{u}_k$  διάνυσμα εισόδου.



Απόκριση γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου

Εξετάσουμε πρώτα το σύστημα με μηδενική είσοδο (ομογενές):  $\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k$ ,  $\underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0$ . Έχουμε

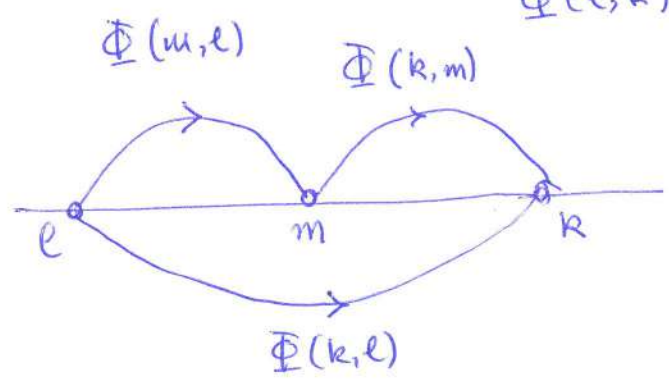
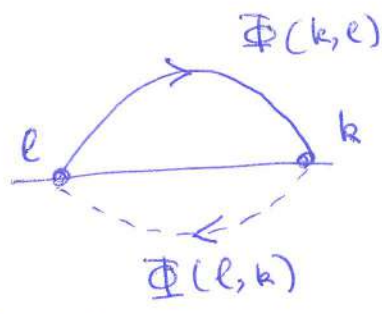
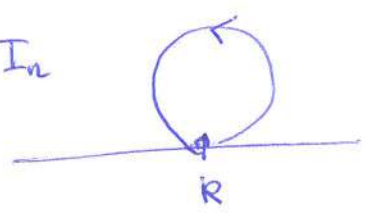
$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= A_{k-1} \underline{x}_{k-1} = A_{k-1} A_{k-2} \underline{x}_{k-2} = \dots \\ &= \underbrace{A_{k-1} A_{k-2} \dots A_{k_0}}_{\Phi(k, k_0)} \underline{x}_{k_0} \end{aligned}$$

όπου  $\Phi(k, k_0)$  ο πίνακας μεταφοράς,  $\Phi(k, k_0) = \prod_{i=k_0}^{k-1} A_i$

- Ιδιότητες:
- (i)  $\Phi(k, k) = I_n$
  - (ii)  $\Phi(k, l) = \Phi(k, m) \Phi(m, l)$   $k \geq m \geq l$
  - (iii) ο πίνακας  $\Phi(k, l)$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι πίνακες  $A_{k-1}, \dots, A_l$  είναι αντιστρέψιμοι, οπότε  $\Phi^{-1}(k, l) = \Phi(l, k)$

Παρατήρηση: Ο πίνακας μεταφοράς συστήματος συνεχούς χρόνου είναι πάντα αντιστρέψιμος.

$$\Phi(k, l) = I_n$$



Για χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (μηδενικής εισόδου),  
 $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$ , έχουμε  $\underline{x}_k = A^{k-k_0} \underline{x}_{k_0}$  ( $A^0 = I_n$ ) οπότε  
 $\Phi(k, k_0) = \hat{\Phi}(k-k_0) = A^{k-k_0}$ . Για γραμμικό σύστημα με  
 μη μηδενική είσοδο,

$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= A_{k-1} \underline{x}_{k-1} + B_{k-1} \underline{u}_{k-1} \\ &= A_{k-1} (A_{k-2} \underline{x}_{k-2} + B_{k-2} \underline{u}_{k-2}) + B_{k-1} \underline{u}_{k-1} \\ &= \underbrace{A_{k-1} A_{k-2}}_{\Phi(k, k-2)} \underline{x}_{k-2} + \underbrace{A_{k-1} B_{k-2}}_{\Phi(k, k-1)} \underline{u}_{k-2} + \underbrace{I_n \cdot B_{k-1}}_{\Phi(k, k)} \underline{u}_{k-1} \\ &= \Phi(k, k-2) \underline{x}_{k-2} + \sum_{j=k-2}^{k-1} \Phi(k, j+1) B_j \underline{u}_j \end{aligned}$$

και επαγωγικά,

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_k &= \Phi(k, k_0) \underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1) B_j \underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= C_k \Phi(k, k_0) \underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} C_k \Phi(k, j+1) B_j \underline{u}_j + D_k \underline{u}_k \end{aligned} \right\}$$

Σε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα,

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_k &= A^{k-k_0} \underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= C A^{k-k_0} \underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} C A^{k-j-1} B \underline{u}_j + D \underline{u}_k \end{aligned} \right\}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας σε χρονικά αναλλοίωτα συστήματα θέτουμε  $k_0=0$ , και

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_k &= A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= C A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B \underline{u}_j + D \underline{u}_k \end{aligned} \right\}$$

Αν  $\underline{x}_0 = \underline{0}$ ,

$$\begin{aligned} \underline{y}_k &= \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B \underline{u}_j + D \underline{u}_k \\ &= \sum_{j=0}^k G(k-j) \underline{u}_j \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{όπου: } G(k-j) &= C A^{k-j-1} B && (0 \leq j \leq k-1) \\ &= D && (j=k). \end{aligned} \right\}$$

Είναι η "κλαστική απάντηση" του συστήματος. Η

ακολουθία:

$$\left\{ G(k) \right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ D, CB, CAB, CA^2B, \dots \right\}$$

είναι η ακολουθία συντελεστών Markov. Επομένως

$$\underline{y}_t = (G \Sigma u)_t = D \underline{u}_t + CB \underline{u}_{t-1} + CAB \underline{u}_{t-2} + \dots + CA^{t-1} B \underline{u}_0$$

Λήμμα: Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ . Τότε

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  όπου  $\|\cdot\|$  η φασματική νόρμα πίνακα (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή). Επομένως αν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (τετραγωνικός πίνακας),  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Απόδειξη: Εφόσον η φασματική νόρμα πίνακα επάγεται από την Ευκλείδεια νόρμα διανυσμάτων,  $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^q$ . Άρα, για κάθε  $x \in \mathbb{R}^q$ ,  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} & \max \{ \|ABx\| : x \in \mathbb{R}^q, \|x\| \leq 1 \} \\ & \leq \|A\| \cdot \max \{ \|Bx\| : x \in \mathbb{R}^q, \|x\| \leq 1 \} \\ & = \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

Ειδικά για τετραγωνικούς πίνακες,

$$\|A^2\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$$

και επαγωγικά  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$   $\square$

Λήμμα: Έστω  $S_t(z) = \sum_{k=1}^t A^{k-1} z^{-k} = z^{-1} I_n + z^{-2} A + \dots + z^{-t} A^{t-1}$

Αν  $|z| > \|A\|$  η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση  $(zI_n - A)^{-1}$ .

Απόδειξη: Έστω  $|z| > \|A\|$  και  $\gamma = \frac{\|A\|}{|z|} < 1$ . Τότε

$$\begin{aligned} \|S_t(z)\| &= \|z^{-1} I_n + z^{-2} A + \dots + z^{-t} A^{t-1}\| \\ &= |z|^{-1} \cdot \|I_n + z^{-1} A + \dots + z^{-t+1} A^{t-1}\| \end{aligned}$$



$$\leq |z|^{-1} \left( 1 + \frac{\|A\|}{|z|} + \dots + \frac{\|A^{t-1}\|}{|z|^{t-1}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{|z|} \left( 1 + \frac{\|A\|}{|z|} + \dots + \frac{\|A\|^{t-1}}{|z|^{t-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{|z|} \left( 1 + \gamma + \dots + \gamma^{t-1} \right) \rightarrow \frac{1}{|z|(1-\gamma)}$$

Καθώς  $t \rightarrow \infty$ , Έπομένως η σειρά συγκλίνει και για  $z \neq 0$ ,

$$(zI_n - A)S_t(z) = (zI_n - A)(z^{-1}I_n + z^{-2}A + \dots + z^{-t}A^{t-1})$$

$$= I_n + \cancel{z^{-1}A} + \dots + \cancel{z^{-t+1}A^{t-1}} - \cancel{z^{-1}A} - \cancel{z^{-2}A^2} - \dots - z^{-t}A^t$$

$$= I_n - \frac{A^t}{z^t} \rightarrow I_n \text{ αν } |z| > \|A\|.$$

Καθώς  $\| \frac{A^t}{z^t} \| = \frac{\|A^t\|}{|z|^t} \leq \left( \frac{\|A\|}{|z|} \right)^t \rightarrow 0$  <sup>σε όριο,</sup> ~~καθώς~~  $(t \rightarrow \infty)$   
 (αν  $|z| > \|A\|$ ),

Έπομένως,

$$(zI_n - A) \left( \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} \right) = I_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = (zI_n - A)^{-1}, \quad |z| \geq \|A\|$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος πίνακας  $(zI_n - A)^{-1}$  είναι καλά ορισμένος για  $|z| > \|A\|$  αφού  $\|A\| > \rho(A)$  (όπου  $\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$  η φασματική ακτίνα του  $A$ ). □

Θεώρημα: Το σύστημα καταστάσεων χώρου,  
 $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$   
 αντιστοιχεί σε αδιατάκτο, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με συνάρτηση μεταφοράς  $\hat{G}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B$

Απόδειξη: Η λύση της εξίσωσης  $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$   
για  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \underline{0}$  είναι: ( $\underline{x}_t = \underline{0}$  αν  $t=0$  και):

$$\underline{x}_t = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B \underline{u}_k, \quad t \geq 1$$

που αντιστοιχεί σε ακολουθία εξισώσεων

$$\underline{y}_t = (G\underline{z}u)_t = \sum_{k=0}^{t-1} CA^{t-k-1} B \underline{u}_k + D\underline{u}_t, \quad t \geq 0$$

Η ακολουθία πινάκων  $(CA^{k-1}B)_{k \in \mathbb{N}}$  είναι εκθετικά φραγμένη αφού:

$$\|CA^{k-1}B\| \leq \|C\| \cdot \|B\| \cdot \|A\|^{k-1} := M\alpha^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

όπου  $M := \|C\| \cdot \|B\|$  και  $\alpha = \|A\|$ . Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= D + \sum_{k=1}^{\infty} CA^{k-1}B z^{-k} \\ &= D + C \left( \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} \right) B \end{aligned}$$

είναι καλά ορισμένη για και συγκλίνει για "αρκούντως μεγάλο"  $|z|$ . Πράγματι, από προηγούμενο

Λήμμα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = (zI_n - A)^{-1}, \quad |z| > \|A\|$$

και επομένως  $\hat{G}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B$ .  $\square$

Η συνάρτηση μεταφοράς  $\hat{G}(z)$  μπορεί να βρεθεί πιο εύκολα άμεσα από τις εξισώσεις που ορίζουν το σύστημα κατάστασης με την χρήση ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Z. Πράγματι, αν

$$\mathcal{Z}\{\underline{x}_k\} = \underline{\hat{x}}(z), \quad \mathcal{Z}\{\underline{y}_k\} = \underline{\hat{y}}(z), \quad \mathcal{Z}\{\underline{u}_k\} = \underline{\hat{u}}(z),$$

τότε για  $|z| \geq \|A\|$ ,

$$\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \Rightarrow z \underline{\hat{x}}(z) - \underline{x}(0) = A \underline{\hat{x}}(z) + B \underline{\hat{u}}(z)$$

$$\Rightarrow (z I_n - A) \underline{\hat{x}}(z) = z \underline{x}_0 + B \underline{\hat{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{x}}(z) = \mathcal{Z}(z I_n - A)^{-1} \underline{x}_0 + (z I_n - A)^{-1} B \underline{\hat{u}}(z)$$

Επίσης,

$$\underline{\hat{y}}(z) = \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k \Rightarrow \underline{\hat{y}}(z) = C \underline{\hat{x}}(z) + D \underline{\hat{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{y}}(z) = C \left[ z (z I_n - A)^{-1} \underline{x}_0 + (z I_n - A)^{-1} B \underline{\hat{u}}(z) \right] + D \underline{\hat{u}}(z)$$

και για  $\underline{x}_0 = \underline{0}$ ,

$$\underline{\hat{y}}(z) = \underbrace{[C (z I_n - A)^{-1} B + D]}_{\hat{G}(z)} \underline{\hat{u}}(z) = \hat{G}(z) \underline{\hat{u}}(z)$$

Έστω  $\varphi(z) = \det(z I_n - A)$ , ~~det~~  $\deg[\varphi(z)] = n = \dim(A)$  το χαρακτηριστικό πολυώνομο του πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε

$$\hat{G}(z) = C \frac{\text{adj}(z I_n - A)}{\varphi(z)} B + D = \frac{C \text{adj}(z I_n - A) B + D \varphi(z)}{\varphi(z)}$$

$$:= \frac{N(z)}{\varphi(z)} \quad \text{όπου } N(z) \in \mathbb{R}^{p \times m}[z]$$

Παρατηρούμε ότι  $\hat{G}(z)$  είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής z

δηλ τα στοιχεία  $G_{ij}(z)$  της  $G(z)$  είναι λόγος δύο πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, δηλ.

$$\hat{G}_{ij}(z) = \frac{N_{ij}(z)}{\varphi(z)}, \quad i=1,2,\dots,P, \quad j=1,2,\dots,m$$

Συγκεκριμένα,

$$D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \deg [N_{ij}(z)] = n = \deg [\varphi(z)]$$

$$D_{ij} = 0 \Rightarrow \deg [N_{ij}(z)] < n = \deg [\varphi(z)].$$

Σε κάθε περίπτωση  $\deg [N_{ij}(z)] \leq n = \deg [\varphi(z)]$

$\forall i=1,2,\dots,P, j=1,2,\dots,m$  και η συνάρτηση μεταφοράς

$\hat{G}(z)$  είναι "κανονική" (proper). Αν  $D=0$ , τότε

$$\deg [N_{ij}(z)] < n = \deg [\varphi(z)] \quad \forall i=1,2,\dots,P, j=1,2,\dots,m$$

και η  $\hat{G}(z)$  είναι "αυστηρά κανονική" (strictly proper).

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C \underline{x}_k, \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0].$$

(και  $D=0$ ) που αντιστοιχεί στις εξισώσεις διαφορών:

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + u_k, \quad x_{k+1}^{(2)} = x_k^{(2)}, \quad y_k = x_k^{(1)}$$

όπου  $\underline{x}_k = [x_k^{(1)}; x_k^{(2)}]^T$ . Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{G}(z) = C(zI_2 - A)^{-1}B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το δόνημα:

$$\hat{G}(z) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z-1+1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Η  $\hat{G}(z)$  έχει πόλο στο  $z=1$  (πολλαπλότητα 2) και μηδενικό στο  $z=0$  (πολλαπλότητα 1).

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι κάθε ελαστική κατάσταση χώρου (αξιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο) έχει ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίθετο.

Πρόβλημα: Έστω  $\hat{G}(z)$  ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς αξιατό, γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο συστήματος εισόδου-εξόδου. Μπορεί το σύστημα να εκφραστεί σε μορφή καταστάσεων χώρου; (πρόβλημα "πραγματοποίησης"). Αν ναι, τότε ο πέλτος είναι μοναδικός;

Θα δείξετε ότι η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι καταφατική και <sup>στο</sup> δεύτερο αρνητική.

Λήμμα: Έστω  $H(z)$  και  $L(z)$  τα πίνακο-πολυώνυμα,

$$H(z) = \sum_{j=0}^{l-1} z^j H_j \quad \text{και} \quad L(z) = z^l I_m + \sum_{j=0}^{l-1} z^j A_j \quad \text{διαστάσεων}$$

$l \times m$  και  $m \times m$  αντίστοιχα. Έστω,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{l-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad C = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_{l-1}]$$

Τότε  $H(z)L^{-1}(z) = C(zI - A)^{-1}B$  όπου  $z \notin \sigma(A)$  (τις φάσμα του πίνακα  $A$ ).

Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση  $H(z) = I$ , οπότε  $H_0 = I, H_1 = H_2 = \dots = H_{l-1} = 0$  και  $C = [I \ 0 \ \dots \ 0]$ .

Έστω  $z \in \mathbb{C}$  και έστω ότι

$$L(z) \underline{x}_1 = \underline{u} \quad (\#)$$

Ορίζουμε διανύσματα:  $\underline{x}_2 = z \underline{x}_1, \underline{x}_3 = z \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_l = z \underline{x}_{l-1} = z^{l-1} \underline{x}_1$  ( $\Rightarrow z \underline{x}_l = z^l \underline{x}_1$ ),  $\underline{x} = [\underline{x}_1^T \ \underline{x}_2^T \ \dots \ \underline{x}_l^T]^T$ . Τότε,

$$\begin{aligned} A \underline{x} & \stackrel{(*)}{=} \begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_{l-1} \\ \underline{x}_l \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_l \\ -A_0 \underline{x}_1 - A_1 \underline{x}_2 - \dots - A_{l-1} \underline{x}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \underline{x}_1 \\ \vdots \\ z \underline{x}_{l-1} \\ -\left(\sum_{j=0}^{l-1} A_j z^j\right) \underline{x}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\underline{u} = L(z) \underline{x}_1 = \left[ z^l I + \sum_{j=0}^{l-1} z^j A_j \right] \underline{x}_1$$

$$\Rightarrow - \left[ \sum_{j=0}^{l-1} z^j A_j \right] \underline{x}_1 = z^l \underline{x}_1 - \underline{u} = z \underline{x}_l - \underline{u} \quad (**)$$

Και από (\*) :

$$A \underline{x} = \begin{bmatrix} z \underline{x}_1 \\ z \underline{x}_2 \\ \vdots \\ z \underline{x}_{l-1} \\ - \left( \sum_{j=0}^{l-1} z^j A_j \right) \underline{x}_1 \end{bmatrix} \stackrel{(**)}{=} \begin{bmatrix} z \underline{x}_1 \\ z \underline{x}_2 \\ \vdots \\ z \underline{x}_{l-1} \\ z \underline{x}_l - \underline{u} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_{l-1} \\ \underline{x}_l \end{bmatrix} - B \underline{u}$$

$$\Rightarrow (zI - A) \underline{x} = B \underline{u} \Rightarrow \underline{x} \stackrel{(***)}{=} (zI - A)^{-1} B \underline{u}, \quad z \notin \sigma(A)$$

Επίσης,

$$C \underline{x} = [I \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_l \end{bmatrix} \stackrel{(***)}{=} \underline{x}_1 = C (zI - A)^{-1} B \underline{u}$$

Επομένως,

$$(\#) \Rightarrow \underline{x}_1 = L^{-1}(z) \underline{u} = [I \ 0 \ \dots \ 0] (zI - A)^{-1} B \underline{u}$$

$$\Rightarrow \left[ L^{-1}(z) - [I \ 0 \ \dots \ 0] (zI - A)^{-1} B \right] \underline{u} = 0 \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{C}^m$$

$$\Rightarrow L^{-1}(z) = [I \ 0 \ \dots \ 0] (zI - A)^{-1} B$$

που δίνει το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε.

Στην γενική περίπτωση ( $H(z) = \sum_{j=0}^{l-1} z^j H_j$ ) έστω ότι: (29)

$$\begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_l(z) \end{bmatrix} = (zI - A)^{-1} B. \quad (\#\#)$$

Τότε, από το πρώτο μέλος της απόδειξης,

$$\begin{aligned} L^{-1}(z) &= [I \ 0 \ \dots \ 0] (zI - A)^{-1} B \\ &= [I \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} C_1(z) \\ \vdots \\ C_l(z) \end{bmatrix} = C_1(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1(z) = L^{-1}(z) \quad (\$)$$

Από την (\#\#)

$$(zI - A) \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_l(z) \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow z \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_l(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_l(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} z C_1(z) &= C_2(z) \\ z C_2(z) &= C_3(z) = z^2 C_1(z) \\ &\vdots \\ z C_{l-1}(z) &= C_l(z) = z^{l-1} C_1(z) \end{aligned} \right\}$$

και γενικά  $C_j(z) = z^{j-1} C_1(z)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ . Άρα



$$C(zI - A)^{-1}B = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_{\ell-1}] \begin{bmatrix} C_1(z) \\ z C_1(z) \\ \vdots \\ z^{\ell-1} C_1(z) \end{bmatrix} =$$

$$= [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_{\ell-1}] \begin{bmatrix} I \\ z I \\ \vdots \\ z^{\ell-1} I \end{bmatrix} C_1(z)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{H(z)}$

$$= H(z) C_1(z) \stackrel{(\text{f})}{=} H(z) L^{-1}(z) \quad \square$$

Θεώρημα: Η συνάρτηση εισόδου-εξόδου ενός αιτιατού, γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος  $\Sigma$  γράφεται ως σύστημα καταστάσεων χώρου αν και μόνο αν το  $\Sigma$  έχει συνάρτηση μεταφοράς που είναι ρητή και κανονική.

Απόδειξη: Έχουμε ήδη δείξει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος καταστάσεων χώρου είναι ρητή και κανονική.

Αντίστροφα, έστω  $\Sigma$  αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με ρητή συνάρτηση μεταφοράς  $\hat{G}(z)$ .

Θα δείξουμε ότι,

$$\underline{y}_t = (G_{\Sigma} u)_t = \sum_{k=0}^t G(t-k) \underline{u}_k, \quad t=0,1,2,\dots$$

Εκφράζεται ως σύστημα καταστάσεων χώρου.

Εφόσον  $\hat{G}(z)$  ρητή και κανονική, κάθε στοιχείο  $\hat{G}_{ij}(z)$  είναι επίσης ρητή και κανονική συνάρτηση (βαθμωτή).

Επομένως,  $\hat{G}(z) \rightarrow G(0)$  καθώς  $|z| \rightarrow \infty$  και επομένως  
 γράφουμε  $\hat{G}(z) = G(0) + K(z)$ , όπου  $K(z)$  άσπρη κανονική,  
 δηλαδή  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} K(z) = 0$ . Το στοιχείο  $(i,j)$  του πίνακα

$K(z)$ ,  $k_{ij}(z)$ , γράφεται ως

$$k_{ij}(z) = \frac{P_{ij}(z)}{q_{ij}(z)}$$

όπου (χωρίς βλάβη γενικότητας) θεωρούμε ότι το πολυ-  
 νομιο  $q_{ij}(z)$  είναι μονικό (συντελεστής υψηλότερου βαθμού  
 ίσος με την μονάδα). Επίσης έχουμε  $\deg(P_{ij}) < \deg(q_{ij})$

Έστω ότι  $v(z) = \prod_{i,j} q_{ij}(z)$  και έστω ότι  $H(z) = v(z)K(z)$ .  
 Τότε ο πίνακας  $H(z)$  είναι πολυωνυμικός,

$$H(z) = H_0 + H_1 z + \dots + H_{l-1} z^{l-1}$$

όπου  $l \leq \deg v(z)$ .

[Π.χ. αν  $p=m=2$ ,

$$H(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{P_{11}}{q_{11}} & \frac{P_{12}}{q_{12}} \\ \frac{P_{21}}{q_{21}} & \frac{P_{22}}{q_{22}} \end{bmatrix}}_{K(z)} \underbrace{\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}}_{v(z)} = \begin{bmatrix} P_{11}(q_{12}q_{21}q_{22}) & * \\ P_{21}(q_{11}q_{12}q_{22}) & * \end{bmatrix}$$

και γενικά,

$$\begin{aligned} \deg(H_{ij}) &= \deg(P_{ij}) + \sum_{\substack{k,e \\ k \neq i, e \neq j}} \deg(q_{ke}) = \\ &= \deg(P_{ij}) - \deg(q_{ij}) + \sum_{k,e} \deg(q_{ke}). \end{aligned}$$

και εχουσιν

$$\deg(p_{ij}) < \deg(q_{ij}), \quad \sum_{k,l} \deg(q_{kl}) = \deg(r)$$

εχουμε :

$$\deg(H_{ij}) < \deg(r)$$

για καθε (i,j) και συνεπως

$$\max_{i,j} \deg(H_{ij}) < \deg(r) \quad ]$$

Ορισουμε :  $L(z) = r(z) I_m$ , οτε  $L(z)$  μονικός πολυωνομικός πινακας και  $K(z) = H(z) L^{-1}(z)$ .

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα υπάρχουν πινακες  $A, B, C$  (με την δομή του προηγούμενου Λήμματος) οτε  $K(z) = C(zI - A)^{-1}B$ .  $\square$

Ορισμός : Εστω  $\hat{G}(z)$  ρητή κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Μια πραγματοποίηση  $(A, B, C, D)$  της  $\hat{G}(z)$  είναι "ελάχιστη" αν η διάσταση του πινακα  $A$ ,  $\dim(A)$ , είναι η μικρότερη δυνατή από όλα τα πραγματοποιήσεων της  $\hat{G}(z)$ .

Εστω ακολουθία διανυσμάτων εισόδου  
(...  $u(-2), u(-1), u(0), 0, 0, \dots$ )

και εστω οτι το σύστημα είναι σε ηρεμία σε χρόνο  $k = -\infty$ , δηλ  $\lim_{k \rightarrow -\infty} x(k) = \underline{0}$ . Εστω οτι

το σύστημα είναι γραμμικό, απειροστό, χρονικά αναλλοίωτο με ακολουθία Markov  $\{0, G_1, G_2, G_3, \dots\}$ . Τότε για  $t \geq 1$ ,

$$\underline{y}_t = G_1 \underline{u}_{t-1} + G_2 \underline{u}_{t-2} + G_3 \underline{u}_{t-3} + \dots + G_k \underline{u}_{t-k} + \dots$$

Επομένως :

$$t=1 : \underline{y}_1 = G_1 \underline{u}_0 + G_2 \underline{u}_{-1} + G_3 \underline{u}_{-2} + \dots$$

$$t=2 : \underline{y}_2 = G_1 \underline{u}_1 + G_2 \underline{u}_0 + G_3 \underline{u}_{-1} + \dots$$

$$t=3 : \underline{y}_3 = G_1 \underline{u}_2 + G_2 \underline{u}_1 + G_3 \underline{u}_0 + \dots$$

και γενικά :

H (πίνακας "block-Hankel")

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \dots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \dots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{u}_{-1} \\ \underline{u}_{-2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{δηλ. } \underline{y}_n = \sum_{i=0}^{\infty} G_{n+i} \underline{u}_{-i} \quad (n \geq 1).$$

(Παρατηρήστε ότι αν η ακολουθία  $(\underline{u}_{-i})$  έχει πεπερασμένο αριθμό από μη-μηδενικούς όρους (δεν υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης).

Έστω  $\mathcal{R}^m$  ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών  $(u) = (\underline{u}_0, \underline{u}_{-1}, \underline{u}_{-2}, \dots)$  όπου  $\underline{u}_i \in \mathcal{R}^m$  ( $i \leq 0$ ), και  $\mathcal{R}^p$  ο χώρος των ακολουθιών  $(y) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ ,

όπου  $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^p$  ( $i \geq 1$ ). Έστω  $\mathcal{L}_0^m$  ο υπέρχωρος των  $\mathcal{L}^m$  των ακολουθιών "πεπερασμένης υποστήριξης", (34)

δηλ.  $(u) \in \mathcal{L}_0^m$  αν  $\underline{u}_k \neq \underline{0}$  για πεπερασμένο αριθμό όρων  $k$ .

Έστω  $V$  ο γραμμικός μετασχηματισμός μετατόπισης:

$$V: \mathcal{L}^p \rightarrow \mathcal{L}^p, \quad V(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3, \dots) = (\underline{y}_2, \underline{y}_3, \dots).$$

Παρατηρούμε ότι  $V\mathcal{L}_0^p \subseteq \mathcal{L}_0^p$  (δηλ. ο  $\mathcal{L}_0^p$  αν είναι  $V$ -αναλλοίωτος). Έστω  $H: \mathcal{L}_0^m \rightarrow \mathcal{L}^p$  ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα μορφής block-Hankel:

$$H = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \dots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \dots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

δηλ. αν  $\underline{u} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots) \in \mathcal{L}_0^m$ , η ακολουθία  $(y) = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3, \dots) = H(\underline{u})$ ,  $\underline{y}_i = \sum_{j=1}^{\infty} G_{i+j-1} \underline{u}_{-j+1}$  ( $i \geq 1$ ), δηλ. με τους συνδυασμούς κανόνες πολλαπλασιασμού πίνακα - διανύσματος:

$$\text{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty} = H \text{vec}(\underline{u}_{-i})_{i=0}^{\infty}$$

όπου  $\text{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty} = [\underline{y}_1^T \ \underline{y}_2^T \ \underline{y}_3^T \ \dots]^T$ . Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω  $\Sigma$  αυτιάκό, γραμμικό, αρνητικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με ακολουθία Markov

$$\{G_0, G_1, G_2, \dots\}, G_i \in \mathbb{R}^{p \times m}, i \geq 0. \text{ Έστω}$$

$H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  ο αντίστοιχος γραμμικός μετασχηματισμός

με block-Hankel πίνακα όπως ορίστηκε παραπάνω

και  $\mathcal{X} = \mathcal{R}(H)$  η εικόνα του  $H$ . Έστω  $V$  ο

μετασχηματισμός μετατόπισης στον  $\mathbb{R}^p$ . Τότε, το  $\Sigma$

έχει ελάχιστη πραγματοποιησιμότητα διάστασης  $k = \dim(\mathcal{X})$ .

Αν  $k < \infty$ , τότε μια ελάχιστη πραγματοποιησιμότητα του  $\Sigma$

είναι η  $\Theta = (A, B, C, D)$ , όπου:

$$A = V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

$$B = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \end{bmatrix} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{X}$$

$$C = [I \ 0 \ 0 \ \dots] |_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$D = G_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Απόδειξη: Έστω  $\tilde{\Theta} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  πραγματοποιησιμότητα

του  $\Sigma$  με  $\dim(\tilde{A}) = n$ . Ορίσουμε

$$\tilde{\Lambda} = [ \tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \dots ] : \mathcal{R}_0^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$$

(όπου οι ακολουθίες  $(u) \in \mathcal{R}^m$  και  $(y) \in \mathcal{R}^p$  γράφονται ως διανύσματα στήλης). Παρατηρούμε ότι ο  $\tilde{\Lambda}$  είναι καλά-ορισμένος εφόσον οι ακολουθίες  $(u) \in \mathcal{R}_0^m$  έχουν πεπερασμένη υποστήριξη.

Εφόσον  $\tilde{\Theta}$  είναι πραγματοποιήσιμη τω  $\Sigma$ , η  $j$ -παράμετρος Markov γράφεται ως  $G_j = \tilde{C}\tilde{A}^{j-1}\tilde{B}$  ( $j \geq 1$ ) και  $G_0 = D$ . Άρα, ~~αν υπάρχει πραγματοποίηση, τότε~~

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \dots \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} & \dots \\ \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^4\tilde{B} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} [ \tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \dots ] = \tilde{\Gamma}\tilde{\Lambda}$$

και επομενως  $k = \dim \mathcal{R}(H) \leq \dim(\lambda) \leq n$ .

Αρα, αν υπαρχει πραγματοποιημα, τιτε  $\dim \mathcal{R}(H) < \infty$  και η διασταση της ειναι περαταχιστον  $k = \dim \mathcal{R}(H)$ .

Για την ολοκληρωση της αποδειξης αρκει να δειξωμε οτι  $\theta = (A, B, C, D)$  οπως ορισθηκε στην διατιπωση του θεωρηματος ειναι πραγματοποιημα του  $\Sigma$ . Έστω οτι  $\mathcal{X} = \mathcal{R}(H)$ ,  $\dim(\mathcal{X}) < \infty$ .

Έχουμε

$$VH = \begin{bmatrix} G_2 & G_3 & \dots \\ G_3 & G_4 & \dots \\ G_4 & G_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} : \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^p$$

και επομενως

$$V\mathcal{X} = V\mathcal{R}(H) = \mathcal{R}(VH) \subseteq \mathcal{R}(H) = \mathcal{X}$$

δηλ  $V\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$  και ο χωρος  $\mathcal{X}$  ειναι  $V$ -αναλλοιωτος. Επομενως ο  $A = V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  ειναι καλα ορισμενος. Επισης, αφο  $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(H)$ ,

$$AB = V|_{\mathcal{X}} B = VB = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$



και επαγωγικά:

$$A^{j-1} B = V^{j-1} B = \begin{bmatrix} G_j \\ G_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad j \geq 1$$

Επομένως  $G_j = CA^{j-1} B = [I \ 0 \ 0 \ \dots] A^{j-1} B,$

$j \geq 1,$  και άρα  $\Theta = (A, B, C, D)$  είναι πραγματοποιήσιμη □

τω  $\Sigma.$

## Ισοδύναμα Συστήματα

Έστω γραμμικό, αδιατάξιτο, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα δ.α.

$$\Sigma(A, B, C, D) : \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k$$

( $k \geq 0$ ). Ορίσουμε νέο διάνυσμα κατάστασης

$$\underline{z}_k = Q^{-1} \underline{x}_k \Leftrightarrow Q \underline{z}_k = \underline{x}_k, \quad Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(Q) \neq 0$$

Τότε:

$$\underline{z}_{k+1} = Q^{-1} \underline{x}_{k+1} = Q^{-1} (A \underline{x}_k + B \underline{u}_k) = Q^{-1} A Q \underline{z}_k + Q^{-1} B \underline{u}_k$$

και  $\underline{y}_k = C Q \underline{z}_k + D \underline{u}_k$  και επομένως τα

δύο συστήματα

$$\Sigma(A, B, C, D) \simeq \Sigma(Q^{-1} A Q, Q^{-1} B, C Q, D)$$

είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση εισόδου-εξόδου.

Ο πίνακας  $Q$  ορίζει μετασχηματισμό "ισοδυναμίας".

Παρατηρούμε ότι κάτω από μετασχηματισμό ισοδυναμίας:

(i) Το φάσμα του πίνακα  $A$  (και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο) είναι αναλλοίωτα:

$$\sigma(A) = \sigma(Q^{-1} A Q)$$

(μετασχηματισμός ομοιότητας).

(ii) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(z) &= CQ (zI - Q^{-1}AQ)^{-1} Q^{-1}B + D \\ &= CQ [Q^{-1}(zI - A)Q]^{-1} Q^{-1}B + D \\ &= CQ \cdot Q^{-1} (zI - A)^{-1} Q \cdot Q^{-1}B + D \\ &= C (zI - A)^{-1} B + D = \hat{G}(z) \end{aligned}$$

(iii) Η ακολουθία Markov είναι αναλλοίωτη. Στις αρχικές συντεταγμένες:

$$G_0 = D, \quad G_i = CA^{i-1}B \quad (i \geq 1)$$

Στις νέες συντεταγμένες επίσης:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0 &= D, \quad \tilde{G}_i = CQ(Q^{-1}AQ)^{i-1}Q^{-1}B \\ &= CQ Q^{-1}A^{i-1}Q Q^{-1}B \\ &= CA^{i-1}B = G_i \quad (i \geq 1) \end{aligned}$$

Οι σχέσεις είναι προφανείς αφού η σχέση εισόδου-εξόδου είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας που ουσιαστικά αντιστοιχούν σε "αλλαγή συντεταγμένων" του διανύσματος κατάστασης.

Παρατήρηση: Από την ισοδυναμία συστημάτων καταστάσεως είναι προφανές ότι η πραγματοποίηση συστήματος από την συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι μοναδική.

Παρατήρηση: Μια δάστηρη πηγή μη μοναδικότητας στην επίλυση του προβλήματος πραγματοποίησης προκύπτει υπό τις ίδιεςτες ελεξιμότητας και παρατηρησιμότητας που ορίζεται στην συνέχεια.

Έστω σύστημα με πραγματοποίηση

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u_k$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

που ταυτίζεται με την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:  $\xi_{k+1} = \xi_k + u_k$ ,  $y_k = \xi_k$ . Οι ακολουθίες Markov είναι επίσης ίδιες. Για το σύστημα στην πρώτη (μη-ελάχιστη) πραγματοποίηση έχουμε  $G(0) = 0$  και

$$G_i = CA^{i-1}B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (i \geq 1)$$

Για το σύστημα στην δαίτηρη (ελαχιστη) πραγματοποιηση

$$\frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1} (1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

και επομενως εχουμε πάλι  $G_0 = 0$  και  $G_i = 1 \quad (i \geq 1)$ ,

### Διακριτοποίηση συστημάτων συνεχούς χρόνου

Πολλές φορές τα μοντέλα διακριτών συστημάτων προκύπτουν από την διακριτοποίηση συστημάτων συνεχούς χρόνου μέσω ψηφιακού υπολογιστή.

Έστω γραμμικό, αιτιατό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\Sigma: \underline{x}'(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = C \underline{x}(t) + D \underline{u}(t)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  και  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

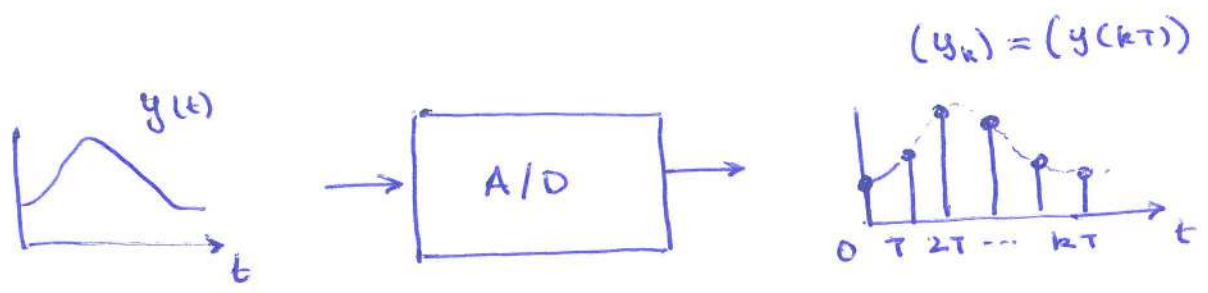
Για την διακριτοποίηση του  $\Sigma$  εφαρμόζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

(α) Εφαρμόζουμε περιοδική δειγματοληψία της συνάρτησης ("σήματος") συνεχούς χρόνου  $y(t)$  με περίοδο δειγματοληψίας  $T$ , από την οποία προκύπτει συνάρτηση διακριτού χρόνου (ακολουθία) εξόδου

$$(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (y(kT))_{k \in \mathbb{N}_0}$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι ο πρώτος όρος της ακολουθίας αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή  $t = kT = 0$  (δείκτης  $k=0$ ). Ηλεκτρονικά η διαδικασία υλοποιείται μέσω Αναλογικού/Ψηφιακού μετατροπέα (Analogue/Digital Converter) στην κάρτα DAQ ψηφιακού υπολογιστή.

Διαγραμματικά:

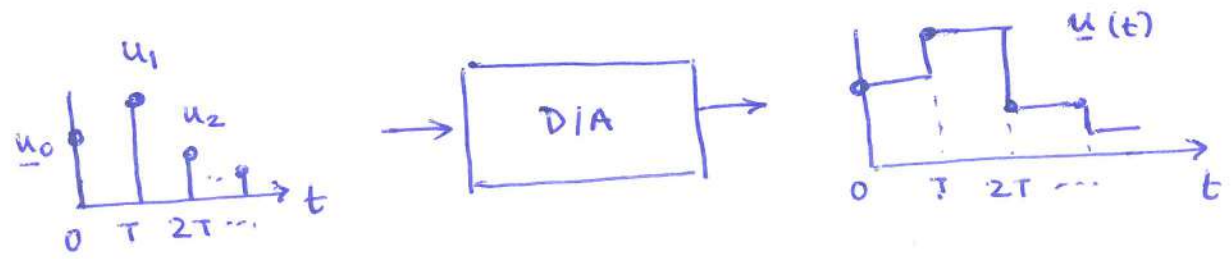


(β) Έστω  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  ψηφιακό σήμα (ακολουθία δειγμάτων διακριτού χρόνου) που επιθυμούμε να εφαρμόσουμε περιοδικά στην είσοδο του ισοδύναμου διακριτού ~~χρ~~ συστήματος διακριτού χρόνου (μέ την ίδια περίοδο  $T$  και σε συγχρονισμό με τις χρονικές στιγμές στις οποίες ορίζεται η δειγματοληψία του σήματος εξόδου). Για να εφαρμόσουμε το σήμα

αυτό στην είσοδο του συστήματος συνεχούς χρόνου ( $\Sigma$ ) πρέπει να μετατρέψουμε την ακολουθία (ψηφιακό σήμα) σε σήμα συνεχούς χρόνου (αναλογικό σήμα). Συνήθως ορίζουμε την συνάρτηση εισόδου (σήμα εισόδου) ως:

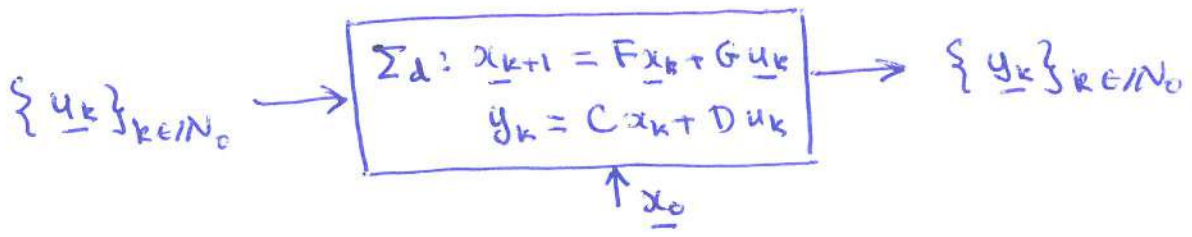
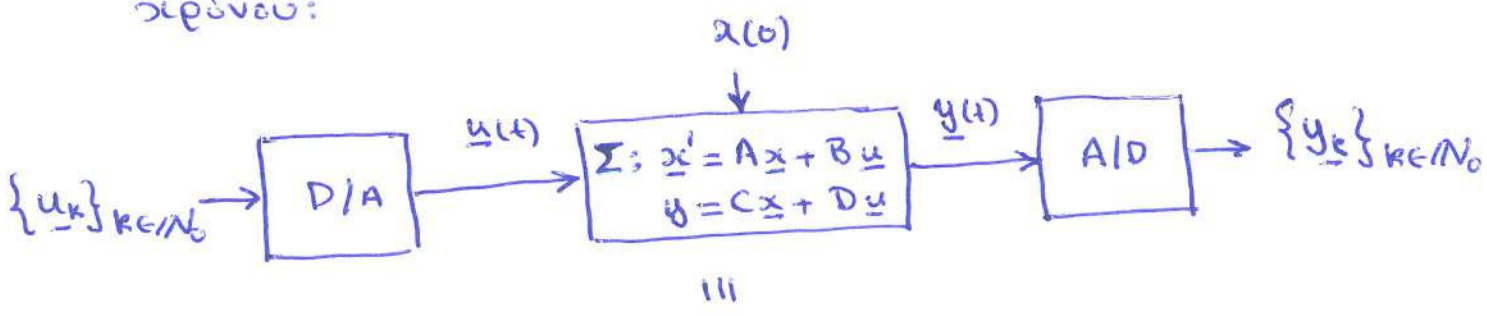
$$u(t) = u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Ηλεκτρονικά η διαδικασία αυτή υλοποιείται μέσω Ψηφιακού / Αναλογικού μετατροπέα τύπου ΖΟΗ (zero-order-hold). Σχηματικά:



Παρατηρούμε ότι η  $u(t)$  είναι τμηματικά συνεχής,

Το σύστημα  $\Sigma$  με τους δύο μετατροπείς στην είσοδο και την έξοδο είναι ισοδύναμο με σύστημα διακριτού χρόνου:



Το ισοδύναμο σύστημα (ως προς την απεικόνιση  $\{\underline{u}_k\} \rightarrow \{\underline{y}_k\}$ )

προκύπτει από τους παρακάτω υπολογισμούς:

Η απόκριση του συστήματος  $\Sigma$  είναι:

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = C e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau + D \underline{u}(t)$$

Έστω  $\underline{x}_k = \underline{x}(kT)$ ,  $k \geq 0$ , και  $\underline{u}_k = \underline{u}(kT)$ ,  $k \geq 0$ , όπου

$T$  η περίοδος δαγματοληψίας. Τότε:

$$\underline{x}_{k+1} = e^{A(k+1)T} \underline{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (*)$$

Επίσης

$$\underline{x}_k = e^{AkT} \underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow e^{AT} \underline{x}_k = e^{A(k+1)T} \underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT+T-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (**)$$

Αφαιρώντας την (\*\*\*) από την (\*),

$$\underline{x}_{k+1} - e^{AT} \underline{x}_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau.$$

Με την αλλαγή μεταβλητών

$$\lambda = kT + T - \tau \Rightarrow d\lambda = -d\tau$$

$$\tau = kT \Rightarrow \lambda = T, \quad \tau = (k+1)T \Rightarrow \lambda = 0$$

Έχουμε:



$$\underline{x}_{k+1} = e^{AT} \underline{x}_k + \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B \underline{u}_k$$

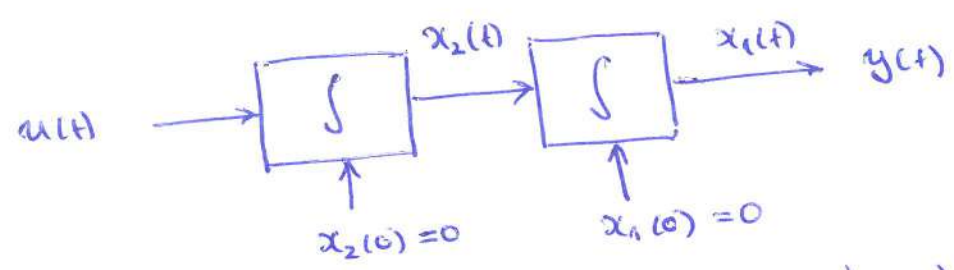
$$\underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k$$

Εφόσον  $u(t) = u_k$  στο σύστημα  $kT \leq t < (k+1)T$ .

Επομένως το ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι:

$$\Sigma_d (F, G, C, D), \quad F = e^{AT} \text{ και } G = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B$$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα συνεχούς χρόνου που αντιστοιχεί σε "διπλό ολοκλήρωσή", δηλ.



Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι:

$$x_2' = u \quad \text{και} \quad x_1' = x_2$$

Επίσης έχουμε  $y = x_1$  και επομένως:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u$$

Έστω ότι το σύστημα διακριτοποιείται με περίοδο δειγματοληψίας T. Τότε:

$$F = e^{AT}, \quad G = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B, \quad e^{A\lambda} = I + A\lambda + \frac{A^2\lambda^2}{2!} + \dots$$

Στην περίπτωση αυτή ο  $A$  είναι μηδενισύνοδος και

$$A^k = 0 \text{ για } k \geq 2. \text{ Επομένως}$$

$$e^{A\lambda} = I + A\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{AT} = F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$G = \int_0^T e^{A\lambda} B d\lambda = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda = \int_0^T \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda$$

$$= \begin{bmatrix} \left[ \frac{\lambda^2}{2} \right]_0^T \\ \left[ \lambda \right]_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Το ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι  $\underline{x}_{k+1} = F\underline{x}_k + G\underline{u}_k$

ή,

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_k \end{aligned} \right\} \Sigma_d$$

Ισοδύναμα:

$$\Sigma_d: \quad x_{k+1}^1 = x_k^1 + T x_k^2 + \frac{T^2}{2} u_k, \quad x_{k+1}^2 = x_k^2 + T u_k, \quad y_k = x_k^1$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{G}_d(z) = C(zI - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

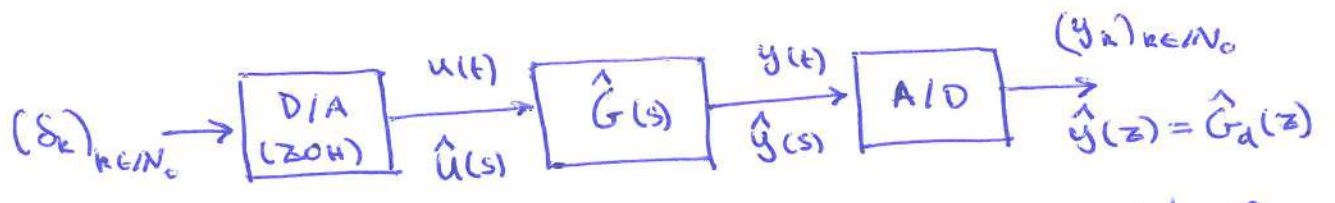
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{T}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\frac{T^2}{2}}{z-1} + \frac{T^2}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2} \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

□

Γενικά, έστω  ~~$\hat{G}(s)$~~   $\hat{G}(s)$  η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος συνεχούς χρόνου (μιας εισόδου και μιας εξόδου για απλοποίηση). Ποια είναι η ~~ισοδύναμη~~ η ~~ισοδύναμη~~ η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς  $G_d(z)$  του διακριτού συστήματος αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι  $T$ ;

Από την προηγούμενη ανάλυση αν το σύστημα συνεχούς χρόνου  $\Sigma$  είναι σύστημα καταστάσεως χώρου, το ίδιο ισχύει για το ισοδύναμο διακριτό σύστημα. Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου διακριτού συστήματος,  $\hat{G}_d(z)$ , είναι ο μετασχηματισμός  $Z$  της κροσσικής του απόκρισης. Εφαρμόζουμε ακολουθία κροσσών  $(\delta_k) = (1, 0, 0, \dots)$  στην είσοδο του συστήματος;



Η συνάρτηση  $u(t)$  στην είσοδο του ψηφιακού/αναλογικού (D/A) μετατροπέα τύπου ZOH είναι

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

Επομένως  $\hat{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$  και  $\hat{y}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{s} - e^{-sT} \frac{\hat{G}(s)}{s}$

Έστω  $\omega(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)$ . Τότε

$$y(t) = \omega(t) - \omega(t-T) \quad t \geq 0$$

και επομένως

$$(y_k) = (y(kT)) = (\omega_k - \omega_{k-1})$$

όπου  $(\omega_k) = (S_T \omega)(t) = (S_T(\mathcal{L}^{-1}(\hat{\omega}(z))))$

και  $S_T$  ο τελεστής Περιοδικώς Σειριακού ληψίας στις χρονικές

στιγμές  $(kT)_{k \geq 0} = (0, T, 2T, \dots)$ . Εφόσον  $\hat{y}(z) =$

$$= (1 - z^{-1}) \hat{\omega}(z) \text{ έχουμε}$$

$$\hat{G}_d(z) = \hat{y}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{\omega_k\}$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{S_T(\omega(t))\}$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(\hat{\omega}(s)))\}$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right))\}$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{S_T\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)\right)\right\}$$

Παράδειγμα: Συνεχίζοντας το παράδειγμα του διπλού ολοκληρώσει έχουμε

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(1/s^2))\right\}$$

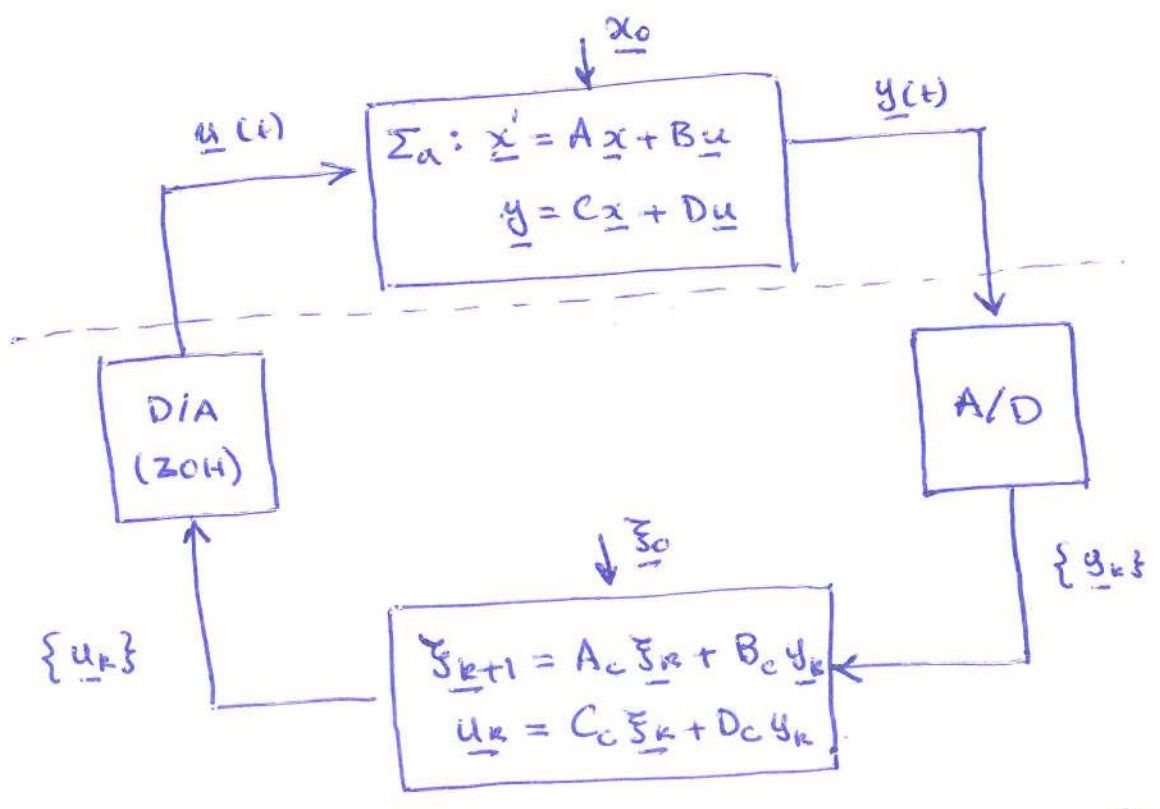
$$\Rightarrow \hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{S_T\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{(kT)^2\}$$

$$= \frac{T^2(z-1)}{2z} \mathcal{Z}\{k^2\} = \frac{T^2}{2} \frac{z-1}{z} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

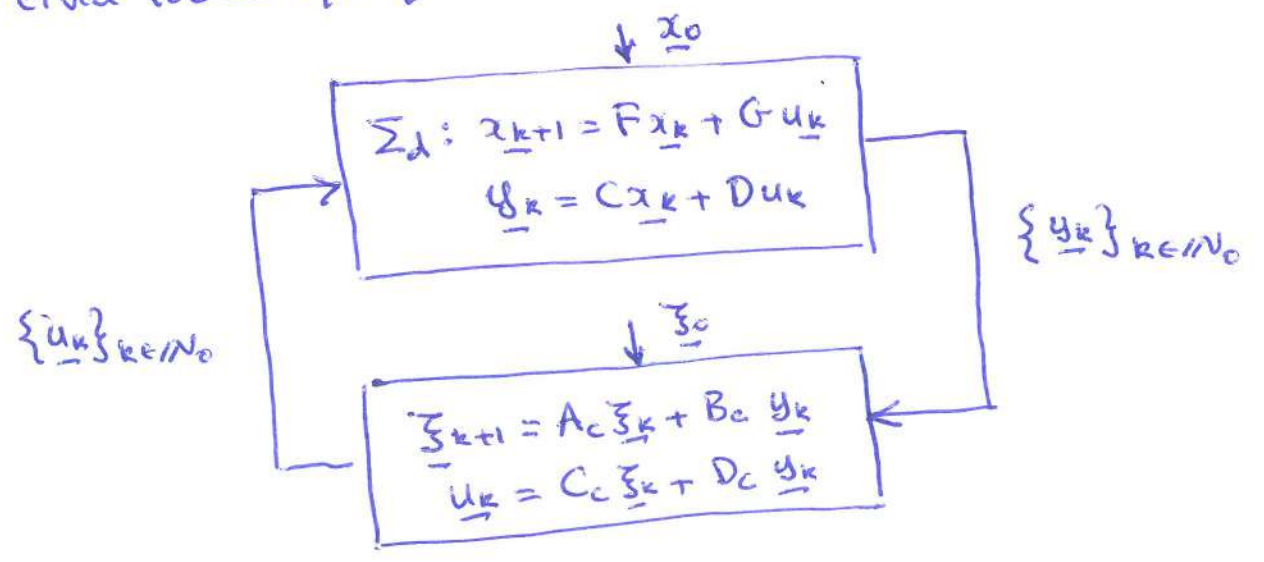
$$= \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^3} \text{ όπως προηγουμένως.}$$

# Συστήματα ανάδρασης

Η συνδεσμολογία συστήματος ψηφιακής ανάδρασης περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα.



Το  $\Sigma_a$  είναι το σύστημα συνεχούς χρόνου που ελέγχεται μέσω ψηφιακού αντιστάθμιστή (ρυθμιστή) που υλοποιείται (μαζί με τους μετατροπείς D/A και A/D) εντός ψηφιακού υπολογιστή. Από την προηγούμενη ανάλυση το σύστημα είναι ισοδύναμο με:



Ο ψηφιακός αντισταθμιστής είναι κατ' ουσίαν ψηφιακός αλγόριθμος που υλοποιείται εντός του ψηφιακού υπολογιστή.  
 Ο στόχος της σχεδίασης είναι η μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικών του συνολικού συστήματος ανάδρασης (σύστημα "κλειστού βρόχου") σύμφωνα με τις επιδιώξεις μας που περιλαμβάνουν σταθεροποίηση ασταθών συστήματος, απόριψη διαταρακών, μικρή εισόδου σε σφάλματα μοντέλου, κλπ. Το ισοδύναμο διακριτό σύστημα υπό έλεγχο ("plant") έχει παραμέτρους

$$F = e^{AT}, \quad G = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B$$

όπου  $T$  η περίοδος δειγματοληψίας. Οι παράμετροι του ψηφιακού αντισταθμιστή ( $A_c, B_c, C_c, D_c$ ) επιλέγονται από τον σχεδιαστή του συστήματος ώστε να επιτευχθούν οι παραπάνω στόχοι σχεδίασης.

Το ισοδύναμο σύστημα "κλειστού βρόχου" υπολογίζεται ως εξής. Από τις εξισώσεις των δύο συστημάτων έχουμε:

$$\underline{y}_k = C \underline{x}_k + D (C_c \underline{\xi}_k + D_c y_k)$$

$$\Rightarrow (I - DD_c) \underline{y}_k = C \underline{x}_k + DC_c \underline{\xi}_k$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \underbrace{(I - DD_c)^{-1} C}_{:= L_1} \underline{x}_k + \underbrace{(I - DD_c)^{-1} DC_c}_{L_1} \underline{\xi}_k$$

υπό την προϋπόθεση ότι  $\det(L_1) = \det(I - D D_c) \neq 0$   
(οπότε λέμε ότι το σύστημα ανδράσας είναι καλά-  
τοποθετημένο - well posed). Επίσης

$$\underline{u}_k = C_c \underline{\xi}_k + D_c \underline{y}_k = C_c \underline{\xi}_k + D_c (C \underline{x}_k + D \underline{u}_k)$$

$$\Rightarrow (I - D_c D) \underline{u}_k = C_c \underline{\xi}_k + D_c C \underline{x}_k$$

$$\Rightarrow \underline{u}_k = \underbrace{(I - D_c D)^{-1}}_{:= L_2} D_c C \underline{x}_k + \underbrace{(I - D_c D)^{-1} C_c}_{L_2} \underline{\xi}_k$$

Άσκηση: Αξιζετε ότι  $\det(L_1) \neq 0 \Leftrightarrow \det(L_2) \neq 0$   
και ότι  $(I - D_c D)^{-1} D_c = D_c (I - D D_c)^{-1}$ . □

Επίσης,

$$\underline{x}_{k+1} = F \underline{x}_k + G [L_2 C_c \underline{\xi}_k + L_2 D_c C \underline{x}_k]$$

$$\underline{\xi}_{k+1} = A_c \underline{\xi}_k + B_c [L_1 C \underline{x}_k + L_1 D C_c \underline{\xi}_k]$$

Ισοδύναμο:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{bmatrix}}_{\underline{\omega}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F + G L_2 D_c C & G L_2 C_c \\ B_c L_1 C & A_c + B_c L_1 D C_c \end{bmatrix}}_{A_{ce}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{bmatrix}}_{\underline{\omega}_k}$$

που είναι της μορφής:

$$\underline{\omega}_{k+1} = A_{ce} \underline{\omega}_k \Rightarrow \underline{\omega}_k = A_{ce}^k \underline{\omega}_0 \quad (k \geq 0).$$

Το γενικό πρόβλημα ελέγχου αφορά την επιλογή  
των παραμέτρων τω αντιστάθμιση ( $A_c, B_c, C_c, D_c$ )  
ώστε το σύστημα κλειστά βρόχου  $\underline{\omega}_{k+1} = A_{ce} \underline{\omega}_k$   
να έχει τις επιθυμητές ιδιοτιμές.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση  $D=0, D_c=0$   
( $\Rightarrow L_1=I$  και  $L_2=I$ ) οι εξισώσεις απλοποιούνται  
και έχουμε

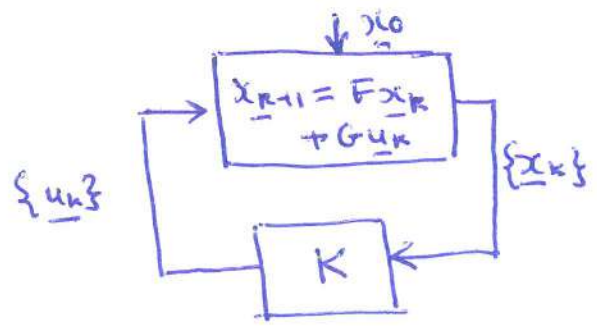
$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & G C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{A_{ce}} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_{ce}$  γράφεται:

$$A_{ce} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$$
$$:= F_a + G_a \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} C_a$$

Ανάθεση καταστάσεων: ~~Η~~ <sup>Στην</sup> προηγούμενη (γενική)

περίπτωση το διάνυσμα κατάστασης  $\underline{x}_k$  δεν είναι προσβάσιμο (μετρησιμο) και η είσοδος του αντισταθμιστή είναι η έξοδος του συστήματος. Ο αντισταθμιστής είναι επίσης δυναμικό σύστημα. Στην ειδική περίπτωση που το διάνυσμα κατάστασης  $\underline{x}_k$  είναι προσβάσιμο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σταθερό αντισταθμιστή  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , δηλ. η έξοδος του αντισταθμιστή είναι  $\underline{u}_k = K \underline{x}_k$ . Στην περίπτωση αυτή το σύστημα "κλειστό βρόχου" είναι:

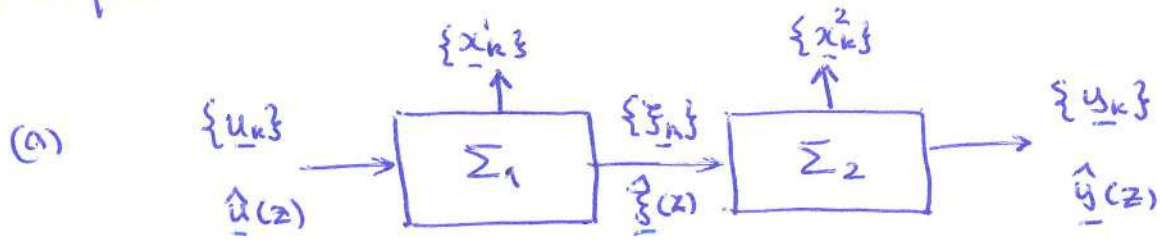


$$\underline{x}_{k+1} = F \underline{x}_k + G (K \underline{x}_k)$$
$$= \underbrace{(F + GK)}_{A_c} \underline{x}_k$$

και το πρόβλημα ανάγεται στην επιλογή του  $K$  ώστε ο πίνακας  $A_c$  να έχει τις επιθυμητές ιδιότητες



Στην συνέχεια αναλύονται δύο επιπλέον συνδυασμολογίες συστημάτων, σε σειρά και σε παράλληλα.



Έστω  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  σε σειρά,  $\Sigma_i (A_i, B_i, C_i, D_i)$   $i=1,2$  και συναρτήσεις μεταφοράς  $\hat{G}_1(z)$  και  $\hat{G}_2(z)$  αντίστοιχα. Οι εξισώσεις καταστάσεως αόρων δράζονται:

$$\Sigma_1: \underline{x}_{k+1}^1 = A_1 \underline{x}_k^1 + B_1 \underline{u}_k^{\uparrow}, \quad \underline{\xi}_k = C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k^{\uparrow}$$

$$\Sigma_2: \underline{x}_{k+1}^2 = A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 \underline{\xi}_k, \quad \underline{y}_k = C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 \underline{\xi}_k$$

Επομένως:

$$\underline{x}_{k+1}^2 = A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 (C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k^{\uparrow}) =$$

$$= \cancel{A_2 \underline{x}_k^2} + \cancel{B_2 C_1} \underline{x}_k^1 + B_2 D_1 \underline{u}_k^{\uparrow}$$

$$= B_2 C_1 \underline{x}_k^1 + A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 D_1 \underline{u}_k^{\uparrow}$$

$$\underline{y}_k = C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 (C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k^{\uparrow})$$

$$= D_2 C_1 \underline{x}_k^1 + C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 D_1 \underline{u}_k^{\uparrow}$$

Το σύστημα καταστάσεων αόρων τω  $\Sigma = \Sigma_1 \Sigma_2$

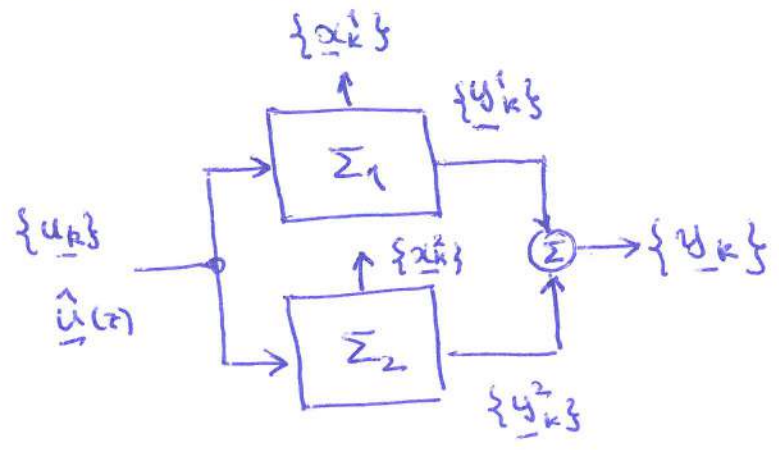
$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1}^1 \\ \underline{x}_{k+1}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 D_1 \end{bmatrix} \underline{u}_k \end{aligned} \right\} \Sigma$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του  $\Sigma$  είναι:

$$\hat{y}(z) = \hat{G}_2(z) \hat{y}_1(z) = \hat{G}_2(z) \hat{G}_1(z) \hat{u}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \hat{G}(z) \hat{u}(z) \quad , \quad \hat{G}(z) = \hat{G}_2(z) \hat{G}_1(z)$$

(β)



Εξίσωση καταστάσεως χώρου  $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$

$$x_{k+1}^1 = A_1 x_k^1 + B_1 u_k \quad , \quad y_k^1 = C_1 x_k^1 + D_1 u_k$$

$$x_{k+1}^2 = A_2 x_k^2 + B_2 u_k \quad , \quad y_k^2 = C_2 x_k^2 + D_2 u_k$$

$$y_k = y_k^1 + y_k^2 = ~~(C_1 x_k^1 + C_2 x_k^2)~~ C_1 x_k^1 + C_2 x_k^2 + (D_1 + D_2) u_k$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u_k$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του  $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ :

$$\hat{y}(z) = \hat{y}_1(z) + \hat{y}_2(z) = \hat{G}_1(z) \hat{u}(z) + \hat{G}_2(z) \hat{u}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = (\hat{G}_1(z) + \hat{G}_2(z)) \hat{u}(z) =: \hat{G}(z) \hat{u}(z)$$

$$\text{όπου } \hat{G}(z) = \hat{G}_1(z) + \hat{G}_2(z)$$

Παράδειγμα :

$$\text{Έστω : } \left. \begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_F \underline{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G u_k \\ y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underline{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u_k \end{aligned} \right\} \Sigma_1(F, G, C, D)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{z}_{k+1} &= \underline{z}_k + y_k \\ u_k &= \underline{z}_k \end{aligned} \right\} \Sigma_2(A_c, B_c, C_c, D_c)$$

$A_c = B_c = C_c = 1$   
 $D_c = 0$

Τότε :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & G C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{A_{ce}} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{z}_k \end{bmatrix}$$

και  $A_{ce} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

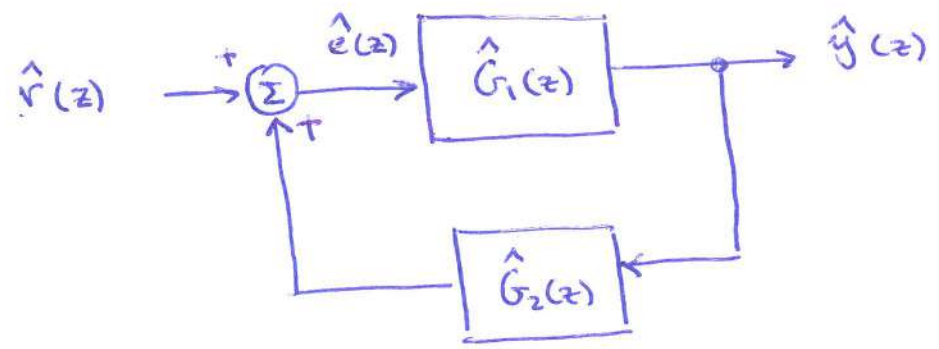
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A_{ce}$  :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det(\lambda I_3 - A_{ce}) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3 - 1 = (\lambda-2) [(\lambda-1)^2 + (\lambda-1) + 1] \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda + 1) \end{aligned}$$

με ιδιοτιμές :  $\sigma(A_{ce}) = \{2, \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ . Μία ιδιοτιμή είναι έξω από τον μοναδιαίο κύκλο (και δύο επί του μοναδιαίου κύκλου), άρα το σύστημα κλασικά βρόχων είναι ασταθές.

Ορίστε τις είσοδο και έξοδο από σύστημα αντιστροφής

ένας δείχνει από τα άλλα:



έχουμε:  $\hat{y}(z) = \hat{G}_1(z) \hat{e}(z) = \hat{G}_1(z) [\hat{r}(z) + \hat{G}_2(z)]$

$\Rightarrow (1 - \hat{G}_1(z) \hat{G}_2(z)) \hat{y}(z) = \hat{G}_1(z) \hat{r}(z)$

$\Rightarrow \frac{\hat{y}(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{\hat{G}_1(z)}{1 - \hat{G}_1(z) \hat{G}_2(z)} =: \hat{G}(z)$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση:

$\hat{G}_1(z) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{(z-1)^2}$

$\hat{G}_2(z) = \frac{1}{z-1}$  και επομένως:

$\hat{G}(z) = \frac{\hat{G}_1(z)}{1 - \hat{G}_1(z) \hat{G}_2(z)} = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{1 - \frac{1}{(z-1)^3}} = \frac{z-1}{(z-1)^3 - 1}$

$= \frac{z-1}{(z-2)(z^2 - z + 1)}$

Απόκριση συστημάτων καταστάσεως χώρου

Έστω το σύστημα:  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k$

με λύση:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j, \quad (k \geq 0)$$

$$\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B \underline{u}_j + D \underline{u}_k$$

Αν ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι απλός δομής (δηλ. κάθε ιδιοτιμή έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα), τότε διαγωνιοποιείται. Έστω  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  οι ιδιοτιμές του  $A$  και  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  τα αντιστοίχα ιδιοδιανύσματα. Αν  $P = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \dots \ \underline{v}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , τότε  $\det(P) \neq 0$  και

$$P^{-1} A P =: \Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$$

$$\Rightarrow P^{-1} A^k P = \Lambda^k = \text{diag} \{ \lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k \}$$

Επομένως:

$$\underline{x}_k = P \Lambda^k P^{-1} \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} P \Lambda^{k-j-1} P^{-1} B \underline{u}_j$$

Έστω  $P^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1^T \\ \underline{z}_2^T \\ \vdots \\ \underline{z}_n^T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{z}_1^T \\ \underline{z}_2^T \\ \vdots \\ \underline{z}_n^T \end{bmatrix} [\underline{v}_1 \ \dots \ \underline{v}_n] = I_n$

Τότε :

$$\underline{x}_k = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \dots \ \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^T \\ \tilde{v}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{v}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}_0$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \dots \ \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-j-1} & & & \\ & \lambda_2^{k-j-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{k-j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^T \\ \tilde{v}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{v}_n^T \end{bmatrix} \underline{B} \underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \langle \tilde{v}_i, \underline{x}_0 \rangle \underline{v}_i + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{k-j-1} \langle \tilde{v}_i, \underline{B} \underline{u}_j \rangle \underline{v}_i$$

όπου  $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = \underline{\alpha}^T \underline{\beta}$ . Η έκφραση αυτή για το  $\underline{x}_k$  αναφέρεται ως "modal decomposition",

Στην περίπτωση που ο  $A$  δώ είναι απλός δομής (μία τωλδαχιστον ιδιοτιμή εκά ωσηηρά μεγαλύτερη αλγεβρική από γεωμετρική πολλαπλότητα), τότε το ααρ. πολυώνυμο γράφεται ως:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} (\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \dots (\lambda - \lambda_e)^{\tau_e}$$

όπου  $\lambda_i \neq \lambda_j$  για  $i \neq j$ . Ορίζουμε

$$d_i = \dim(\mathcal{N}_r(\lambda_i I - A)) := n - r_i, \quad r_i = \text{Rank}[\lambda_i I - A].$$

Ο ακέραιος  $\tau_i$  είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  και ο ακέραιος  $d_i$  η γεωμετρική πολ/τα της  $\lambda_i$ . Έχουμε:  $1 \leq d_i \leq \tau_i$ . Εφόσον ο πίνακας είναι μη-απλός δομής μία από τις (τωλδαχιστον) από τις ανισότητες  $d_i \leq \tau_i$  είναι ωσηηρή (<). Για κάθε ιδιοτιμή

$\lambda_i \in \mathbb{C}$  ορίζουμε  $d_i$  ιδιοδιανύσματα και  $\pi_i - d_i$  γενικωμένα ιδιοδιανύσματα. Η μορφή Jordan του πίνακα  $A$  είναι:

$$J = \text{bdiag} \{ J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e) \}$$

όπου

$$J_i(\lambda_i) = \text{bdiag} \{ J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots, J_{i, \ell_i}(\lambda_i) \}$$

Οι διαστάσεις  $\dim [J_{ij}(\lambda_i)]$  καθορίζονται ως εξής:

Θέτουμε:

$$r_{i1} = \text{Rank}(\lambda_i I - A), \quad r_{i2} = \text{Rank}(\lambda_i I - A)^2, \quad \dots$$

$$r_{ij} = \text{Rank}(\lambda_i I - A)^j$$

Έχουμε  $r_{ij} \geq r_{i,j+1}$ . Έστω  $\ell_i$  ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο:

$$r_{i1} > r_{i2} > \dots > r_{i, \ell_i} = r_{i, \ell_i + 1}$$

Ορίζουμε την χαρακτηριστική Segré (για κάθε ιδιοτιμή)

$$S_i = [n - r_{i1}, r_{i1} - r_{i2}, \dots, r_{i, \ell_i - 1} - r_{i, \ell_i}]$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} n - r_{i1} &= \# \text{ ιδιοδιανυσμάτων της } \lambda_i \text{ (γενικ. } 1^{\text{ος}} \text{ τάξης)} \\ r_{i1} - r_{i2} &= \# \text{ γενικωμένων ιδιοδ. της } \lambda_i \text{ } 2^{\text{ος}} \text{ τάξης} \\ &\vdots \\ r_{i, \ell_i - 1} - r_{i, \ell_i} &= \# \text{ γενικωμένων ιδιοδ. της } \lambda_i \text{ } \ell_i \text{ τάξης} \end{aligned}$$

Τα μήκη των αλυσίδων που ορίζουν τις διαστάσεις Jordan,  $\dim J_{ij}(\lambda_i)$ ,  $j=1,2,\dots,d_i$ , καθορίζονται από το διάγραμμα Ferrer:

$$\begin{array}{lcl}
 1^{ns} \text{ αλυσ:} & n - r_{i1} = d_i & * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \\
 2^{ns} \text{ " :} & r_{i1} - r_{i2} & * \quad * \quad * \quad * \\
 \vdots & & \\
 \ell_i \text{ αλυσ:} & r_{i, \ell_i - 1} - r_{i, \ell_i} & * \quad *
 \end{array}$$

Τα αθροίσματα κάθε στήλης δίνουν το μήκος της αντιστοίχης αλυσίδας ( $\dim J_{ij}(\lambda_i)$ ).

Παράδειγμα: Έστω  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  με  $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^9 (\lambda - \lambda_2)$

και:  $r_{i1} = 5, r_{i2} = 3, r_{i3} = 2, r_{i4} = r_{i5} = 1 (\Rightarrow \ell_i = 4)$ .

Η χαρακτηριστική ~~α~~ Segré για την ιδιοτιμή  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= [n - r_{i1}, r_{i1} - r_{i2}, r_{i2} - r_{i3}, r_{i3} - r_{i4}] \\
 &= [5, 2, 1, 1]
 \end{aligned}$$

Το αντιστοίχο διάγραμμα Ferrer

$$\begin{array}{lcl}
 d_1 = n - r_{i1} & : & * \quad * \quad * \quad * \quad * \\
 r_{i1} - r_{i2} & : & * \quad * \\
 r_{i2} - r_{i3} & : & * \\
 r_{i3} - r_{i4} & : & *
 \end{array}$$



Αρα έχουμε :

|   |            |   |             |     |   |              |
|---|------------|---|-------------|-----|---|--------------|
| 1 | αλυσίδα με | 1 | ιδιοδιάνοση | και | 3 | γενικωμένα   |
| 1 | "          | " | 1           | "   | " | 1 γενικωμένο |
| 1 | "          | " | 1           | "   | " | 0 "          |
| 1 | "          | " | 1           | "   | " | 0 "          |
| 1 | "          | " | 1           | "   | " | 0 "          |

δηλαδή,

$$J_1(\lambda_1) = \text{bdiag} \{ J_{11}(\lambda_1), J_{12}(\lambda_1), J_{13}(\lambda_1), J_{14}(\lambda_1), J_{15}(\lambda_1) \}$$

$$J_{11}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_{12}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{13}(\lambda_1) = J_{14}(\lambda_1) = J_{15}(\lambda_1) = \lambda_1, \quad J_{21}(\lambda_2) = \lambda_2$$

Οι αλυσίδες Jordan είναι

$$A \left[ \underline{u}_{11}^{(1)} \mid \underline{u}_{12}^{(1)} \mid \underline{u}_{13}^{(1)} \mid \underline{u}_{14}^{(1)} \right] = \left[ \underline{u}_{11}^{(1)} \mid \underline{u}_{12}^{(1)} \mid \underline{u}_{13}^{(1)} \mid \underline{u}_{14}^{(1)} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \left[ \underline{u}_{21}^{(1)} \mid \underline{u}_{22}^{(1)} \right] = \left[ \underline{u}_{21}^{(1)} \mid \underline{u}_{22}^{(1)} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$A \underline{u}_{31}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{31}^{(1)}, \quad A \underline{u}_{41}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{41}^{(1)}, \quad A \underline{u}_{51}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{51}^{(1)}$$

και  $A \underline{u}_{11}^{(2)} = \lambda_2 \underline{u}_{11}^{(2)}$ . Οι πρώτες δύο αλυσίδες γράφονται:

$$A \underline{u}_{11}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{11}^{(1)}, \quad A \underline{u}_{12}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{12}^{(1)} + \underline{u}_{11}^{(1)}, \quad A \underline{u}_{13}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{13}^{(1)} + \underline{u}_{12}^{(1)},$$

$$A \underline{u}_{14}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{14}^{(1)} + \underline{u}_{13}^{(1)}$$

$$\text{Επίσης: } A \underline{u}_{21}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{21}^{(1)}, \quad A \underline{u}_{22}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{22}^{(1)} + \underline{u}_{21}^{(1)} \quad \square$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή (πίνακας μη-απλός Jordan)

$$P^{-1} A P = \text{bdiag} \{ J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e) \} =: J$$

$$\Rightarrow A = P J P^{-1} \Rightarrow A^k = P J^k P^{-1}, \quad \text{όπου}$$

$$J^k = \text{bdiag} \{ J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots, J_e^k(\lambda_e) \}, \quad \text{και}$$

$$J_i^k(\lambda_i) = \text{bdiag} \{ J_{i1}^k(\lambda_i), J_{i2}^k(\lambda_i), \dots, J_{i,l_i}^k(\lambda_i) \}$$

όπου,

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}^k$$

Έστω ότι  $J_{ij} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ . Τότε:

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & {}^k C_1 \lambda_i^{k-1} & {}^k C_2 \lambda_i^{k-2} & \dots & {}^k C_{q-1} \lambda_i^{k-q+1} \\ 0 & \lambda_i^k & {}^k C_1 \lambda_i^{k-1} & \dots & {}^k C_{q-2} \lambda_i^{k-q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i^k & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } {}^k C_q =: \binom{k}{q} = \frac{k!}{q!(k-q)!} \quad \text{αν } k \geq q, \quad {}^k C_q = 0 \quad \text{αν } k < q$$

Παράδειγμα: Έστω  $J_{ij}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ,

$$J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Γράφουμε:

$$J_{ij}(\lambda_i) = \lambda_i I_3 + H_3, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο  $H$  είναι μηδενοδυναμικός και:

$$H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H^k = 0, \quad k \geq 3$$

Επομένως:

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = (\lambda_i I_3 + H_3)^k = \lambda_i^k I_3 + k \lambda_i^{k-1} H_3 + \frac{k(k-1)}{2} \lambda_i^{k-2} H_3^2$$

$$= \lambda_i^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k \lambda_i^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \lambda_i^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k \lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2} k(k-1) \lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k \lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

$k \geq 3$ . Επίσης,

$$J_{ij}^0 = I_3, \quad J_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad J_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & 0 & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$  όπου ο  $A$  έχει  
διακριτικό πολυώνυμο:

$$q(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2),$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Έστω ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της  $\lambda_1$   
είναι  $d_1 = 1$ . Τότε, στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$  αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα  
και ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Επομένως, αν

$$P = [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_3] \Rightarrow P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 = [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^T \\ \tilde{u}_2^T \\ \tilde{u}_3^T \end{bmatrix} \underline{x}_0$$

$$= [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1^k (\tilde{u}_1^T \underline{x}_0) + k\lambda_1^{k-1} (\tilde{u}_2^T \underline{x}_0) \\ \lambda_1^k (\tilde{u}_2^T \underline{x}_0) \\ \lambda_2^k (\tilde{u}_3^T \underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1^k (\tilde{u}_1^T \underline{x}_0) \underline{u}_1 + k\lambda_1^{k-1} (\tilde{u}_2^T \underline{x}_0) \underline{u}_1 + \lambda_1^k (\tilde{u}_2^T \underline{x}_0) \underline{u}_2 + \lambda_2^k (\tilde{u}_3^T \underline{x}_0) \underline{u}_3$$

όπου:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1^T \\ \tilde{u}_2^T \\ \tilde{u}_3^T \end{bmatrix} = [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_3]^{-1}$$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα  $x_{k+1} = Ax_k$ , όπου

(66)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$  είναι:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^3$$

Άρα  $\lambda = 2$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\tau = 3$ .

Ιδιοδιανύσματα:

$$(\lambda I - A)\underline{u}_1 = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \gamma_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \gamma_1 = 0 \text{ και } \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα  $d = 1$  (γεωμετρική πολλαπλότητα) και έχουμε 1 γενικευμένο ιδιοδ. 2<sup>ης</sup> τάξης και 1 γενικευμένο ιδιοδ. 3<sup>ης</sup> τάξης, έστω  $\underline{u}_2$  και  $\underline{u}_3$ . Από την αλυσίδα Jordan,

$$\left. \begin{array}{l} A \underline{u}_1 = \lambda \underline{u}_1 \\ A \underline{u}_2 = \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A \underline{u}_3 = \lambda \underline{u}_3 + \underline{u}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \underline{u}_1 = 2 \underline{u}_1 \\ A \underline{u}_2 = 2 \underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \underline{u}_3 = 2 \underline{u}_3 + \underline{u}_2 \end{array}$$

Έστω  $\underline{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$  και  $\underline{u}_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$ . Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -\beta_2 - 3\gamma_2 &= -1 \\ \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

⇒  $\beta_2 = 1, \gamma_2 = 0, \alpha_2$  αυθαίρετο. Επιλέγουμε  $\alpha_2 = 0$ , άρα

$$u_2 = [0 \ 1 \ 0]^T. \text{ Τότε:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -\beta_3 - 3\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_3 &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

⇒  $\beta_3 = 3, \gamma_3 = -1, \alpha_3$  αυθαίρετο (έστω 0). Άρα.

$$P = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^T \\ \tilde{u}_2^T \\ \tilde{u}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{J^k} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\alpha}_c}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} + 3 \cdot 2^k \\ 0 & 0 & -2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k + \frac{5}{2}k2^k - \frac{1}{8}(k-k^2)2^k \\ 5 \cdot 2^k - k2^{k-1} - 3 \cdot 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k + \frac{5}{2}k2^k - \frac{1}{8}(k-k^2)2^k \\ 2 \cdot 2^k - k2^{k-1} \\ 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k - \frac{19}{8}k2^k + \frac{1}{8}k^22^k \\ 2 \cdot 2^k - \frac{k}{2}2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{19}{8}k + \frac{k^2}{8} \\ 2 - \frac{k}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2^k$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές: Έστω σύστημα  $\underline{y}_{k+1} = A \underline{y}_k, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$   
 με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) := (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2, \omega \neq 0$$

$\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ . Οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι μιγαδικές συζυγείς,  
 $\lambda = \sigma \pm i\omega$ . Έστω  $(\lambda, \underline{u})$  ζεύγος ιδιοτιμής / ιδιοδιανύσματος  
 και  $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}, \underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^2, (\underline{x}^T; \underline{z}^T) \neq \underline{0}^T$ . Τότε:

$$A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma\underline{x} - \omega\underline{z}) + i(\omega\underline{x} + \sigma\underline{z})$$

$$\Rightarrow A \begin{bmatrix} \underline{x} \\ i\underline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ i\underline{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα  $(\underline{x}, \underline{z})$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον  $\mathbb{R}^2$ . Γιατί έστω  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  και  $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = \underline{0}$ .  
 Τότε  $c_2 \neq 0$  (γιατί αν  $c_2 = 0$ , τότε  $c_1 \neq 0$  και  $c_1\underline{x} = \underline{0}$   
 $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$ , και τότε  $A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \Rightarrow \omega\underline{z} = \underline{0} \Rightarrow \underline{z} = \underline{0}$   
 αφού  $\omega \neq 0$ , και συνεπώς  $\underline{u} = \underline{0}$ , άτοπο). Επομένως,

$$\underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}\underline{x} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow A(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - i \frac{c_1}{c_2}) A \underline{x} = (1 - i \frac{c_1}{c_2}) (\sigma + i\omega) \underline{x}$$

$$\Rightarrow A \underline{x} = (\sigma + i\omega) \underline{x} \quad (*)$$

Όμως  $\underline{x} \neq 0$  (γιατί πάλι από την  $A \underline{x} = \sigma \underline{x} - \omega \underline{z}$ , αν  $\underline{x} = 0$  τότε  $\underline{z} = 0$  ( $\omega \neq 0$ ), άτοπο γιατί τότε  $\underline{u} = 0$ ).

Η εξίσωση (\*) οδηγεί σε άτοπο γιατί  $A \underline{x} \in \mathbb{R}^n$  και  $(\sigma + i\omega) \underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ . Επομένως,  $\det [\underline{x}; \underline{z}] \neq 0$  και

$$A = [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} [\underline{x}; \underline{z}]^{-1}$$

Έστω  $\sigma = \rho \cos \theta$ ,  $\omega = \rho \sin \theta$  ( $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Τότε,

$$A [\underline{x}; \underline{z}] = [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \rho [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^2 [\underline{x}; \underline{z}] &= \rho \underbrace{A [\underline{x}; \underline{z}]} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \rho [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \rho^2 [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^2 \\ &= \rho^2 [\underline{x}; \underline{z}] R^2(\theta) \end{aligned}$$

Ο πίνακας  $R(\theta)$  είναι ορθογώνιος πίνακας (πίνακας περιστροφής) και

$$\begin{aligned} R^2(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R(2\theta) \end{aligned}$$



και γενικά,

$$R^k(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$A^k [\underline{x}; \underline{z}] = e^k [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k = [\underline{x}; \underline{z}] \begin{bmatrix} e^k \cos(k\theta) & e^k \sin(k\theta) \\ -e^k \sin(k\theta) & e^k \cos(k\theta) \end{bmatrix} [\underline{x}; \underline{z}]^{-1}$$

Παράδειγμα: Έστω  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda^2 - 2\rho \cos \theta \lambda + \rho^2)$  με  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_3 = \rho e^{i\theta} = \bar{\lambda}_4$  και ιδιοδιανύσματα  $\underline{u}_1, \underline{u}_2$

$\underline{u}_r + i\underline{u}_i, \underline{u}_r - i\underline{u}_i$ , αντίστοιχα ( $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_r, \underline{u}_i \in \mathbb{R}^4$ ). Τότε,

$$A = \underbrace{[\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_r \ \underline{u}_i]}_U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \\ 0 & 0 & -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \underbrace{[\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_r \ \underline{u}_i]^{-1}}_{U^{-1}}$$

$$\Rightarrow A^k = U \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^k \cos(k\theta) & e^k \sin(k\theta) \\ 0 & 0 & -e^k \sin(k\theta) & e^k \cos(k\theta) \end{bmatrix} U^{-1}$$

Παράδειγμα: Έστω  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  με χαρακτηριστικό πολώνυμο

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2$ . Οι ιδιοτιμές είναι  $\lambda = \sigma + i\omega, \bar{\lambda} = \sigma - i\omega$

με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\tau_1 = \tau_2 = 2$ . Έστω δα  $d_1 = d_2 = 1$ .

Τότε, αν:

$$\left. \begin{aligned} A(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) \\ A(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A(\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) &= (\sigma - i\omega)(\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) \\ A(\underline{x}_2 - i\underline{z}_2) &= (\sigma - i\omega)(\underline{x}_2 - i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) \end{aligned} \right\}$$

Είναι οι δύο αλυσίδες Jordan που αντιστοιχούν στις δύο ιδιοτιμές  $\lambda$  και  $\bar{\lambda}$ , αντίστοιχα, γράψουμε ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} A \underline{x}_1 &= \sigma \underline{x}_1 - \omega \underline{z}_1 \\ A \underline{z}_1 &= \omega \underline{x}_1 + \sigma \underline{z}_1 \\ A \underline{x}_2 &= \sigma \underline{x}_2 - \omega \underline{z}_2 + \underline{x}_1 \\ A \underline{z}_2 &= \omega \underline{x}_2 + \sigma \underline{z}_2 + \underline{z}_1 \end{aligned} \right\}$$

Σε μορφή πίνακο-εξίσωσης:

$$A \underbrace{[\underline{x}_1 \ \underline{z}_1 \ | \ \underline{x}_2 \ \underline{z}_2]}_{P_r} = \underbrace{[\underline{x}_1 \ \underline{z}_1 \ | \ \underline{x}_2 \ \underline{z}_2]}_{P_r} \underbrace{\left[ \begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array} \right]}_{J_r}$$

Επομένως:

$$P_r^{-1} A P_r = J_r =: \left[ \begin{array}{c|c} W & I_2 \\ \hline 0 & W \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow P_r^{-1} A^k P_r = J_r^k = \left[ \begin{array}{c|c} W & I_2 \\ \hline 0 & W \end{array} \right]^k = \left[ \begin{array}{c|c} W^k & {}^k C_1 W^{k-1} \\ \hline 0 & W^k \end{array} \right]$$

Επομένως θέτουμε  $\sigma = \rho \cos \theta$ ,  $\omega = \rho \sin \theta$

$$\mathcal{J}_r^k = \left[ \begin{array}{c|c} \rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} & \rho^{k-1} \begin{bmatrix} \cos (k-1)\theta & \sin (k-1)\theta \\ -\sin (k-1)\theta & \cos (k-1)\theta \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

Στην γενική περίπτωση που  $A \in \mathbb{R}^{2q \times 2q}$ ,

$\varphi(\lambda) = [(\lambda - \sigma)^2 + \omega^2]^q$  με ιδιοτιμές  $\lambda = \sigma \pm i\omega$  αλγεβρικής πολλαπλότητας  $q$  και γεωμετρικής πολλαπλότητας 1, έχουμε:

$$\mathcal{J}_r = \left[ \begin{array}{cccc} W & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W & I & & \vdots \\ \vdots & & W & & 0 \\ \vdots & & & & I \\ 0 & \dots & 0 & & W \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2q \times 2q}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_r^k = \left[ \begin{array}{cccc} W^k & {}^k C_1 W^{k-1} & {}^k C_2 W^{k-2} & \dots & {}^k C_{q-1} W^{k-q+1} \\ 0 & W^k & {}^k C_1 W^{k-1} & & {}^k C_{q-2} W^{k-q-2} \\ \vdots & & W^k & & \vdots \\ \vdots & & & & {}^k C_1 W^{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & & W^k \end{array} \right]$$

$$\text{όπου } \left. \begin{array}{l} {}^k C_i = \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad i \leq k \\ = 0 \quad i > k \end{array} \right\}$$

Οι συναρτήσεις που ορίζονται στην πραγματική μορφή  
Jordan του πίνακα  $A^k$  είναι τα "modes" του συστήματος.

Έχουμε:

(i) Συναρτήσεις της μορφής  $\lambda^k$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , που αντιστοιχούν  
σε Jordan blocks διάστασης 1. Οι συναρτήσεις αυτές  
συγκλίνουν στο 0 καθώς  $k \rightarrow \infty$  αν  $|\lambda| < 1$ , αποκλίνουν  
αν  $|\lambda| > 1$ , είναι σταθερές αν  $\lambda = 1$  ή ταλαντώνονται  
χωρίς απόσβεση αν  $\lambda = -1$

(ii) Συναρτήσεις της μορφής  $p(k)\lambda^k$  όπου  $p(k)$  πολυώνυμο  
εσω  $k$ . Οι συναρτήσεις αυτές συγκλίνουν στο 0 αν  
 $|\lambda| < 1$ , αποκλίνουν εκθετικά αν  $|\lambda| > 1$ , αποκλίνουν  
πολυωνομικά αν  $|\lambda| = 1$

(iii) Συναρτήσεις της μορφής  $\rho^k \cos(k\theta + \varphi)$ . Οι συναρτήσεις  
ταλαντώνονται χωρίς απόσβεση αν  $\rho = 1$ , ταλαντώνονται  
με απόσβεση αν  $\rho < 1$ , ή ταλαντώνονται με αυξανόμενο  
πλάτος ταλάντωσης αν  $\rho > 1$ .

(iv) Συναρτήσεις της μορφής  $\rho^k p(k) \cos(k\theta + \varphi)$ . Οι  
συναρτήσεις αυτές ταλαντώνονται με εκθετικά  
αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν  $\rho > 1$ , ταλαντώ-  
νεται με πολυωνομικά αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης  
αν  $\rho = 1$  ή συγκλίνουν στο μηδέν (με απόσβεση  
ταλάντωσης) αν  $\rho < 1$ .

Ορισμός (προσωρινός): Το γραμμικό σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\|\underline{x}_k\| \rightarrow 0$  καθώς  $k \rightarrow +\infty$  για κάθε  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  (Ισοδύναμα αν  $\|A^k \underline{x}_0\| \rightarrow 0$   $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  ή  $\|A^k\| \rightarrow 0$  καθώς  $k \rightarrow +\infty$ ).

Ορισμός (προσωρινός): Το γραμμικό σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ευσταθές κατά Lyapunov αν η λύση του είναι φραγμένη  $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Θεώρημα: Το σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\rho(A) < 1$ , όπου  $\rho(A)$  είναι η φασματική ακτίνα του  $A$ , δηλ.  $\rho(A) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A)\}$ .

Απόδειξη:

( $\Leftarrow$ ): Έστω  $\rho(A) < 1$  και  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  αυθαίρετο. Έστω  $A = P \mathcal{J} P^{-1}$  όπου  $\mathcal{J}$  ο πίνακας Jordan του  $A$  και  $P$  ο πίνακας γενικωμένων ιδιοδιανυσμάτων. Τότε,

$$\begin{aligned} \|\underline{x}_k\| &= \|A^k \underline{x}_0\| = \|P \mathcal{J}^k P^{-1} \underline{x}_0\| \leq \underbrace{\|P\| \cdot \|P^{-1}\|}_{\gamma} \|\underline{x}_0\| \|\mathcal{J}^k\| \\ &= \gamma(\underline{x}_0) \|\mathcal{J}^k\| \end{aligned}$$

Έστω  $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} (\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \dots (\lambda - \lambda_e)^{\tau_e}$  το χαρακτηριστικό πολώνυμο του πίνακα  $A$  όπου  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  αν  $i \neq j$  και  $\tau_i$  η αλγεβρική πολλαπλότητα του  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,e$ . Τότε

$$\mathcal{J} = \text{bdiag} \{ \mathcal{J}_1(\lambda_1), \mathcal{J}_2(\lambda_2), \dots, \mathcal{J}_e(\lambda_e) \}.$$

και

$$T_i(\lambda_i) = \text{bdiag} \{ T_{i1}(\lambda_i), T_{i2}(\lambda_i), \dots, T_{id_i}(\lambda_i) \}$$

όπου  $d_i$  η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ ,  $1 \leq d_i \leq z_i$ . [ Για απλότητα θεωρούμε ότι η νόρμα διαυσομήτων είναι η Ευκλείδεια νόρμα και η νόρμα πινάκων η φασματική νόρμα, δηλ.  $\|A\| = \sqrt{\sigma_{\max}(A)}$ , η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή ]. Επομένως,

$$\begin{aligned} \|T^k\| &= \|\text{bdiag} \{ T_i^k(\lambda_i), T_2^k(\lambda_2), \dots, T_e^k(\lambda_e) \}\| \\ &= \max \{ \|T_i^k\| : i=1, 2, \dots, e \} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}_k\| \leq \gamma \max \{ \|T_i^k\| : i=1, 2, \dots, e \}$$

Παρόμοια, για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, e\}$ ,

$$\begin{aligned} \|T_i^k(\lambda_i)\| &= \|\text{bdiag} \{ T_{i1}^k(\lambda_i), T_{i2}^k(\lambda_i), \dots, T_{id_i}^k(\lambda_i) \}\| \\ &= \max \{ \|T_{ij}^k(\lambda_i)\| : j=1, 2, \dots, d_i \} \end{aligned}$$

και επομένως

$$\|\underline{x}_k\| \leq \gamma \max \{ \|T_{ij}^k(\lambda_i)\| : i=1, 2, \dots, e, j=1, 2, \dots, d_i \}$$

Όμως τα στοιχεία ~~κάθε~~ <sup>του</sup> πίνακα  $T_{ij}^k \in \mathbb{C}^{m_{ij} \times m_{ij}}$  είναι της μορφής

$$T_{ij}^k(p, q) = \begin{cases} \sum_{r=1}^{r_i} P_{ij}(k) \lambda_i^{r_i}, & p \leq q \\ 0 & p > q \end{cases}$$

όπου  $S$  πολώνυμο της μεταβλητής  $k$ . και εφόσον  $|\lambda_i| < 1 \forall i=1, 2, \dots, e$  έχουμε ότι

$|T_{ij}^k| \rightarrow 0$  καθώς  $k \rightarrow +\infty$ . Επομένως,

$$\|A^k \underline{x}_0\| \rightarrow 0 \quad \text{για κάθε } \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

(76)

( $\Rightarrow$ ): Έστω  $\lambda_j \in \sigma(A)$ ,  $|\lambda_j| \geq 1$  και  $\underline{u}_j$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε,

$$A \underline{u}_j = \lambda_j \underline{u}_j \Rightarrow A^k \underline{u}_j = \lambda_j^k \underline{u}_j$$

Αν  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ , τότε  $\underline{u}_j \in \mathbb{R}^n$ . Θέτοντας  $\underline{x}_0 = \underline{u}_j$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\underline{x}_k\| &= \|A^k \underline{x}_0\| = \|\lambda_j^k \underline{x}_0\| = |\lambda_j|^k \|\underline{x}_0\| \\ &\geq \|\underline{x}_0\| > 0 \end{aligned}$$

Και επομένως η ακολουθία  $\|\underline{x}_k\|$  δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0, που αντιβαίνει την ασυμπτωτική ευστάθεια του πίνακα  $A$ .

Αν  $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , τότε  $\underline{u}_j \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$  και η παραπάνω απόδειξη δεν ισχύει. Έστω ότι:

$$\lambda_j = r e^{i\theta}, \quad r \geq 1, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \theta \neq 0, \quad \theta \neq \pi.$$

και  $\underline{u}_j = \underline{x} + i\underline{z}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

με  $\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ . Έχουμε ότι  $(\underline{x}, \underline{z})$  θεμελιώδη ανεξάρτητα στον  $\mathbb{R}^n$ . Επίσης, για  $k \geq 0$ ,

$$A^k \underline{u}_j = \lambda_j^k \underline{u}_j = r^k e^{ik\theta} \underline{u}_j$$

$$\Rightarrow A^k (\underline{x} + i\underline{z}) = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) (\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow A^k \underline{x} = r^k \cos k\theta \underline{x} - r^k \sin k\theta \underline{z} \quad \underline{\text{και}}$$

$$A^k \underline{z} = r^k \cos k\theta \underline{z} + r^k \sin k\theta \underline{x}$$

Ισοδύναμα,

$$A^k [\underline{x} | \underline{z}] = r^k [\underline{x} | \underline{z}] R(k\theta)$$

όπου

$$R(k\theta) = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

είναι ορθογώνιος πίνακας (περιστροφή). Επομένως.

$$A^k [\underline{x} | \underline{z}] \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} (A^T)^k = r^{2k} [\underline{x} | \underline{z}] \underbrace{R(k\theta) R^T(k\theta)}_{I_2} \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{trace} \left\{ A^k [\underline{x} | \underline{z}] \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} (A^T)^k \right\} = r^{2k} \text{trace} \left( [\underline{x} | \underline{z}] \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \|A^k [\underline{x} | \underline{z}]\|_F^2 = r^{2k} \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} [\underline{x} | \underline{z}] \right)$$

$$= r^{2k} \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \underline{x}^T \underline{x} & \underline{x}^T \underline{z} \\ \underline{z}^T \underline{x} & \underline{z}^T \underline{z} \end{bmatrix} \right)$$

$$= r^{2k} (\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2).$$

$$\Rightarrow \|A^k [\underline{x} | \underline{z}]\|_F = r^k \sqrt{\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2}.$$

Εφόσον το άθροισμα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές έχουμε:  $\|A^k \underline{x}\| \rightarrow 0$  και  $\|A^k \underline{z}\| \rightarrow 0$  καθώς

$k \rightarrow +\infty$  και συνεπώς

$$\|A^k \underline{x}\|^2 + \|A^k \underline{z}\|^2 = \|A^k [\underline{x} | \underline{z}]\|_F^2 = \left( r^k \sqrt{\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2} \right)^2 \rightarrow 0 \text{ καθώς } k \rightarrow +\infty$$

που είναι αδύνατον καθώς  $r \geq 1$  και επομένως

$$\|A^k \underline{x}\|^2 + \|A^k \underline{z}\|^2 \geq \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2 > 0 \text{ για κάθε } k \geq 0 \quad \square$$



Θεώρημα:

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\rho(A) := \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} \leq 1 - \varepsilon$ ,

$0 < \varepsilon \leq 1$ . Τότε, για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$  με  $1 - \varepsilon < \mu < 1$

υπάρχει  $C > 0$  τ.ω.  $\|A^k\| \leq C \mu^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , όπου

$\|\cdot\|$  είναι η φασματική νόρμα.

Απόδειξη: Γράψουμε  $A = P \mathcal{J} P^{-1}$  όπου  $\mathcal{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  πίνακας Jordan και  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  πίνακας γενικωμένων ιδιοδιανυσμάτων του  $A$ . Ο πίνακας  $\mathcal{J}$  είναι της μορφής:

$$\mathcal{J} = \text{bdiag} \{ \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_d \}$$

όπου  $d = \sum d_i$ , το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλασιαστών των ιδιοτιμών διακεκριμένων ιδιοτιμών του  $A$ . Ο πίνακας  $\mathcal{J}_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , είναι της μορφής

$$\mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$$

για κάποια ιδιοτιμή  $\lambda_i \in \sigma(A)$ . Έχουμε για  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$A^k = P \mathcal{J}^k P^{-1} = P \text{bdiag} \{ \mathcal{J}_1^k, \mathcal{J}_2^k, \dots, \mathcal{J}_d^k \} P^{-1}$$

Επομένως

$$\|A^k\| = \|P \mathcal{J}^k P^{-1}\| \leq \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \max \{ \|\mathcal{J}_i^k\| : i=1,2,\dots,d \}$$

$$\Rightarrow \|A^k\| \leq C_1 \max \{ \|\mathcal{J}_i^k\| : i=1,2,\dots,d \}, \forall k \in \mathbb{N}_0$$

όπου  $C_1 \in \mathbb{R}$  (σταθερά).

$C_1 > 0$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι για  $i=1,2,\dots,d$

$$T_i = \lambda_i I_{n_i} + H_i, \quad \lambda_i \in \sigma(A) \text{ και}$$

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

Ο πίνακας  $H_i$  είναι μηδενοδυνατός και  $H_i^k = 0$  για  $k \geq n_i$ . Επομένως υπάρχει  $c_2 > 0$  (ανεξάρτητος από τον  $i$ ) τέτοιος ώστε:

$$\|H_i^k\| \leq c_2 (\mu - 1 + \epsilon)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε για  $i=1,2,\dots,d$ :

$$\|T_i^k\| = \|(\lambda_i I + H_i)^k\| = \left\| \sum_{l=0}^k c_{lk} \lambda_i^l H_i^{k-l} \right\|$$

όπου  $c_{lk} = k! / l!(k-l)!$ . Άρα

$$\begin{aligned} \|T_i^k\| &\leq \sum_{l=0}^k c_{lk} |\lambda_i|^l \|H_i^{k-l}\| \\ &\leq c_2 \sum_{l=0}^k c_{lk} |\lambda_i|^l (\mu - 1 + \epsilon)^{k-l}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα του  $(|\lambda_i| + \mu - 1 + \epsilon)^k$  έχουμε  $\forall i=1,2,\dots,d$ :

$$\|T_i^k\| \leq c_2 (|\lambda_i| + \mu - 1 + \epsilon)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

όπου  $\lambda_i \in \sigma(A)$ . και  $|\lambda_i| + \mu - 1 + \epsilon \leq 1 - \epsilon + \mu - 1 + \epsilon = \mu$

Επομένως  $\|T_i^k\| \leq c_2 \mu^k \quad \forall i=1,2,\dots,d$  και  $k \in \mathbb{N}_0$ .  
 $\Rightarrow \|A^k\| \leq c_1 c_2 \mu^k =: c \mu^k$  όπου  $c = c_1 c_2 > 0$   $\square$

Παρατήρηση: Αν  $\rho(A) \leq 1 - \epsilon$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ , τότε για κάθε  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ :  $\|A^k \underline{x}_0\| \leq \|A^k\| \cdot \|\underline{x}_0\| \leq C \|\underline{x}_0\| \mu^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$   
 όπου  $1 - \epsilon < \mu < 1$  και επομένως  $\|A^k \underline{x}_0\| \rightarrow 0$  καθώς  $k \rightarrow +\infty$ . Άρα το σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Το σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν:

- (i)  $\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} \leq 1$ , και
- (ii) Κάθε ιδιοτιμή  $\lambda \in \sigma(A)$  με  $|\lambda| = 1$  έχει την ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα

Απόδειξη: Παραλείπεται!

Οι δύο έννοιες ευστάθειας που ορίστηκαν παραπάνω συχνά αναφέρονται ως "εσωτερική ευστάθεια" επειδή αφορούν την συμπεριφορά των εσωτερικών μεταβλητών ("καταστάσεων") συστήματος κατάστασης χώρου. Στην συνέχεια ορίζουμε μία έννοια "εξωτερικής ευστάθειας" που αναφέρεται στην σχέση εισόδου-εξόδου:

Εξωτερική ευστάθεια (Ευστάθεια ~~εισόδου~~ ~~εξόδου~~ ή φραγμένης εισόδου - φραγμένης εξόδου, BIBO = Bounded input - bounded-output).

Έστω σύστημα:  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k$   
 με  $\underline{x}_0 = \underline{0}$ . Το σύστημα ορίζεται ως "εξωτερικά ευσταθές"  
 αν υπάρχει σταθερά  $c > 0$ , τέτοια ώστε:

$$(\|\underline{u}_k\| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow (\|\underline{y}_k\| < c \quad \forall k \geq 0)$$

Έστω  $(G(k))_{k \in \mathbb{N}_0} = (D, CB, CAB, \dots, CA^{k-1}B, \dots)$

η ακολουθία  $\{G(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  Markov του συστήματος  $(\Sigma)$ . Τότε,

$$\underline{y}_n = \sum_{k=0}^n G(n-k) \underline{u}_k, \quad n \geq 0$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του  $\Sigma$  είναι:

$$\hat{G}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D.$$

Θεώρημα: Το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές αν

και μόνο αν:  $\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty.$

Απόδειξη:

[  $\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty \Rightarrow \Sigma$  εξωτερικά ευσταθές ]. Έστω

$(\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$ , ακολουθία εισόδου με  $\|\underline{u}_k\| \leq 1$

$\forall k \in \mathbb{N}_0$ . Τότε,

$$\begin{aligned} \|\underline{y}_n\| &= \left\| \sum_{k=0}^n G(n-k) \underline{u}_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|G(n-k)\| \cdot \|\underline{u}_k\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \|G(n-k)\| = \sum_{k=0}^n \|G(k)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| \\ &< \infty \end{aligned}$$

Άρα η σειρά είναι φραγμένη και υπάρχει  $c > 0$  τω

$\|y_n\| \leq c$  για κάθε  $n \geq 0$ . Άρα το  $\Sigma$  είναι εζωωτερικά  
ευσταθές.

[ $\Sigma$  εζωωτερικά ευσταθές  $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty$ ]. Εξετάζουμε  
πρώτα την βαθμωτή περίπτωση  $G(k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $p=m=1$ .  
Τότε (θέτοντας  $g(k) := G(k)$ ) έχουμε:

$$y_n = \sum_{k=0}^n g(n-k) u_k, \quad n \geq 0$$

Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι για κάθε πεπερασμένο  
 $L \geq 0$  υπάρχει  $k_1 = k_1(L) \in \mathbb{N}_0$  ζ.ω

$$\sum_{k=0}^{k_1} |g(k_1-k)| = |g(0)| + |g(0)| + \dots + |g(k_1)| > L$$

Επιλέγουμε φραγμένη είσοδο:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= 1 & \text{αν } g(k_1-k) > 0 \\ &= 0 & \text{αν } g(k_1-k) = 0 \\ &= -1 & \text{αν } g(k_1-k) < 0 \end{aligned} \right\}$$

όπου  $0 \leq k \leq k_1$ .  $\forall$  προφανώς  $|u_k| \leq 1$ ,  $0 \leq k \leq k_1$ , και

$$y_{k_1} = \sum_{k=0}^{k_1} g(k_1-k) u_k = \sum_{k=0}^{k_1} |g(k_1-k)| > L$$

και επομένως η ακολουθία  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  δεν είναι  
φραγμένη, που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι  $\Sigma$  είναι  
εζωωτερικά ευσταθές. Άρα  $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$ .

Στην συνέχεια η απόδειξη επεκτείνεται στην γενική περίπτωση ( $m \geq 1, p \geq 1$ ). Έστω ότι το σύστημα είναι

εξωτερικά ευσταθές. Τότε κάθε γραμμική είσοδος

$(\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, \underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$  αντιστοιχεί σε γραμμική έξοδο

$(\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, \underline{y}_k \in \mathbb{R}^p$ . Συνεπώς, αν η είσοδος είναι

της μορφής  $\underline{u}_k = [0 \dots 0 \ [u(k)]_i \ 0 \dots 0]^T$  με

$|[u(k)]_i| \leq 1, k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i \leq m$ , τότε η  $j$ -συνιστώσα

της εξόδου,  $[y(k)]_j, k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq p$ , είναι

επίσης γραμμική και επομένως  $\sum_{k=0}^{\infty} |G(k)_{i,j}| < \infty$ .

Από γνωστή εκτίμηση νόρμας πίνακα έχουμε:

$$\|G(k)\| \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m |G(k)_{i,j}|, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

και επομένως:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m |G(k)_{i,j}| \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} |G(k)_{i,j}| < \infty \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θα επιστρέψουμε στο πρόβλημα εσωτερικής και εξωτερικής ευσταθειας μετά την επόμενη ενότητα (Ελεγχσιμότητα - Παρατηρησιμότητα)

Ελεγχσιμότητα & Πυκνωσιμότητα

Έστω το σύστημα  $\sum_{i=0}^{\infty} \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, k \geq 0$   
όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Η λύση του συστήματος

είναι:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j, \quad k \geq 0$$

Ορισμός: Το σύστημα  $\Sigma_c(A, B)$  είναι πλήρως ελεγχσιμο αν, για κάθε ζεύγος  $(\underline{x}_a, \underline{x}_b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  υπάρχει ακέραιος  $r \geq 0$  και διανύσματα  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{r-1}\}, \underline{u}_i \in \mathbb{R}^m, i=0, 1, \dots, r-1$ , τέτοια ώστε το διάνυσμα  $\underline{x}_r \in \mathbb{R}^n$  να ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, r-1 \\ \underline{x}_0 &= \underline{x}_a \end{aligned} \right\}$$

να ικανοποιεί την σχέση  $\underline{x}_r = \underline{x}_b$

Θεώρημα: (Cayley-Hamilton): Κάθε πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλ. αν

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \text{ τότε}$$

$$A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Πόρισμα: Αν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , τότε κάθε πίνακας  $A^i, i \geq 0$

είναι γραμμικός συνδυασμός των πινάκων  $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$

δηλ.  $A^i \in \langle I_n, A, \dots, A^{n-1} \rangle$ .

Απόδειξη: Προφανώς για  $i < n$ . Έστω έα για  $j \geq n$

(σαθέρη), το Πόρισμα ισχύει για κάθε  $i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq j$ .

Τότε  $A^i = \beta_0 I_n + \beta_1 A + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1}, \beta_i \in \mathbb{R}, i=0, 1, \dots, n-1$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 A^{j+1} &= \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \dots + \beta_{n-2} A^{n-1} + \beta_{n-1} A^n \\
 &= \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \dots + \beta_{n-2} A^{n-1} + \beta_{n-1} (-a_0 I_n - a_1 A - \dots - a_{n-1} A^{n-1}) \\
 &= -a_0 \beta_{n-1} I_n + (\beta_0 - a_0 \beta_{n-1}) A + \dots + (\beta_{n-2} - a_{n-1} \beta_{n-1}) A^{n-1}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A^{j+1} \in \langle I_n, A, \dots, A^{n-1} \rangle$  □

Θεώρημα:  $\Sigma_i (A, B)$  πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν

$\text{Rank}(W) = n$ , όπου:

$$W = [B \mid AB \mid A^2 B \mid \dots \mid A^{n-1} B] \in \mathbb{R}^{m \times nm}$$

(ο  $W$  είναι ο πίνακας ελεγχσιμότητας).

Απόδειξη:

( $\Leftarrow$ ): Έστω  $\text{Rank}(W) = n \Rightarrow \mathcal{R}(W) = \mathbb{R}^n$ . Επομένως,

για κάθε  $\underline{x}_a, \underline{x}_b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists \underline{\psi} \in \mathbb{R}^{nm}$  τ.ω:

$$\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a = W \underline{\psi}$$

Γράφουμε:  $\underline{\psi}^T = [\underline{u}_{n-1}^T \mid \underline{u}_{n-2}^T \mid \dots \mid \underline{u}_0^T]$ ,  $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$

( $i=0, 1, \dots, n-1$ ). Τότε,

$$\underline{x}_b = A^n \underline{x}_a + [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B] \begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_b = A^n \underline{x}_a + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B \underline{u}_j$$

$\Rightarrow \Sigma_i (A, B)$  πλήρως ελέγξιμο.



( $\Rightarrow$ ): Έστω ότι  $\Sigma_i (A, B)$  πλήρως ελέγξιμο αλλά  $\text{Rank}(w) < n$ . Τότε οι γραμμές του  $w$  είναι γραμμικά εξαρτημένες και  $\exists \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n, \underline{\xi} \neq \underline{0}$ , τ.ω.:

$$\underline{\xi}^T [ \underline{B} ; A\underline{B} ; A^2\underline{B} ; \dots ; A^{n-1}\underline{B} ] = \underline{0}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T \underline{B} = \underline{0} \quad \underline{\xi}^T A\underline{B} = \underline{\xi}^T A^2\underline{B} = \dots = \underline{\xi}^T A^{n-1}\underline{B} = \underline{0}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T A^i \underline{B} = \underline{0}^T \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Πόρισμα}).$$

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει  $k \in \mathbb{N}_0$  και ακολουθία εισόδου  $\{ \underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{k-1} \}, \underline{u}_i \in \mathbb{R}^m, i=0, 1, \dots, k-1$  τ.ω.  $\underline{x}_k = \underline{\xi}$  αν  $\underline{x}_0 = \underline{0}$ . Πράγματι, αν υπάρχει τέτοια ακολουθία, τότε

$$\underline{\xi} = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T \underline{\xi} = \|\underline{\xi}\|^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \underline{\xi}^T A^{k-j-1} B \underline{u}_j = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\xi} = \underline{0}, \text{ άτοπο.} \quad \square$$

Παρατήρηση: Η απόδειξη του θεωρήματος λέει ότι αν  $\Sigma_i (A, B)$  πλήρως ελέγξιμο, τότε για κάθε ζεύγος  $(\underline{x}_a, \underline{x}_b)$  υπάρχει ακολουθία διενσομάτων εισόδου που οδηγεί το σύστημα από την αρχική κατάσταση ~~σε~~  $\underline{x}_a$  στην τελική κατάσταση  $\underline{x}_b$  σε  $n$  το πολύ βήματα. Μια ακολουθία με αυτή την ιδιότητα είναι:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = W^T (W W^T)^{-1} (\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a)$$

Παρατηρούμε ότι  $\text{Rank}(W) = n \Rightarrow W W^T > 0$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} \underline{x}_b &= A^n \underline{x}_a + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} B \underline{u}_k \\ &= A^n \underline{x}_a + W \begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = A^n \underline{x}_a + W W^T (W W^T)^{-1} (\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a) \\ &= A^n \underline{x}_a + \underline{x}_b - A^n \underline{x}_a = \underline{x}_b \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Ένα σύστημα που δα είναι πλήρως ελεγχίμο είναι :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1}^1 \\ \underline{x}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}_k$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \underline{x}_{k+1}^1 &= A_{11} \underline{x}_k^1 + A_{12} \underline{x}_k^2 + B_1 \underline{u}_k \\ \underline{x}_{k+1}^2 &= A_{22} \underline{x}_k^2 \end{aligned} \right\}$$

(Εδώ  $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ,  $\underline{x}_k^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ )

Παρατηρούμε ότι το  $\underline{x}_k^2$  δα επηρεάζεται καθόλου από την είσοδο  $\underline{u}_k$  (π.χ. αν  $\underline{x}_0^2 = 0 \Rightarrow \underline{x}_k^2 = 0 \forall k \geq 0$ ).  
Ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι:

$$W = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B], \text{ \acute{o}\pi\omega}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και γενικά

$$A^j B = \begin{bmatrix} A_{11}^j B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A^{n-1}B \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(W) \leq \dim(A_{11}) \ll n = n_1 < n.$$

(Kalman)

Θεώρημα 1 Έστω ότι το σύστημα  $\Sigma_c(A, B)$   $\left( \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{array} \right)$  δα είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει μη-ιδιόζων πίνακας

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(Q) \neq 0, \text{ \acute{o}\omega}$$

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ, \quad \tilde{B} = Q^{-1}B$$

όπου:

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και όπου  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m}$  ( $\tilde{n} < n$ ) και  $\Sigma_c(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$

πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: Έστω  $W = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$  ο πίνακας ελέγξιμότητας και  $\tilde{n} = \text{Rank}(W)$ . Έστω  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{\tilde{n}}\}$  μια βάση του  $\mathcal{R}(W)$  και  $\{\underline{v}_{\tilde{n}+1}, \dots, \underline{v}_n\}$  μια βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Ορίζουμε τον πίνακα  $Q = [Q_1 \mid Q_2]$ , όπου

$$Q_1 = [ \underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \dots \ \underline{v}_{\tilde{n}} ], \quad Q_2 = [ \underline{v}_{\tilde{n}+1} \ \dots \ \underline{v}_n ]$$

δηλ. αν  $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$  τότε  $\mathcal{X}_c \oplus \langle \underline{v}_{\tilde{n}+1}, \dots, \underline{v}_n \rangle = \mathbb{R}^n$

Ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

(I): Αν  $\underline{v}_j \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{\tilde{n}} \rangle$  για  $j = 1, 2, \dots, \tilde{n}$  (δηλ. ο χώρος  $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$  είναι  $A$ -αναλλοιωτός): Έστω

$\underline{v}_j, 1 \leq j \leq \tilde{n}$ . Εφόσον  $\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$ ,

$$\underline{v}_j = [ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B ] \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

για κατάλληλα  $\underline{\alpha}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε:

$$A\underline{v}_j = [ AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^nB ] \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton,

$$A^n = -\beta_{n-1}A^{n-1} - \beta_{n-2}A^{n-2} - \dots - \beta_0I_n$$

όπου  $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0$ , το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ . Επομένως:

$$\begin{aligned} A\underline{v}_j &= \underbrace{[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B ]}_W \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}_1} + A^n B \underline{\alpha}_n \\ &= W \underline{\psi}_1 + [ -\beta_0 B \mid -\beta_1 AB \mid \dots \mid -\beta_{n-1} A^{n-1} B ] \underline{\alpha}_n \\ &= W \underline{\psi}_1 - \underbrace{[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B ]}_W \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \underline{\alpha}_n \\ \beta_1 \underline{\alpha}_n \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \underline{\alpha}_n \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}_2} \\ &= W(\underline{\psi}_1 - \underline{\psi}_2) \Rightarrow A\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c \end{aligned}$$

Ο πίνακας  $\tilde{A}$  ορίζεται ως  $Q\tilde{A} = AQ$ . Έστω ότι

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$$

$$\Rightarrow [Q_1 \mid Q_2] \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = A [Q_1 \mid Q_2]$$

$$\Rightarrow AQ_1 = Q_1 \tilde{A}_{11} + Q_2 \tilde{A}_{21}$$

Οι στήλες του πίνακα  $AQ_1$  είναι  $\{A\underline{v}_j\}_{j=1}^{\tilde{n}}$ ,  $A\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$ , γράφονται ως γραμμικός συνδιασμός των  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  (με μοναδικό τρόπο) μέσω του πίνακα  $Q_1 \tilde{A}_{11}$  και επομένως  $\tilde{A}_{21} = 0$ . Ο πίνακας  $\tilde{B}$  ορίζεται ως  $B = Q\tilde{B}$ .

Έστω ότι,

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m}$$

Έχουμε:

$$B = [Q_1 \mid Q_2] \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = Q_1 \tilde{B}_1 + Q_2 \tilde{B}_2$$

Οι στήλες του  $B$  είναι οι πρώτες  $m$  στήλες του  $W$  και επομένως γράφονται ως γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων βάσης του  $\mathcal{X}_c$ ,  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ , με μοναδικό τρόπο, μέσω του πίνακα  $Q_1 \tilde{B}_1$  και επομένως  $\tilde{B}_2 = 0$ . Επομένως δείξαμε ότι:

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απομένει να δείξουμε ότι  $\Sigma_i(\tilde{A}_{ii}, \tilde{B}_i)$  πλήρως ελέγξιμο. (9)

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \text{Rank}([B; AB; \dots; A^{n-1}B]) \\ &= \text{Rank}(Q^{-1}[B; AB; \dots; A^{n-1}B]) \\ &= \text{Rank}(Q^{-1}[B; AQA^{-1}B; \dots; A^{n-1}QA^{-1}B]) \\ &= \text{Rank}([Q^{-1}B; Q^{-1}AQA^{-1}B; \dots; Q^{-1}A^{n-1}QA^{-1}B]) \\ &= \text{Rank}([\tilde{B}; \tilde{A}\tilde{B}; \dots; \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]) \\ &= \text{Rank}\left(\left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{\tilde{n}-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \\ &= \text{Rank}\left(\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \dots \left[ \begin{array}{c} \tilde{A}_{11}^{\tilde{n}-1}\tilde{B}_1 \\ 0 \end{array} \right] \right) \\ &= \text{Rank}([\tilde{B}_1; \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1; \dots; \tilde{A}_{11}^{\tilde{n}-1}\tilde{B}_1]) \\ &= \text{Rank}([\tilde{B}_i; \tilde{A}_{ii}\tilde{B}_i; \dots; \tilde{A}_{ii}^{\tilde{n}-1}\tilde{B}_i]) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Sigma_i(\tilde{A}_{ii}, \tilde{B}_i)$  είναι πλήρως ελέγξιμο.  $\square$

$$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$$

Παρατήρηση: Ο ελέγξιμος υπόχωρος είναι ο μικρότερος  $A$ -αναλλοίωτος υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει  $\mathcal{R}(B)$  (υπό την έννοια ότι αν  $Y$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει  $\mathcal{R}(B)$ , τότε  $\mathcal{X}_c \subseteq Y$ )

Απόδειξη: Άσκηση!

Θεώρημα: Το σύστημα  $\Sigma_c(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν  $\text{Rank}([sI_n - A \mid B]) = n \quad \forall s \in \sigma(A)$ .

Απόδειξη:

( $\Rightarrow$ ): Έστω ότι  $\Sigma_c(A, B)$  είναι πλήρως ελέγξιμο αλλά  $\text{Rank}([s_0 I_n - A \mid B]) < n$  για κάποιο  $s_0 \in \sigma(A)$ . Τότε  $\exists \underline{z} \in \mathbb{C}^n, \underline{z} \neq \underline{0}$  τ.ω

$$\underline{z}^T [s_0 I - A \mid B] = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{z}^T B = \underline{0} \text{ και } \underline{z}^T A = s_0 \underline{z}^T$$

$$\Rightarrow \underline{z}^T [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B] = \underline{0}, \text{ δηλ. } \underline{z}^T W = \underline{0}$$

Έστω  $\underline{z} = \underline{u} + i\underline{v}$ ,  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ . Εφόσον  $\underline{z} \neq \underline{0}$ , ένα τουλάχιστον από τα  $(\underline{u}, \underline{v})$  είναι διάφορο του μηδενικού διανύσματος.

Έχουμε:

$$(\underline{u}^T + i \underline{v}^T) W = \underline{0} \Rightarrow (\underline{u}^T W) + i (\underline{v}^T W) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{u}^T W = \underline{0} \text{ και } \underline{v}^T W = \underline{0}$$

Εφόσον  $\underline{u} \neq \underline{0}$  ή  $\underline{v} \neq \underline{0}$ ,  $\text{Rank}(W) < n \Rightarrow \Sigma_c(A, B)$  δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

( $\Leftarrow$ ): Έστω ότι  $\Sigma_c(A, B)$  δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Θα δείξουμε ότι  $\text{Rank}([sI + A \mid B]) < n$  για κάποιο  $s \in \mathbb{C}$ . Εφόσον  $\Sigma_c(A, B)$  δεν είναι πλήρως ελέγξιμο

$\exists Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(Q) \neq 0$ , τ.ω.  $\tilde{A} = Q^{-1} A Q, \tilde{B} = Q^{-1} B$  όπου

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right], \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m} \quad (\tilde{n} < n)$$

Έστω ότι  $s_0 \in \sigma(\tilde{A}_{22})$  και  $\underline{\xi}^T \in \mathbb{C}^{n-\tilde{n}}$  το αντίστοιχο  
αριστερό ιδιοδιάνυσμα, δηλ.  $\underline{\xi} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{\xi}^T \tilde{A}_{22} = s_0 \underline{\xi}^T$ . Θα  
δείξουμε ότι  $\text{Rank}([s_0 I - A; B]) < n$ , η ισοδύναμη ότι:

$$\text{Rank} \left( Q^{-1} [s_0 I - A; B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \right) < n$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & [\underline{0}^T; \underline{\xi}^T] Q^{-1} [s_0 I - A; B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \\ &= [\underline{0}^T; \underline{\xi}^T] [s_0 I - Q^{-1} A Q; Q^{-1} B] = \\ &= [\underline{0}^T; \underline{\xi}^T] \left[ \begin{array}{cc|c} s_0 I - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ 0 & s_0 I - \tilde{A}_{22} & 0 \end{array} \right] \\ &= [\underline{0}^T; \underline{\xi}^T (s_0 I - \tilde{A}_{22}); \underline{0}^T] = \underline{0}^T \end{aligned}$$

Επομένως οι γραμμές του πίνακα  $[s_0 I - A; B]$   
είναι γραμμικά εξαρτημένες και επομένως  $\text{Rank}[s_0 I - A; B] < n$ .  $\square$

Παρατήρηση:

Εφόσον  $\text{Rank}([s_0 I - A]) = n$  αν  $s_0 \notin \sigma(A)$ , μία  
ισοδύναμη πρόταση με το θεώρημα είναι:

$\Sigma_c(A, B)$  πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν  
 $\text{Rank}([sI - A; B]) = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$ .



Παρατηρησιμότητα : Έστω σύστημα :

$$\Sigma : \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k, \quad k \geq 0, \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Ερώτηση: Αν η ακολουθία  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  είναι γνωστή και

παρατηρούμε την έξοδο του συστήματος  $\{\underline{y}_k : 0 \leq k \leq j\}$

είναι δυνατόν να προβλέψουμε την έξοδο για  $k > j$  ;

Ναί, αν μπορούμε να εκτιμήσουμε χωρίς σφάλμα την

αρχική κατάσταση  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  (γιατί από τα  $\underline{x}_0$  και  $\underline{u}_k$

υπολογίζουμε τα διανύσματα κατάστασης  $\underline{x}_k$  και από τα

$\underline{x}_k$  και  $\underline{u}_k$  τα διανύσματα εξόδου  $\underline{y}_k$ ), χωρίς βλάβη

γενικότητας θεωρούμε ότι  $\underline{u}_k = \underline{0}, k \in \mathbb{N}_0$  και εξετάζουμε

το σύστημα εξόδου :  $\Sigma_0(A, C) : \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k, \underline{y}_k = C \underline{x}_k,$

$\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$

Ορισμός: Έστω ότι η λύση του συστήματος  $\Sigma_0(A, C)$

είναι  $(\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  με αρχική κατάσταση  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Το

σύστημα  $\Sigma_0(A, C)$  είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν υπάρχει

$k \in \mathbb{N}_0$  έτσι ώστε η αρχική συνθήκη κατάσταση  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

να καθορίζεται (μονοσήμαντα) από την πεπερασμένη

ακολουθία  $\{\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k\}$ .

Παρατήρηση: Αν η αρχική κατάσταση  $\underline{x}_0$  καθορίζεται

μονοσήμαντα, το ίδιο ισχύει για την ακολουθία διανυσμάτων

κατάστασης  $(\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  και εξόδου  $(\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , ως

$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0$  και  $\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0$ , αντίστοιχα. (Υποθέτουμε

ότι οι πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  που ορίζονται στο  $\Sigma_0$  είναι γνωστοί).

Θεώρημα: ~~Εξαρτάται~~ Το σύστημα  $\Sigma_0(A, C)$  είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν  $\text{Rank}(\Gamma_0) = n$  όπου,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

Παρατήρηση: Από τις διαστάσεις του  $\Gamma_0$  έχουμε  $\text{Rank}(\Gamma_0) \leq n$ . Έχουμε ισότητα ( $\text{Rank}(\Gamma_0) = n$ ) αν και μόνο αν οι  $n$  στήλες του  $\Gamma_0$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Απόδειξη: Έχουμε:  $\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0$ ,  $k \geq 0$ , και επομένως:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}_0 = \Gamma_0 \underline{x}_0$$

( $\Leftarrow$ ): Αν  $\text{Rank}(\Gamma_0) = n$ , τότε  $\Gamma_0^T \Gamma_0$  αντιστρέφεται και  $\underline{y}_{n-1} = \Gamma_0 \underline{x}_0 \Rightarrow \Gamma_0^T \underline{y}_{n-1} = \Gamma_0^T \Gamma_0 \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{x}_0 = (\Gamma_0^T \Gamma_0)^{-1} \Gamma_0^T \underline{y}_{n-1}$

Άρα η αρχική κατάσταση  $\underline{x}_0$  καθορίζεται μονοσήμαντα από τις μετρήσεις  $(\underline{y}_k)_{k=0}^{n-1}$  και επομένως το  $\Sigma_0(A, C)$  είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

( $\Rightarrow$ ): Έστω ότι  $\Sigma_0(A, C)$  πλήρως παρατηρήσιμο αλλά  $\text{Rank}(\Gamma_0) < n$ . Τότε  $\exists \underline{\zeta} \in \mathbb{R}^n, \underline{\zeta} \neq 0$ , π.ω  $\Gamma_0 \underline{\zeta} = \underline{0}$

$$\Rightarrow C \underline{\zeta} = \underline{0}, CA \underline{\zeta} = \underline{0}, \dots, CA^{n-1} \underline{\zeta} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow CA^k \underline{\zeta} = \underline{0} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

Συμπεραίνουμε ότι το  $\Sigma_0(A, C)$  δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο γιατί είναι αδύνατον από την ακολουθία εξόδου  $(\underline{y}_k)_{k=0}^N$  (μέσ ανθωάρσα μέγιστο  $N$ ) να διακρίνουμε αν η αρχική κατάσταση είναι  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  ή  $\underline{x}_0 = \underline{\zeta} (\neq 0)$ . □

Θεώρημα: (Δυσκρότητα ελεγχιμότητας / παρατηρησιμότητας).  $\Sigma_c(A, B)$  πλήρως ελεγχίμο αν και μόνο αν  $\Sigma_0(A^T, B^T)$  πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη:

$$\Sigma_c(A, B) \text{ πλήρως ελεγχίμο} \Leftrightarrow \text{Rank}([B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]) = n$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank} \left( \begin{bmatrix} B^T \\ A^T B^T \\ \vdots \\ A^T (A^T)^{n-1} B^T \end{bmatrix} \right) = n \Leftrightarrow \Sigma_0(A^T, B^T) \text{ πλήρως παρατηρήσιμο.}$$

□

Παρατήρηση: Ο ~~π~~ μη δεικνωμένος τω πίνακα  $\Gamma_0$ ,

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{N}_r(\Gamma_0) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \Gamma_0 \underline{x} = \underline{0} \} \text{ είναι ο "μη-}$$

παρατηρήσιμος" υπόχωρος τω  $\Sigma_0(A, C)$ . Από το Θεώρημα

Rank-Nullity της Γραμμικής Άλγεβρας έχουμε:

$$\text{Rank}(\Gamma_0) + \text{Null}(\Gamma_0) = n \Rightarrow \dim(\mathcal{X}_0) = n - \text{Rank}(\Gamma_0)$$

$$\text{όπου } \text{Rank}(\Gamma_0) = \dim \mathcal{R}(\Gamma_0) \text{ και } \text{Null}(\Gamma_0) = \dim \mathcal{N}_r(\Gamma_0)$$

Μπορούμε να δειξουμε ότι ο  $\mathcal{X}_0$  είναι ο φεταλότερος

A-αναλλοιώτος υπόχωρος τω  $\mathbb{R}^n$  που περιέχεται

στον  ~~$\mathcal{N}_r(\Gamma_0)$~~   $\mathcal{N}_c(C)$ . (Άσκηση!).

Θεώρημα:  $\Sigma_0(A, C)$  πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\text{Rank} \left( \begin{bmatrix} s_0 I_n - A \\ \hline C \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall s_0 \in \sigma(A)$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε δεικνόμενα ελεγχιμότητας

και παρατηρησιμότητας. Έχουμε:

$\Sigma_0(A, C)$  πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν  $\Sigma_c(A^T, C^T)$   
πλήρως ελεγχίμο,

$$\Leftrightarrow \text{Rank} \left( \begin{bmatrix} s_0 I_n - A^T & C^T \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall s_0 \in \sigma(A^T) = \sigma(A)$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank} \left( \begin{bmatrix} s_0 I - A \\ \hline C \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall s_0 \in \sigma(A)$$

□