Χώροι Banach:

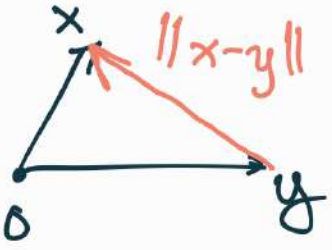
→ Ορ: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Νόρμα στον X λέγεται κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί:

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$, και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in X$.

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$.

Ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.



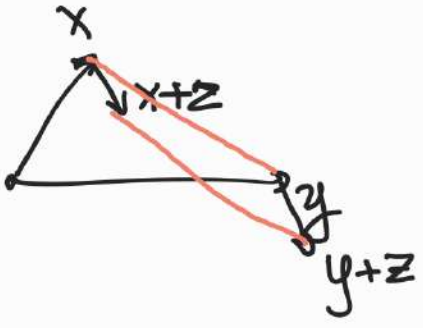
→ Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον X επάγει τη μετρική $d_{\|\cdot\|} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Αυτή η μετρική έχει 2 πρόσθετες ιδιότητες:

① $d_{\|\cdot\|}(x+z, y+z) = d_{\|\cdot\|}(x,y)$

② $d_{\|\cdot\|}(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d_{\|\cdot\|}(x,y)$.



Ορ: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος **Banach** αν ο $(X, d_{\|\cdot\|})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλ. αν:

κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία **Cauchy** στον $(X, \|\cdot\|)$ ($\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n,m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$)

συγκλίνει στο $(X, \|\cdot\|)$. (υπάρχει $x \in X$: $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$).

→ **Πρόταση:** Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, και $Y \leq X$ (↓ υπόχωρος). Τότε: ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach $\Leftrightarrow$ Y κλειστό υποσύνολο του $(X, \|\cdot\|)$.

→ **Συμβολισμός:** Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

- $B_{(X,\|\cdot\|)}(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ $(r>0)$.
  ↳ ανοικτή μπάλα.
- $\tilde{B}_{(X,\|\cdot\|)}(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$ $(r \geq 0)$

- $S_{(X,\|\cdot\|)}(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$.

$\rightsquigarrow \forall A \subseteq X$:

- $A^\circ :=$ το εσωτερικό του A στον $(X, \|\cdot\|)$
  $=$ η ένωση των $B_{(X,\|\cdot\|)}(x_0, r)$ που περιέχονται στο A.

- $\bar{A} :=$ η κλειστότητα του A στον $(X, \|\cdot\|)$
  $= \{x \in X : \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο A ώστε $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$
  $= \{x \in X : B(x, r) \cap A \neq \emptyset,\ \forall r > 0\}$.

- $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ =$ το σύνορο του A.

⚠ $\tilde{B}(x_0, r) = \overline{B(x_0, r)}$ $\forall x_0 \in X$, $\forall r > 0$, εδικά για χώρους με νόρμα.

⚠ $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r)$
$= x_0 + r \cdot B(0, 1)$

Παραδείγματα χώρων Banach

(I) Χώροι πεπερασμένης διάστασης:

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < +\infty$,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

$p=1$: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$p=2$: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{1/2}$

$|x_1| = 100$ / $|x_1| = 1/100$

Καθώς μεγαλώνει το p, δίνουμε πιο πολύ βάρος στα μεγάλα $|x_i|$ και λιγότερο στα μικρά.

$p=\infty$: κρατάμε μόνο το μέγιστο $|x_i|$.

$B^{(0,1)}_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)}$ $B^{(0,1)}_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)}$ $B^{(0,1)}_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)}$







(II) Οι χώροι ℓ^p (χώροι ακολουθιών):

→ Για $1 \le p < +\infty$:

$$\ell^p := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{με } \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \}.$$

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \quad \left(< +\infty \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p \right).$$

Ο $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.

→ Για $p = \infty$:

$$\ell^\infty := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{με } \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \} = \text{ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών.}$$

(πχ. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$).

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \quad \left(< +\infty \Leftrightarrow (a_n)_n \in \ell^\infty \right).$$

Ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

(III) Χώροι φραγμένων συναρτήσεων:

Έστω $X \neq \emptyset$ (όχι απαραίτητα μ.χ.)

$$B(X) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ με } |f| \leq M \}$$

$$\Updownarrow$$

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in X$$

= το σύνολο των φραγμένων (πραγματικών ή μιγαδικών) συναρτήσεων στο X.

$$\forall\, f \in B(X), \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty.$$

- Ο $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα:

Απόδ.: $\|\cdot\|_\infty : B(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, και:

(+) $\|f\|_\infty \geq 0 \ \forall f \in B(X)$, και $\|f\|_\infty = 0$

$$\Longleftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in X$$

$$\Longleftrightarrow f = 0 \text{ στον } B(X).$$

(*) $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

(*) $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)|$

$\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)|$

$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Πρόταση: Ο $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Απδ.: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. Cauchy στον $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$. Θ.Δ.Ο $\exists f \in B(X)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_0$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (*)$$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$, $\boxed{|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X.}$

Άρα, $\forall x \in X$, η $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ακολ. Cauchy στο $\underbrace{(\mathbb{K}, |\cdot|)}_{\text{Banach}} \Rightarrow$

η $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $f(x) \in \mathbb{K}$. Άρα, ορίσαμε $f: X \to \mathbb{K}$ ώστε $f_m \to f$ κ.σ.

ΘΔΟ $f \in B(X)$ και $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$(\forall) \xrightarrow{m\to+\infty} \forall\, n \geq n_0, \quad \forall\, x \in X,$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \forall\, n \geq n_0, \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$

Άρα, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ ✓.

<u>$f \in B(X)$</u> : $\|f_n - f\|_\infty$ πεπερασμένη για κάποιο n, άρα $f_n - f \in B(X)$ } $\Rightarrow$ για αυτό το n. Επίσης: $f_n \in B(X)$ }

$\Rightarrow \underbrace{f_n - (f_n - f)}_{f} \in B(X).$

$B(X)$ διανυσμ. χώρος

■

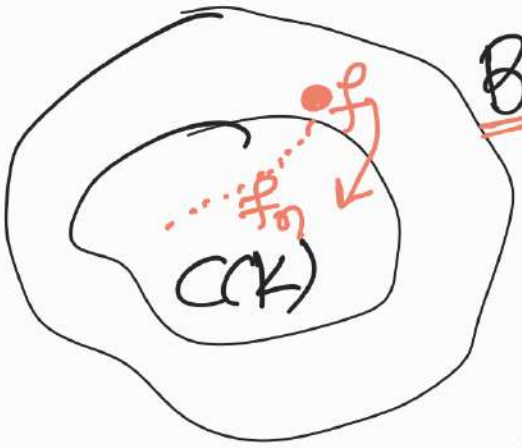
(IV) Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος.

$$C(K) := \{ f : (K,d) \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ συνεχής} \}.$$

- Ο $C(K)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}$.
- $C(K) \subseteq B(K)$: Αν $f : (K,d) \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι συνεχής, τότε είναι φραγμένη

Πρόταση: Ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Απόδ: Αφού $C(K) \leq B(K)$, και ο $(B(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι Banach, αρκεί ΝΔΟ το σύνολο $C(K)$ είναι κλειστό στον $(B(K), \|\cdot\|_\infty)$.



Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο $C(K)$, με $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, για κάποια $f \in B(K)$.

ΘΔΟ $f \in C(K)$: ΘΔΟ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$.

- Ξ n_0 ώστε $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \varepsilon$.
- Η $f_{n_0} : K \to \mathbb{K}$ είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ Ξ $\delta > 0$: αν $x, y \in K$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$.

Άρα, τέλος και δει:

$$|f(x) - f(y)| \le \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\text{"}\varepsilon\text{"}} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)|$$

$$+ \underbrace{|f_{n_0}(y) - f(y)|}_{< \varepsilon}$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Άρα, f ομοιόμορφα συνεχής

$$\Rightarrow f \in C(K).$$ ∎

V Οι χώροι $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

1η περίπτωση: $1 \leq p < +\infty$.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{K} \text{ μετρήσιμη, ώστε } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \},$$

όπου: $f \sim g \overset{\text{ορ}}{\iff} f = g$ μ-σ.π.

$$\iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Δηλ., στον $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ τα διανύσματα f, g θεωρούνται το <u>ίδιο</u> διάνυσμα αν $f = g$ μ-σ.π.

Αν $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}$ μετρήσιμη, ορίζεται καλά η ποσότητα

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$ αλλά ίσως είναι άπειρη.

$$\|f\|_p < +\infty \iff f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Ο $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με <u>νόρμα</u>, και μάλιστα <u>χώρος Banach</u> (Ανάλυση Ι).

⚠ • $\|f - g\|_p = 0 \iff \int_X \overbrace{|f-g|^p}^{\geq 0} \, d\mu = 0$

$$\Leftrightarrow |f-g|^p = 0 \quad \mu\text{-σ.π.}$$

$$\Leftrightarrow f = g \quad \mu\text{-σ.π.}$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\sim)}{f} = g \quad \text{στον } L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

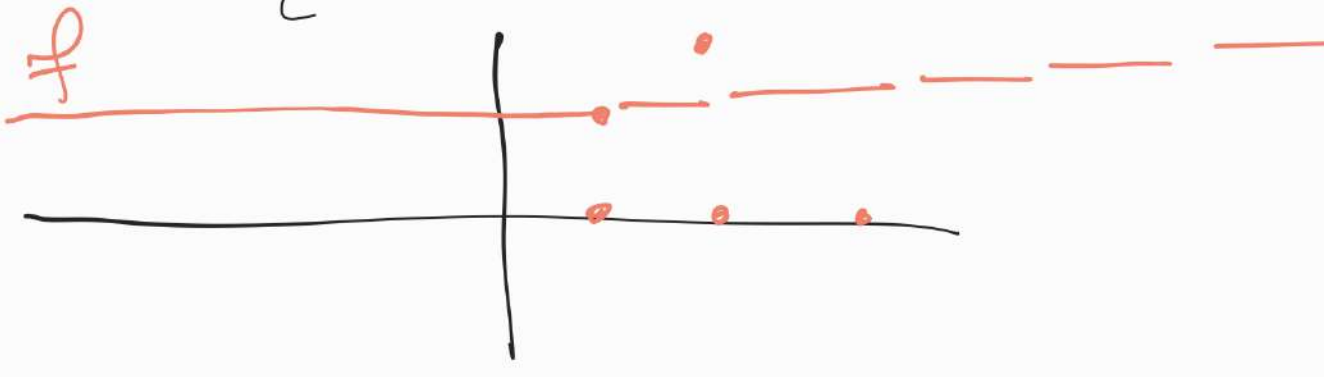
- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
  (Ανισότητα Minkowski).

2η περίπτωση: $p = \infty$.

L^∞ := ο χώρος των <u>ουσιωδώς</u> φραγμένων συναρτήσεων.

π.χ. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \forall x \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



$$L^\infty(X,\mathcal{A},\mu) := \{ f : (X,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{K} : f$$

μετρήσιμη και $\exists M \in \mathbb{R}$

ώστε $|f| \le M$ μ-σ.π. $\}$

$\Downarrow$

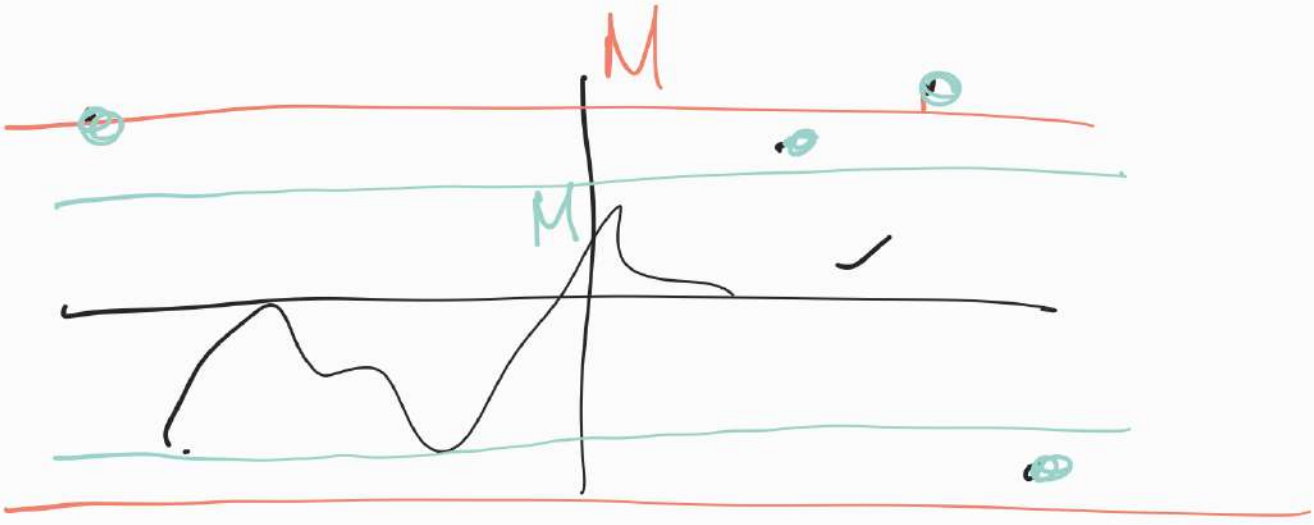
$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > M\}\right) = 0.$$

$\forall f : (X,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{K}$ μετρήσιμη,

$\|f\|_\infty :=$ το μικρότερο $M \ge 0$ ώστε

$|f| \le M$ μ-σ.π.

$$= \min \inf \{ M \ge 0 : |f| \le M \ \mu\text{-σ.π.} \}$$



$\|f\|_\infty < +\infty \iff f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Ο $(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, και μάλιστα χώρος Banach. (Ανάλυση Ι).

⚠ Και πάλι, $\|f-g\|_\infty = 0$

$\iff f = g$ μ-σ.π.

$\iff f = g$ στον $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

→ Ειδικές περιπτώσεις χώρων $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$:

① $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$

↓ μέτρο απαρίθμησης:

$\forall A \subseteq \mathbb{N}$, $\nu(A) := \#A$.

Тогда:

$$L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;:\; f \text{ измерима}, \int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\nu < +\infty \right\}$$

$$= \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;:\; \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p < +\infty \right\}$$

$$= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \;:\; \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\} = l^p.$$

$f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f = g$ ν-с.п.

$\Longleftrightarrow \nu\left(\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \nexists\, n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)$

$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = g(n)$

$\Longleftrightarrow f = g$ <u>поточечно</u> к.с.

Кон: $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\nu \right)^{1/p}$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p},$$

Sind. $\| (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$.

Also: $\left(L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu), \|\cdot\|_p \right)$

$= (\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

$$L^\infty(X,\mathcal{A},\mu) := \{ f : (X,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{K} : f \text{ μετρήσιμη και } \exists M \in \mathbb{R} \text{ ώστε } |f| \le M \ \mu\text{-σ.π.} \}/N$$

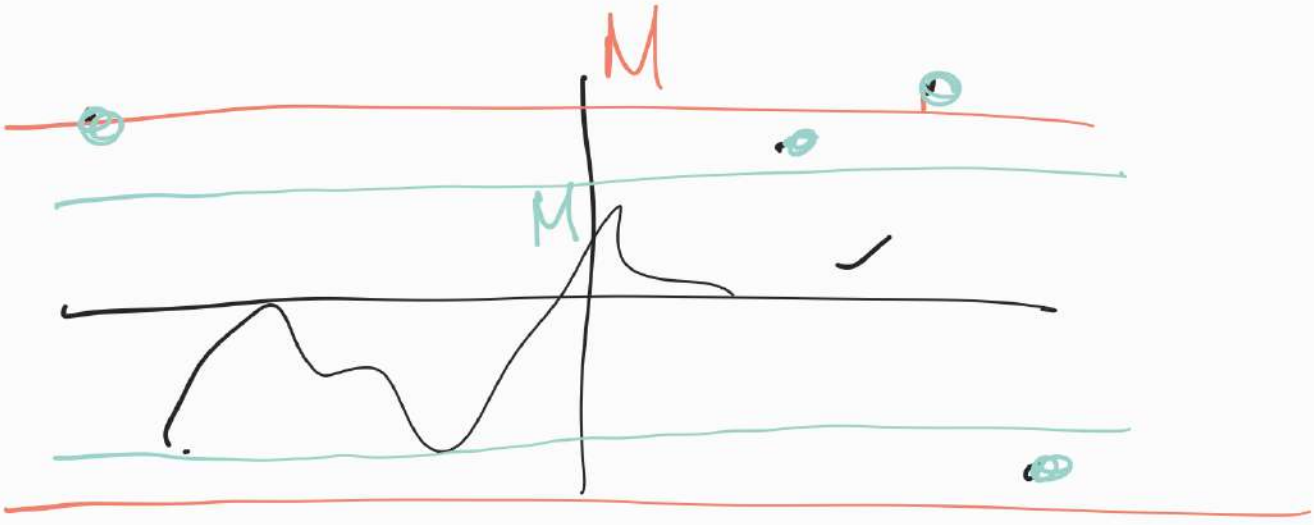
$$\Downarrow$$

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0.$$

$\forall f : (X,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{K}$ μετρήσιμη,

$\|f\|_\infty :=$ το μικρότερο $M \ge 0$ ώστε $|f| \le M$ μ-σ.π.

$$= \inf \{ M \ge 0 : |f| \le M \ \mu\text{-σ.π.} \}$$ (min)



$\|f\|_\infty < +\infty \iff f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Ο $(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, και μάλιστα χώρος Banach. (Ανάλυση Ι).

⚠ Και πάλι, $\|f-g\|_\infty = 0$

$\iff f = g$ μ-σ.π.

$\iff f = g$ στον $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

→ Ειδικές περιπτώσεις χώρων $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$:

① $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$

↓ μέτρο απαρίθμησης:

$\forall A \subseteq \mathbb{N}$, $\nu(A) := \#A$.

Τώρα: για $1 \le p < \infty$

$$L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;:\; \int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\nu < +\infty \right\}$$

$$= \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;:\; \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p < +\infty \right\}$$

$$= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \;:\; \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\} = \ell^p.$$

$f \sim g \overset{\text{ορ}}{\iff} f = g$ ν-σ.π.

$\iff \nu\left(\{ n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n) \} \right) = 0$

$\iff \nexists\, n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = g(n)$

$\iff f = g$ παντού κ.σ.

Και: $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\nu \right)^{1/p}$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p},$$

δηλ. $\| (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$.

Άρα: $\left(L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu), \|\cdot\|_p \right)$

$= (\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

Για $p=\infty$:

$L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) := \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{K} : f$ μετρήσιμη και $\exists M \in \mathbb{R}: |f| \le M$ ν-σ.π. $\}$ / ~

$= \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{K} : f$ φραγμένη$\}$

$= \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη$\}$

$= \ell^\infty$.

Και: $\forall\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{K}$,

$$\|f\|_\infty := \min\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ ν-σ.π.}\}$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|, \quad \text{δηλ.}$$

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty}$$

↑ ουσιωδες sup.

Άρα: $\left(L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu), \|\cdot\|_\infty\right) = (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

② $(X, \mathcal{A}, \mu) = (E, \mathcal{L}(E), \lambda)$, όπου:

E: Lebesgue-μετρήσιμο $\subseteq \mathbb{R}^d$,

$\mathcal{L}(E) := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A \subseteq E$ και Lebesgue-μετρήσιμο$\}$

$\lambda :=$ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$.

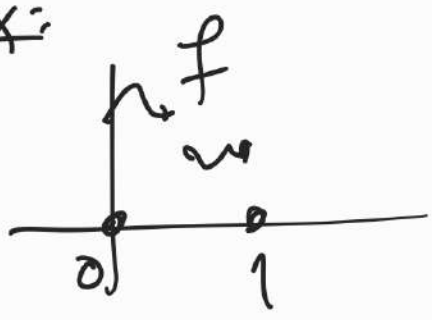
$L^p(E) := L^p(E, \mathcal{L}(E), \lambda)$

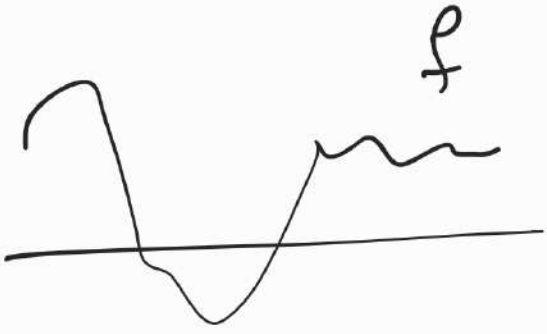
$= \{f : (E, \mathcal{L}(E), \lambda) \to \mathbb{K} : f$ Lebesgue-

μετρήσιμη και $\|f\|_p < +\infty \}/\sim$,

όπου $f \sim g \iff f = g$ λ-σ.π.

Πχ:





$L^p([0,1])$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p}$$

$(p < +\infty)$

$L^p(\mathbb{R})$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$$

→ Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι χώροι $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ μεταξύ τους καθώς το p αλλάζει;

Απάντηση: Εξαρτάται από τον $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Μας βοηθάει η ανισότητα Hölder:

→ **Πρόταση:** Έστω $1 \le p \le \infty$, και p' ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. $\left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$.

$\Rightarrow (1 \le p' \le \infty)$

Τότε, $\forall\, f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$,

$$\left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right| \le \int_X |f \cdot g| \, d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

αν $\int_X |f \cdot g| \, d\mu < +\infty$

Πόρισμα: Έστω $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη.

Τότε $\forall\, 1 \le p \le q \le \infty$, έχουμε:

$$\|f\|_p \le \|f\|_q \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Απόδειξη: $\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu$

$$\le \left[\int_X \left(|f|^p \right)^{q/p} d\mu \right]^{p/q} \cdot \left(\int_X 1^{\frac{q}{q-p}} d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}}$$

($|f|^p$: ≥ 1 ; $q/p \ge 1$)

$$= \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{p/q} \cdot \left(\int_X 1 \, d\mu \right)^{1 - \frac{p}{q}}$$

$$= \|f\|_q^p \cdot \mu(X)^{1 - \frac{p}{q}}$$

$$\Longrightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} .$$

■

Άρα:

(I) Χώροι πεπερασμένου μέτρου:

→ Πρόταση: Αν ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ικανοποιεί: $\mu(X) < +\infty$,

τότε: $\forall \; 1 \leq p \leq q \leq \infty$, έχουμε:

$$L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$ Μάλιστα:

$\exists \; C_{p,q}$ ώστε $\|f\|_p \leq C_{p,q} \cdot \|f\|_q$,

$\forall \; f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{K}$ μετρήσιμη.

Απόδειξη: $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \underbrace{\mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}}_{\text{!!. } C_{p,q} < +\infty}$,

άρα:

και αν $f \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$,

τότε το δεξί μέλος είναι πεπερασμένο

$\Rightarrow f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Οπότε:

$L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

→ Παράδειγμα: $L^p([0,1])$:

$\forall f: [0,1] \to \mathbb{K}$ Lebesgue μετρήσιμη,

έχουμε: $\forall \ 1 \leq p \leq q \leq +\infty$,

ισχύει: $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Δηλαδή: $\|f\|_p \nearrow$ καθώς $p \nearrow$.

■

(II) Χώροι ℓ^p: Ισχύει ακριβώς το αντίστοιχο...

→ Πρόταση: Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Τότε,

$\ell^p \subseteq \ell^q$. Μάλιστα:

$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στο $\mathbb{K}$,

$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_q \leq \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p$.

Δηλ: $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p \searrow$ καθώς $p \nearrow$.

Απδ: Περίπτωση: $p < q < \infty$:

Θέλουμε: $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}$ $q>p$

$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^q \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p\right)^{q/p}$

Αρκεί ΝΑΟ: (*) $\sum_{n=1}^{K}|a_n|^q \le \left(\sum_{n=1}^{K}|a_n|^p\right)^{q/p}$ $\forall K\in\mathbb{N}$.

(πχ.: $\sum_{n=1}^{K}|a_n|^2 \le \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{K}|a_n|\right)^2}_{p=1,\ q=2}$)

$\left(\sum_{n=1}^{K}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{K}|a_n|\right) = \sum_{n,m=1}^{K}|a_n|\cdot|a_m| \ge \sum_{n=1}^{K}|a_n|^2$)

Ξέρουμε ότι $\forall\, x_1,\dots,x_K \ge 0$, $\forall\, \alpha \ge 1$,

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_K^\alpha \le (x_1+x_2+\dots+x_K)^\alpha .$$

Άρα: $\sum_{n=1}^{K}|a_n|^{q=\frac{q}{p}\cdot p} = \sum_{n=1}^{K}\underbrace{\left(|a_n|^p\right)}_{=x_n}{}^{q/p}$ $\alpha=\frac{q}{p}\ge 1$

$\le \left(\sum_{n=1}^{K}|a_n|^p\right)^{q/p}$ ✓.

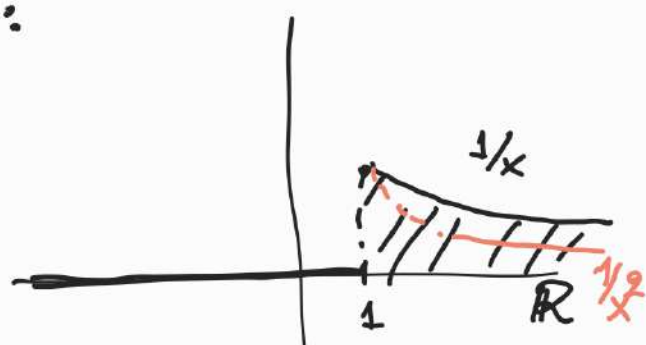
■

(III) Οι χώροι $L^p(\mathbb{R})$: $\forall\ 1 \le p \ne q \le +\infty$,

- $L^p(\mathbb{R}) \not\subseteq L^q(\mathbb{R})$, και - $L^q(\mathbb{R}) \not\subseteq L^p(\mathbb{R})$.

Πχ: $\exists\ f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f \notin L^2(\mathbb{R})$
και $\exists\ g \in L^2(\mathbb{R})$ με $g \notin L^1(\mathbb{R})$:

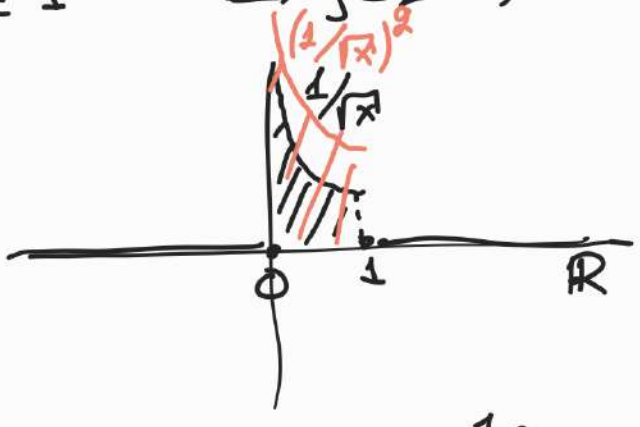
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \ge 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} |g|\,d\lambda = \int_1^{+\infty} |g(x)|\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty \Rightarrow g \notin L^1(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g|^2\,d\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1 < +\infty \Rightarrow g \in L^2(\mathbb{R}).$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



$$\int |f|\,d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 < +\infty \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$\int |f|^2\,d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_0^1 = +\infty \Rightarrow f \notin L^2(\mathbb{R}).$$

Παίρνω δύο δούμε ότι αν $1 \le p \ne q \le +\infty$, (χειρόγραφα...)

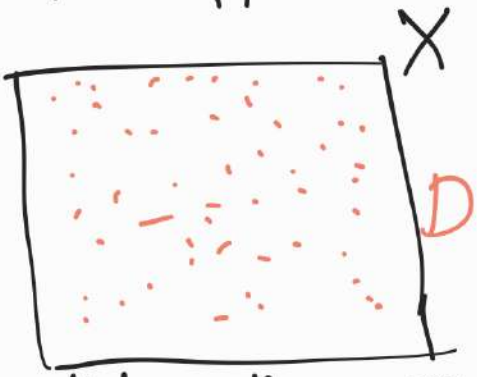
$\ell^p \cap \ell^q$ πυκνός στον $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$,

$L^p([a,b]) \cap L^q([a,b])$ πυκνός στον $(L^q([a,b]), \|\cdot\|_q)$,

$L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ πυκνός στον $(L^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$.

→ Πυκνότητα και διαχωρισιμότητα:

→ Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.



- Ένα $D \subseteq X$ λέγεται πυκνό στον $(X, \|\cdot\|)$ αν: $\overline{D} = X$,
δηλ: αν $\forall x \in X$, υπάρχει ακολ. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του D ώστε $\|d_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται διαχωρίσιμος αν έχει πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο.

⚠ Γιατί μας νοιάζει αν ένας $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος;

(1) Είναι μία ένδειξη του πόσο περίπλοκος είναι ο $(X, \|\cdot\|)$. π.χ. οι $L^p([a,b])$, $l^p, L^p(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμοι $\forall\, 1 \le p < +\infty$, αλλά οι $L^\infty([a,b])$, $l^\infty, L^\infty(\mathbb{R})$ δεν είναι.

(2) Μας ενδιαφέρει πολύ είναι κάποιο πυκνό $D \subseteq X$, ώστε να καταλάβουμε διδιάστατες του X and το D.

(I) Χώροι l^p:

→ Πρόταση: Ο $(l^p, \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος $\forall\ 1 \leq p \neq \infty$.

Απόδ: (Ιδέα: $x = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \in l^p$.
$x_1 = (a_1\ 0.\ 0,\ 0,\ 0, \dots)$
$x_2 = (a_1, a_2, 0, 0, \dots$
$\ddots$)

Βήμα 1: Ο χώρος $C_{00} := \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}\ \forall n$ και $\exists\ n_0 : a_n = 0\ \forall n \geq n_0 \}$
= ο χώρος των ακολ. με πεπερασμένο φορέα
είναι πυκνός στον $(l^p, \|\cdot\|_p)$:
Έστω $x = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in l^p$, δηλ. $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n := (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in l^p$.
$$\|x_n - x\|_p = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Βήμα 2: $D := \{ (q_n)_{n \in \mathbb{N}} : q_n \in \mathbb{Q}$ αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
ή $q_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ αν $\mathbb{K} = \mathbb{C} \}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, και $\exists n_0 \in \mathbb{N} : q_n = 0 \ \forall n \geq n_0 \}$.

Το D είναι πυκνό στον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$:

Έστω $y = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, 0, \dots) \in c_{00}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ξ $q_1, q_2, \dots, q_N$ "ρητοί"

ώστε $|q_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{N}$ $\forall i = 1, \dots, N$.

Τότε, το $d = (q_1, q_2, \dots, q_N, 0, 0, \dots) \in D$

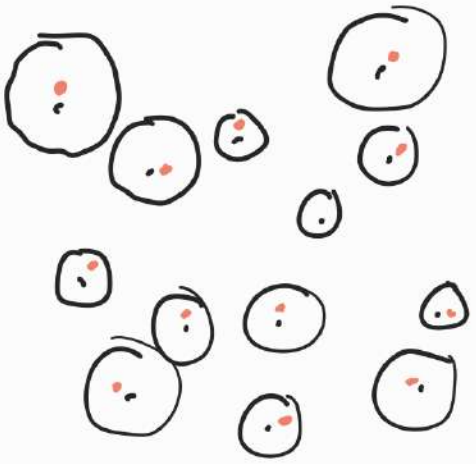
και $\|d - y\|_p = \sum_{i=1}^{N} |q_i - a_i|^p < \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^p \right)^{1/p}$

$= \frac{\varepsilon}{N} \cdot N^{1/p} = \frac{\varepsilon}{N^{1 - \frac{1}{p}}} \leq \varepsilon$ ($N^{1-\frac{1}{p}} > 0$)

Άρα, το D είναι αριθμήσιμο, πυκνό $\subseteq (\ell^p, \|\cdot\|_p)$. ■

→ Πρόταση: Ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Λήμμα: Έστω ότι σε έναν $(X, \|\cdot\|)$ μπορούμε να βρούμε βέλες ανοιχτές μπάλες $B(x_i, r_i)$, με $i \in I$, για κάποιο σύνολο δεικτών I. Τότε, κάθε πυκνό $D \subseteq (X, \|\cdot\|)$ έχει $\#D \geq \#I$.



Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B} := \{B(x_i, r_i) : i \in I\}$

$\forall\ B(x_i, r_i) \in \mathcal{B}$, υπάρχει στοιχείο $d_i \in D$ με $d_i \in B(x_i, r_i)$ (δηλ. $\|d_i - x_i\| < r_i$)

Αφού οι μπάλες στο $\mathcal{B}$ είναι ξένες, τα αντίστοιχα d_i είναι διαφορετικά ανά δύο.

Άρα, $\#D \geq \#\{d_i : i \in I\} = \#\mathcal{B} = \#I$. ■

→ Απόδ. Πρότασης: Αρκεί να βρούμε υπεραριθμήσιμα $x_i \in \ell^\infty$ ώστε $\|x_i - x_j\|_\infty = 1$, $\forall\ i \neq j$.

Τότε, οι αντίστοιχες $B(x_i, 1/2)$ θα είναι ξένες, και υπεραριθμήσιμες, άρα κάθε πυκνό $D \subseteq (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ θα είναι υπεραριθμήσιμο.

$$\Delta := \{x = (a_1, a_2, \ldots) : a_i = 0 \text{ ή } 1 \ \forall i \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^\infty.$$

$\forall\ a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ του Δ, με $a \neq b$, $\|a - b\|_\infty = 1$:

Αφού $a \neq b$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $a_{n_0} \neq b_{n_0}$

$\Rightarrow$ το ένα είναι 0 και το άλλο είναι 1

$\Rightarrow |a_{n_0} - b_{n_0}| = 1 \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| \geq 1$ $(= 1) \dots$

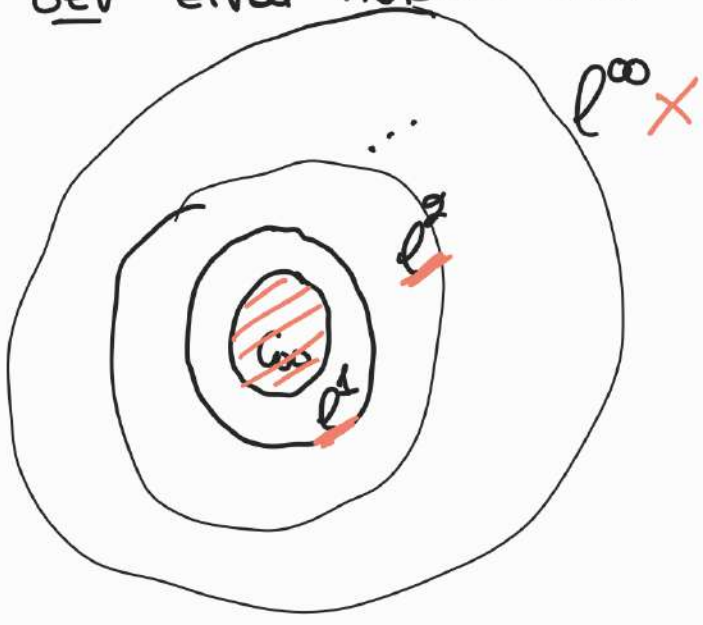
$\Rightarrow \|a - b\|_\infty \geq 1$ $(= 1) \dots$

■

→ Είδαμε: • $\ell^p \subsetneq \ell^q$ $\forall 1 \le p < q < +\infty$,

• c_{00} είναι πυκνός σε καθέ $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $\forall\, 1 \le p < +\infty$.

• Ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος, άρα ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.



(II) Χώροι φραγμένων / ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων.

→ Πρόταση: $B([0,1]) := \{ f : [0,1] \to \mathbb{K} : f \text{ φραγμένη} \}$.

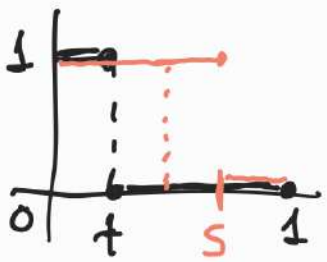
Ο $(B([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Θα βρούμε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων στον $B([0,1])$, που η απόσταση (ως προς $\|\cdot\|_\infty$) καθέ δύο να ισούται με 1.

Ορίζουμε, $\forall\ t \in (0,1)$, $B([0,1])$

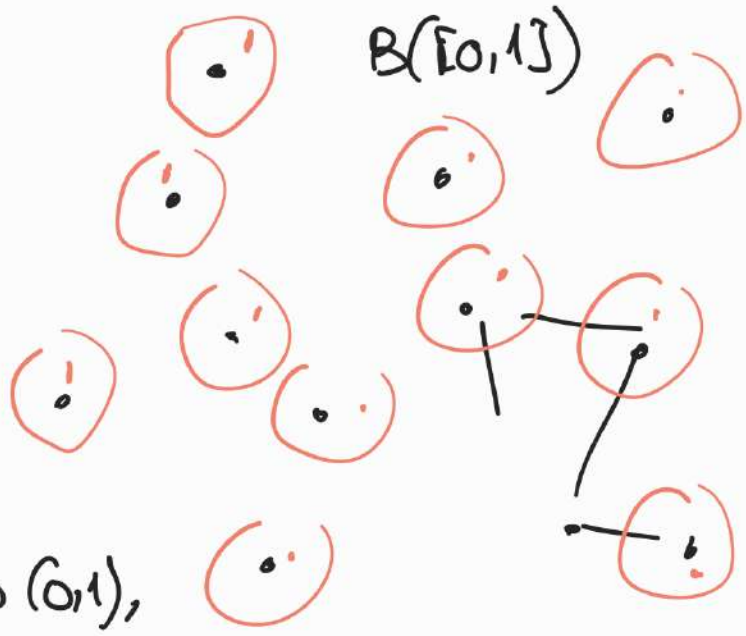
$f_t : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f_t(x) := \begin{cases} 1, & 0 \le x \le t \\ 0, & t < x \le 1 \end{cases}$$



$\forall\ t \neq s \in (0,1)$,

$\| f_t - f_s \|_\infty = 1$. ■



Με παρόμοια απόδειξη:

→ Πρόταση: Οι $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(L^\infty([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

δεν είναι διαχωρίσιμοι.

(III) Χώροι συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα:

→ Ορισμός: Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος.

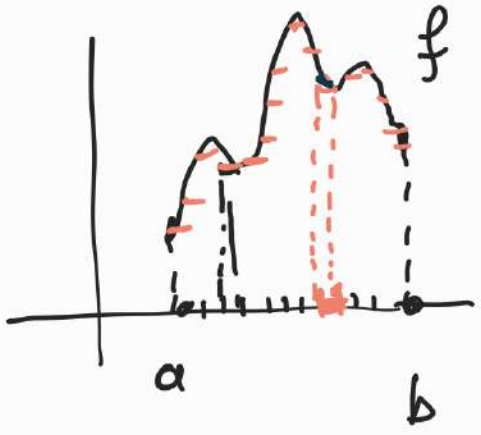
Ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος.

⇝ Προδέρμανη:

→ Πρόταση: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει κλιμακωτή $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

ώστε $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. ($g = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{I_i}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, I_i διαστήματα $\subseteq [a,b]$).



Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow \exists \delta > 0$: $\forall\, x,y \in [a,b]$ με $|x-y| < \delta$, έχουμε: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Άρα, χωρίζουμε το $[a,b]$ σαν ζέυη ένωση διαδοχικών διαστημάτων $I_1, I_2, \dots, I_n$, με $\lambda(I_i) < \delta$, $\forall i = 1,\dots,n$.

Ορίζουμε $\mu_i :=$ το μέσο του I_i, $\forall i = 1,\dots,n$.

Ορίζουμε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = \begin{cases} f(\mu_1), & x \in I_1 \\ f(\mu_2), & x \in I_2 \\ \vdots & \\ f(\mu_n), & x \in I_n \end{cases}$$

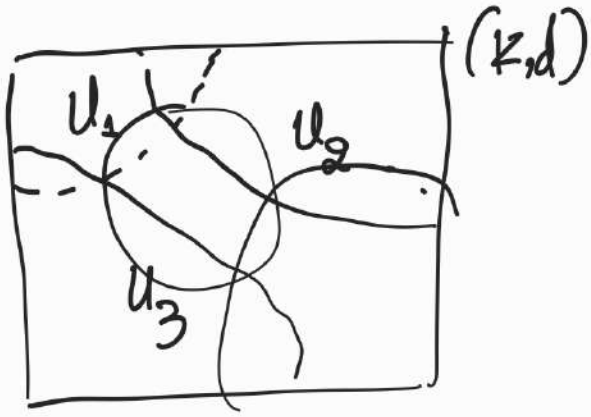
. Η g είναι κλιμακωτή, και:

$\forall\, i = 1,\dots,n$, $\forall\, x \in I_i$, $|g(x) - f(x)| = |f(\mu_i) - f(x)| \underset{|\mu_i - x| < \delta}{<} \varepsilon$.

Άρα, $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. ∎

Λήμμα 1: (Διαμέριση της μονάδας): Έστω (K,d) συμπαγής μ.χ. Έστω $U_1, U_2, \dots, U_n$ ανοιχτά $\subseteq (K,d)$,

με $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n = K$.



συνεχείς

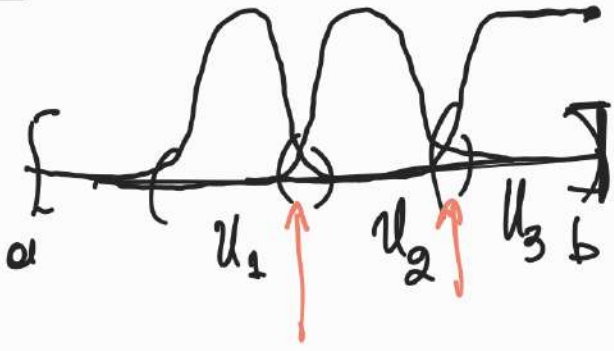
Τότε, υπάρχουν $\{\phi_i : K \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, ώστε:

(a) $0 \le \phi_i \le 1$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

(b) $\phi_i \equiv 0$ στο $K \setminus U_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

(c) $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n \equiv 1$ στο K.

Το σύνολο $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ λέγεται διαμέριση της μονάδας προσαρμοσμένη στα $U_1, \dots, U_n$.



→ Λήμμα 2: Έστω $(X, \|\cdot\|)$. Αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποχώρων του $(X, \|\cdot\|)$, με $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n}$, διάστασης, ώστε $\left(\forall x \in X,\ \mathrm{dist}_{\|\cdot\|}\left(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0\right)$.

τότε ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Κάθε F_n είναι διαχωρίσιμος:

αν $F_n = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\}$, τότε το

$D_n = \{ q_1 v_1 + \dots + q_m v_m : q_i \in \mathbb{Q} \}$ είναι πυκνό, αριθμήσιμο υποσύνολο του $(F_n, \|\cdot\|)$.

Άρα, $n \cup_{n=1}^{+\infty} D_n$ είναι πυκνό, αριθμήσιμο

$\subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n}$.

■

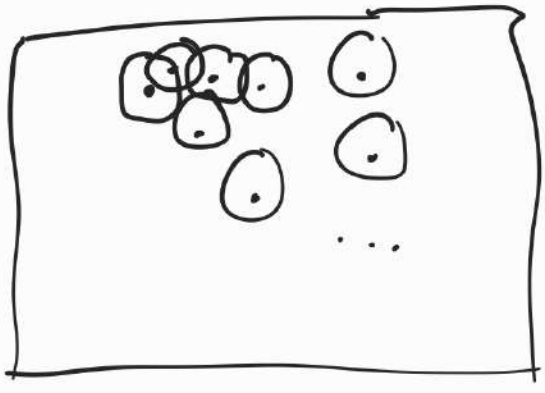
→ Απδδ. Θεωρήματος ($(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος) :

Έστω $f: K \to \mathbb{K}$ συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής,

άρα $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, x, y \in K$ με $d(x,y) < \delta$,

έχουμε: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



$$K = \bigcup_{x \in K} B(x, \delta)$$

$\Longrightarrow$ $\exists\, x_1, \dots, x_m \in K$

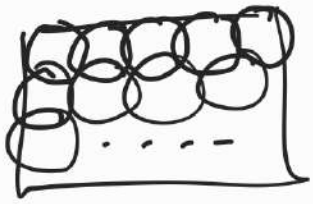
K συμπαγές

ώστε $K = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta)$.

Υπάρχει διαμέριση $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$

της μονάδας, προσαρμοσμένη

στις $B(x_1, \delta), \dots, B(x_m, \delta)$, ώστε



- $\phi_1 + \dots + \phi_m \equiv 1$ στο K
- $0 \le \phi_i \le 1$, $\forall\, i = 1, \dots, m$,
- $\phi_i \equiv 0$ στο $K \setminus B(x_i, \delta)$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Ορίζουμε $F_\varepsilon := \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ $(\leq C(K))$.

Ορίζουμε $g_f(y) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\ \phi_i(y)$ $\forall y \in K$.

Τότε: $g_f \in F_\varepsilon$ και $\|g_f - f\|_\infty < \varepsilon$:

$\forall y \in K$, $|f(y) - g_f(y)| = \left| f(y) - \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot\phi_i(y) \right|$

$f(y) = f(y)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\phi_i(y)}_{=1} = \sum_{i=1}^{m} f(y)\cdot\phi_i(y)$

$= \left| \sum_{i=1}^{m} (f(y) - f(x_i))\cdot\phi_i(y) \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |f(y)-f(x_i)|\cdot\phi_i(y).$

$= \sum_{i\in\{1,\dots,m\}:\ y\in B(x_i,\delta),\ \text{δηλ. } d(y,x_i)<\delta}$ $\underbrace{|f(y)-f(x_i)|}_{<\varepsilon}\cdot\phi_i(y)$

αν $y \notin B(x_i,\delta)$ (για κάποιο i), τότε $\phi_i(y) = 0$.

$< \varepsilon \cdot \sum_{i\in\{1,\dots,m\}:\ d(y,x_i)<\delta} \phi_i(y) \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\phi_i(y)}_{=1} = \varepsilon.$

Άρα, $\forall \varepsilon > 0$, βρήκαμε $F_\varepsilon \leq C(K)$, πεπερ. διάστασης, ώστε $\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\infty}(f, F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Επιλέγοντας $\varepsilon = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε $F_n \leq C(K)$, πυκν. διάστασης, ώστε:

$$\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\infty}(f, F_n) < \frac{1}{n} .$$

Έτσι, $\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\infty}\left(f, \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \leq \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\infty}(f, F_n) < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\xrightarrow{n \to +\infty}$ $\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\infty}\left(f, \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = 0$,

άρα $f \in \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n}$. Άρα:

$$C(K) = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n} .$$

■

→ <u>Πρόταση 1</u>: Ο $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος $\forall\ 1 \leq p < +\infty$.

<u>Απόδ</u>: $\forall\ f \in C([a,b])$,

$$\int_{[a,b]} |f|^p d\lambda \underset{|f| \leq \|f\|_\infty}{\leq} \int_{[a,b]} \|f\|_\infty^p \, d\lambda = \|f\|_\infty^p \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p}} \quad (*)$$

Ο $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ έχει αριθμήσιμο, πυκνό $\subseteq D$.

Άρα, $\forall\ f \in C([a,b])$, υπάρχει ακολ. $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$

στο D, με $\|f-d_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Από την (*), $\|f-d_n\|_p \le \|f-d_n\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \|f-d_n\|_p \to 0.$

Άρα, το D είναι πυκνό και στο $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$. ∎

→ Πρόταση 2: Έστω (K,d) συμπαγής μ.χ.

Έστω $\mathcal{B}(K) :=$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά $\subseteq (K,d)$.

$(=$ η Borel σ-άλγεβρα στο $K)$.

Έστω μ πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}(K)$.

Τότε: ο $(C(K), \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος

$$\left[\text{⚠}\ \|f\|_p = \left(\int_K |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}\right].$$

→ Απδ: (όπως πριν): $\forall\, f \in C(K)$,

$$\|f\|_p = \left(\int_K |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_K \|f\|_\infty^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad (*)$$

$$= \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\mu(K)^{1/p}}_{<+\infty}$$

Ξέρουμε ότι ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος, άρα έχει κάποιο αριθμ., πυκνό υποσύνολο D.

Από την (*), το D είναι πυκνό και στον $(C(K), \|\cdot\|_p)$. ∎

(IV) Χώροι L^p, $1 \le p < +\infty$:

→ **Πρόταση 1:** Έστω (K,d) συμπαγής μ.χ., και μ περεραιωμένο μέτρο στη $\mathcal{B}(K)$.
Συμβολίζουμε $L^p := L^p(K, \mathcal{B}(K), \mu)$, $\forall 1 \le p < +\infty$.
Ο $(L^p, \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος, και μάλιστα ο $C(K)$ είναι πυκνός στον $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

Απδ.: Αφού ο $(C(K), \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος, αρκεί ΝΔΟ ο $C(K)$ είναι πυκνός στον $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

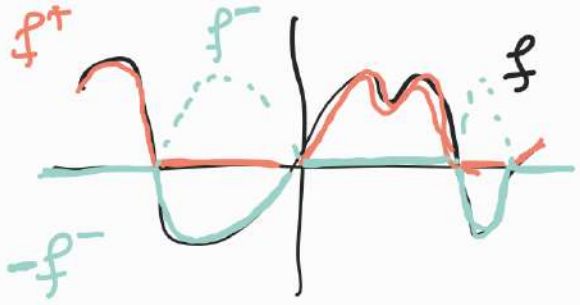
Πρέπει: $\forall f \in (L^p, \|\cdot\|_p)$ (δηλ. $f: K \to \mathbb{K}$ Borel-μετρήσιμη, $\int_K |f|^p d\mu < +\infty$),

ΝΔΟ:

(*) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, g: K \to \mathbb{K}$ συνεχής, ώστε $\|f-g\|_p < \varepsilon$.

Μεινώσεις:

(1) Αρκεί να δειχθεί η (*) για $f: K \to \mathbb{R}$, και μάλιστα για $f \ge 0$:



$$f = \underbrace{f^+}_{\geq 0} - \underbrace{f^-}_{\geq 0}$$

(2) Αρκεί να δειχθεί η (*) για $f(\geq 0)$ απλή

($s: K \to \mathbb{R}$ απλή αν: $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{B}(K)$):

Έστω $f: K \to [0, +\infty)$ Borel - μετρήσιμη, με $\int_K |f|^p d\mu < +\infty$

$\exists$ (αύξουσα ακολουθία) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων, με

$0 \leq s_n \nearrow f$ (κ.σ.). Από Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης, $\|s_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, δηλ.: $\int_K |s_n - f|^p d\mu \to 0$.

- $|s_n - f|^p \to 0$ κ.σ.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n - f|^p \leq (\underbrace{|s_n|}_{\leq |f|} + |f|)^p$

$= 2^p \cdot |f|^p$, και: $\int_K 2^p |f|^p d\mu < +\infty$. ⌟

Άρα, η τυχαία $f \geq 0$ προσεγγίζεται ασθενέστερα καλά ως προς την $\|\cdot\|_p$ από απλές συναρτήσεις.

Άρα, για να προσεγγίσουμε την f από συνεχείς,

αρκεί να προσέχουμε οποιαδήποτε απλή and συνεχές.

(IV) Χώροι L^p, $1 \le p < +\infty$:

→ **Πρόταση 1:** Έστω (K,d) συμπαγής μ.χ., και μ πεπερασμένο μέτρο στη $\mathcal{B}(K)$.
Συμβολίζουμε $L^p := L^p(K, \mathcal{B}(K), \mu)$, $\forall 1 \le p < +\infty$.
Ο $(L^p, \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος, και μάλιστα
ο $C(K)$ είναι πυκνός στον $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

Απδ.: Αφού ο $(C(K), \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος,
αρκεί ΝΔΟ ο $C(K)$ είναι πυκνός στον $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

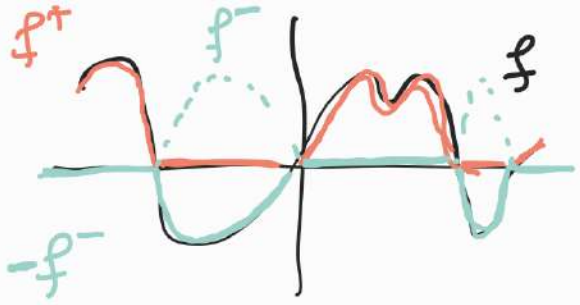
Πρέπει: $\forall f \in (L^p, \|\cdot\|_p)$ (δηλ. $f: K \to \mathbb{K}$ Borel-μετρήσιμη, $\int_K |f|^p d\mu < +\infty$),

ΝΔΟ:

(*) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, g: K \to \mathbb{K}$ συνεχής, ώστε $\|f-g\|_p < \varepsilon$.

Μεινόεις:

(1) Αρκεί να δειχθεί η (*) για $f: K \to \mathbb{R}$,
και μάλιστα για $f \ge 0$:



$$f = \underbrace{f^+}_{\geq 0} - \underbrace{f^-}_{\geq 0}$$

(2) Αρκεί να δειχθεί η (*) για $f(\geq 0)$ απλή

($s: K \to \mathbb{R}$ απλή αν: $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{B}(K)$):

Έστω $f: K \to [0, +\infty)$ Borel - μετρήσιμη, με $\int_K |f|^p d\mu < +\infty$

$\exists$ (αύξουσα ακολουθία) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων, με

$0 \leq s_n \nearrow f$ (κ.σ.). Από Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης, $\|s_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, δηλ.: $\int_K |s_n - f|^p d\mu \to 0$.

- $|s_n - f|^p \to 0$ κ.σ.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n - f|^p \leq (\underbrace{|s_n|}_{\leq |f|} + |f|)^p$

$= 2^p \cdot |f|^p$, και: $\int_K 2^p |f|^p d\mu < +\infty$. ⌟

Άρα, η τυχαία $f \geq 0$ προσεγγίζεται ασθενέστερα καλά ως προς την $\|\cdot\|_p$ από απλές συναρτήσεις.

Άρα, για να προσεγγίσουμε την f από συνεχείς,

αρκεί να προσεγγίσουμε οποιαδήποτε απλή από συνεχείς.

(3) Κάθε απλή $s: K \to \mathbb{R}$ είναι της μορφής

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \text{ για κάποια } a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{B}(K).$$

Άρα, αρκεί να προσεγγίσει κάθε χ_{A_i} χωριστά.

Άρα:

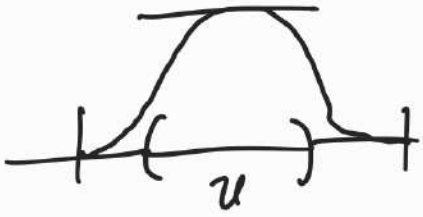
Έστω $\mathcal{A} := \{ A \in \mathcal{B}(K) : \exists\ (g_n)_n$ ακολουθία συνεχών $g_n : K \to \mathbb{R}$, με $0 \le g_n \le 1$, ώστε $\| g_n - \chi_A \|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \}$.

Θέλουμε: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(K)$. Ξέρουμε: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(K)$.

Θέλουμε: $\boxed{\mathcal{B}(K) \subseteq \mathcal{A}.}$ Αρκεί ΝΑΟ (α) $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, και (β) η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του (K, d).

(Τότε αυτόματα: $\mathcal{A} \supseteq$ σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά του (K, d), δηλ. τη $\mathcal{B}(K)$).

(β) Έστω $U \subseteq K$ ανοικτό στον (K, d).



Ορίζουμε $g_n : K \to \mathbb{R}$, με

$$g_n(x) := \frac{d(x, K\setminus U)}{d(x, K\setminus U) + \frac{1}{n}}, \quad \forall x \in K.$$

Τότε: $0 \le g_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, και

$$g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1, & x \in U \\ & (x \notin K\setminus U) \\ 0, & x \in K\setminus U \end{cases}$$

$$= \chi_U(x), \quad \forall x \in K.$$

Δηλ: $g_n \in C(K)$ $\forall n$,

$g_n \longrightarrow \chi_U$ κ.σ. στο K,

άρα, από Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης

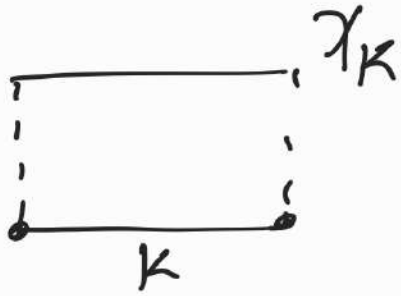
($\forall n \in \mathbb{N}$, $|g_n - \chi_U|^p \le (|g_n| + |\chi_U|)^p \le 2^p$,

και $\int_K 2^p \, d\mu = 2^p \mu(K) < +\infty$):

$$\int_K \underbrace{|g_n - \chi_U|^p}_{\downarrow 0} d\mu \to 0, \quad \text{δηλ.} \quad \|g_n - \chi_U\|_p \to 0.$$

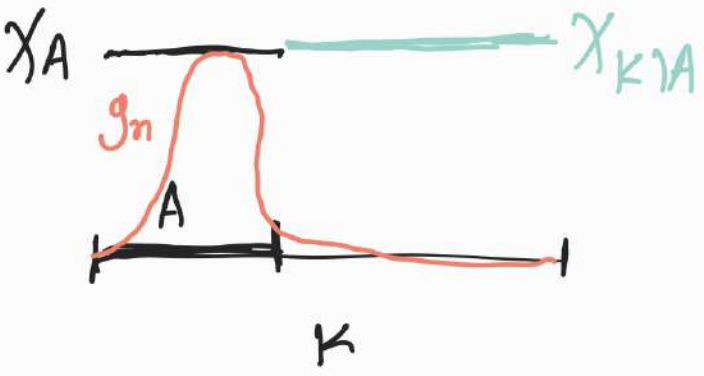
(α) $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα:

$\rightsquigarrow K \in \mathcal{A}$ ($g_n = \chi_K$ ($\equiv 1$ στο K), $\forall n \in \mathbb{N}$).



$\rightsquigarrow$ Αν $\underline{A \in \mathcal{A}}$, τότε: $\underline{K \setminus A \in \mathcal{A}}$:

$\exists\, (g_n)_n$ ακολ. στο $C(K)$, με $0 \le g_n \le 1$ και $\| g_n - \chi_A \|_p \to 0$.



$\chi_{K\setminus A} = 1 - \chi_A$ στο K

$\Rightarrow$ η $(1-g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ακολ. στο $C(K)$) ικανοποιεί:

- $0 \le g_n \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-g_n \le 1$,
- $\| (1-g_n) - \chi_{K\setminus A} \|_p = \| (1-g_n) - (1-\chi_A) \|_p$
  $= \| g_n - \chi_A \|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\rightsquigarrow$ Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε το $A \cap B \in \mathcal{A}$:

$\exists\, (f_n)_n$, $(g_n)_n$ ακολ. στο $C(K)$:

- $0 \le f_n \le 1$, $\forall n$, και $\| f_n - \chi_A \|_p \to 0$,
- $0 \le g_n \le 1$, $\forall n$, και $\| g_n - \chi_B \|_p \to 0$.

Θέλουμε να προσεγγίσουμε τη $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

Τότε: καθε $f_n \cdot g_n \in C(K)$, $0 \le f_n \cdot g_n \le 1$,

και:

$$\| f_n \cdot g_n - \chi_A \cdot \chi_B \|_p = \| f_n \cdot g_n - f_n \cdot \chi_B + f_n \chi_B - \chi_A \chi_B \|_p$$

$$\le \| f_n (g_n - \chi_B) \|_p + \| \chi_B \cdot (f_n - \chi_A) \|_p$$

$$\left(\int_K |f_n|^p \cdot |g_n - \chi_B|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left(\int_K |g_n - \chi_B|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

($|f_n| \le 1$)

$$\le \underbrace{\| g_n - \chi_B \|_p}_{\downarrow 0} + \underbrace{\| f_n - \chi_A \|_p}_{\downarrow 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Προς το παρόν, δείξαμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι αλγεβρα.

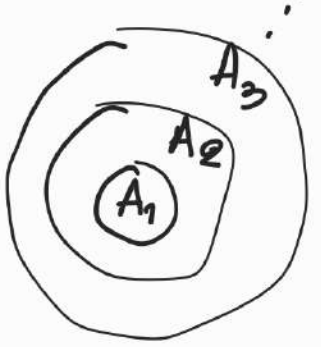
Για να αναβαθμίσουμε σε σ-άλγεβρα, αρκεί ΝΔΟ:

$\rightsquigarrow$ Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσα ακολ. στην $\mathcal{A}$,

τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\ g_n \in C(K)$, $0 \le g_n \le 1$, ώστε

$$\| \chi_{A_n} - g_n \|_p < \frac{1}{n} .$$



Τότε: $\| g_n - \chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n} \|_p \le$

$$\leq \underbrace{\|g_n - \chi_{A_n}\|_p}_{< \frac{1}{n} \to 0} + \underbrace{\|\chi_{A_n} - \chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}\|_p}_{= A}$$

$$\left(\int_{A \setminus A_n} 1^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

$$= \mu(A \setminus A_n)^{1/p} \xrightarrow{n \to +\infty} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (A \setminus A_n) \right)^{1/p}$$

$A \setminus A_n = B_n$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (A \setminus A_n) = \emptyset$

$$= 0.$$

Σε πεπ. χώρο μέτρου:

Αν $(B_n)_n \downarrow$, τότε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n).$$

Η $(A \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$,

και $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (A \setminus A_n) = \emptyset$

■

→ Πρόταση: $\forall \ 1 \leq p \neq +\infty$, ο χώρος $(L^p([a,b]), \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος, και το $C([a,b])$ είναι πυκνό στον $(L^p([a,b]), \|\cdot\|_p)$.

Απδ: Ξέρουμε ήδη ότι οι Borel-μετρήσιμες $f \in L^p([a,b])$ προσεγγίζονται από συνεχείς.

Θέλουμε να δείξουμε το ίδιο για όλες τις

Lebesgue-μετρήσιμες $f \in L^p([a,b])$.

Γεγονός → Κάθε $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ισούται με $F \cup N$, όπου το F είναι F_σ-σύνολο (και άρα $\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), και $\lambda(N)=0$. Άρα:

1ος τρόπος: Από αυτό μπορεί ΝΑΟ κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ Lebesgue-μετρήσιμη είναι ίση λ-σ.π. με κάποια Borel-μετρήσιμη $g:[a,b]\to\mathbb{K}$. (άσκηση).

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists\ h \in C([a,b]) : \|h-g\|_p < \varepsilon$

$g=f$ λ-σ.π. $\Leftarrow \|h-f\|_p$ (=)

■

2ος τρόπος: Ακολουθώντας την προηγούμενη απόδειξη, αρκεί να προσεγγίσουμε κάθε χ_A, $\forall A \in \mathcal{L}([a,b])$, από συνεχείς $g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Έστω $A \in \mathcal{L}([a,b]) \Rightarrow A = F \cup N$, για κάποια $F \in \mathcal{B}([a,b])$, $\lambda(N)=0$. Ξέρουμε ότι χ_F είναι Borel-μετρήσιμη στο $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists\ g \in C([a,b])$ ώστε $\underbrace{\|g-\chi_F\|_p}_{\|g-\chi_A\|_p} < \varepsilon$.

■

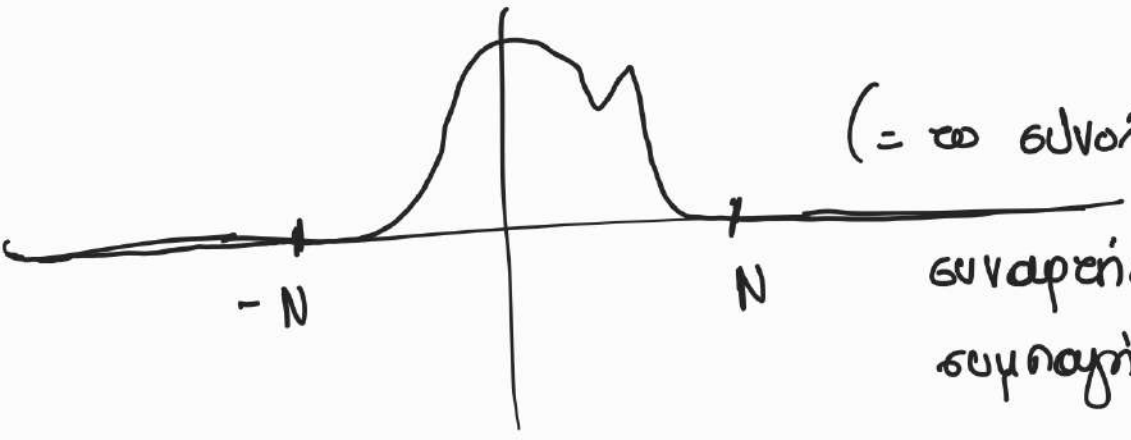
→ Πρόταση: Έστω $1 \leq p < +\infty$.

Ο $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος, και

το $C_c(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : f$ συνεχής,

και $\exists\, N \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) = 0$

$\forall\, |x| \geq N \}$.

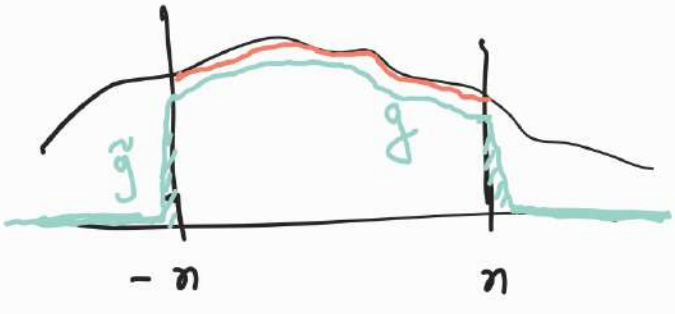


(= το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα).

είναι πυκνό στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

Απδ.: Έστω $f \in L^p(\mathbb{R})$. Τότε:

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f\chi_{[-n,n]}|^p \, d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$



από Θ. Κυρ. Σύγκλισης.

Άρα, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n$:

$$\|f - \underbrace{f\chi_{[-n,n]}}_{\in L^p([-n,n])}\|_p < \varepsilon.$$

$\exists\, g \in C([-n,n]) : \|g - f\chi_{[-n,n]}\|_p < \varepsilon.$

$\longrightarrow \|g - f\|_p < 2\varepsilon.$

Υπάρχει $\tilde{g} \in C_c(\mathbb{R})$: $\tilde{g}\chi_{[-n,n]} = g$

και $\|\tilde{g} - g\|_p < \varepsilon$. Άρα: $\|\tilde{g} - f\|_p < 3\varepsilon$. ∎

→ Ορισμός: $\mathrm{Step}(\mathbb{R}) := \{ l : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : l \text{ κλιμακωτή} \}$.

$\mathrm{Step}([a,b]) := \{ l : [a,b] \to \mathbb{K} : l \text{ κλιμακωτή} \}$.

Ξέρουμε ότι $\forall$ συνεχή $g : [a,b] \to \mathbb{K}$, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists$ κλιμακωτή $l : [a,b] \to \mathbb{K}$: $\|g - l\|_\infty < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|g - l\|_p = \left(\int_{[a,b]} |g-f|^p \, d\lambda \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{[a,b]} \varepsilon^p \, d\lambda \right)^{1/p} = \varepsilon \cdot (b-a)^{1/p},$$

$\forall p \geq 1$. Άρα:

→ Πρόταση: Το $\mathrm{Step}([a,b])$ είναι πυκνό στον $\left(L^p([a,b]), \|\cdot\|_p \right)$.

Το $\mathrm{Step}(\mathbb{R})$ είναι πυκνό στον $\left(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p \right)$.

Απδδ: $\rightsquigarrow L^p([a,b])$: Έστω $f \in L^p([a,b])$, έστω $\varepsilon > 0$.

$\left.\begin{array}{l} \exists\, g \in C([a,b]) : \|f-g\|_p < \varepsilon/2 \\ \exists\, l \in \mathrm{Step}([a,b]) : \|g-l\|_p < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \|f-l\|_p < \varepsilon.$

$\rightsquigarrow$ $\underline{L^p(\mathbb{R})}$: Έστω $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$.

$\exists\, n \in \mathbb{N}$: $\| f - \underbrace{f\chi_{[-n,n]}}_{\in L^p([-n,n])} \|_p < \varepsilon/2$.

$\exists\, l \in \mathrm{Step}(\mathbb{R})$: $\| f\chi_{[-n,n]} - l \|_p < \varepsilon/2$ $\Big\} \Rightarrow$

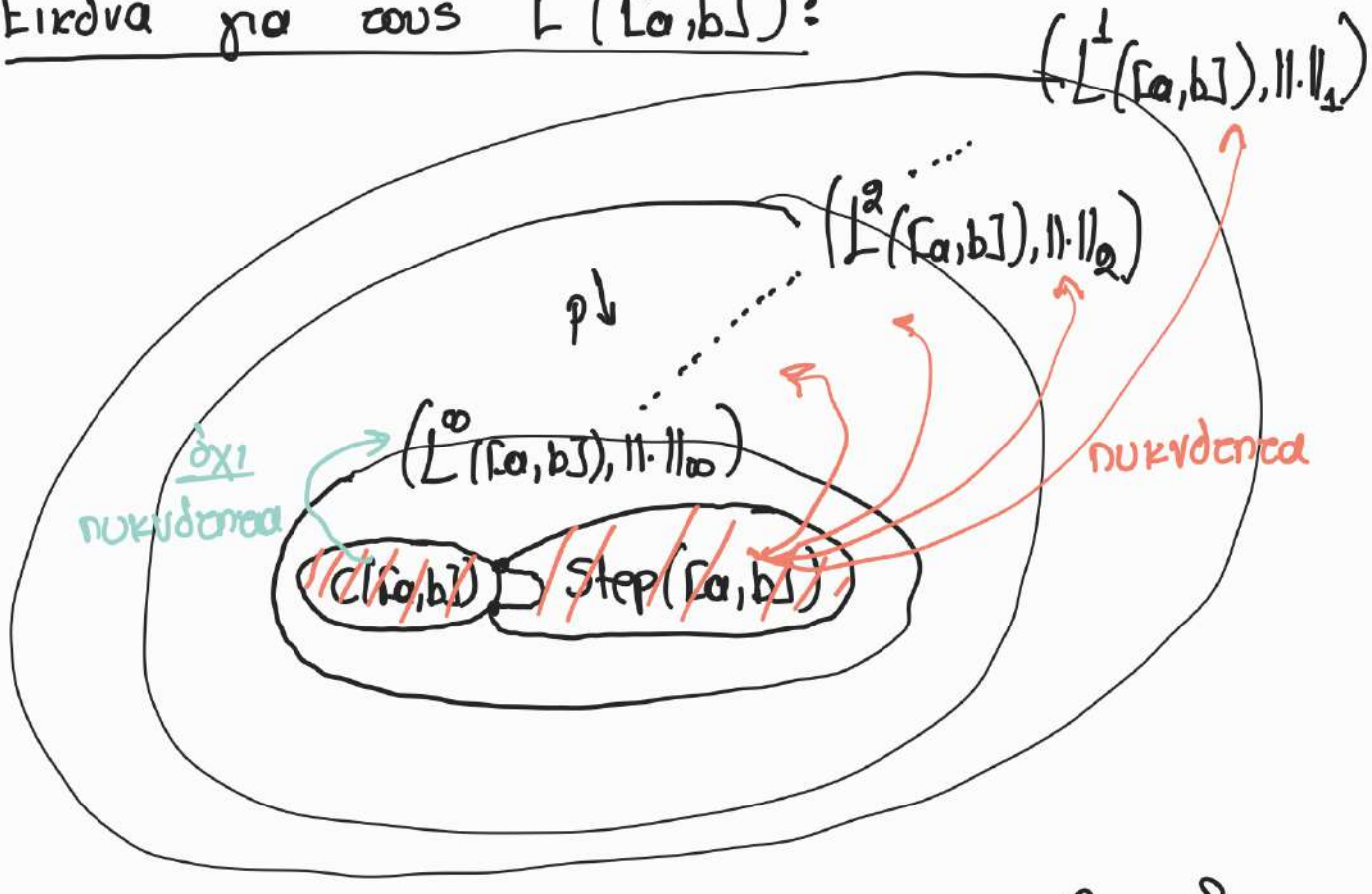
$\Rightarrow \| f - l \|_p < \varepsilon$. ■

⚠ • Τα $C([a,b])$, $\mathrm{Step}([a,b])$ δεν είναι πυκνά στον $(L^\infty([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

• Τα $C_c(\mathbb{R})$, $\mathrm{Step}(\mathbb{R})$ δεν είναι πυκνά στον $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Από δ: Αν όχι, οι $(L^\infty([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ θα ήταν διαχωρίσιμοι. ■

→ Εικόνα για τους $L^p([a,b])$:



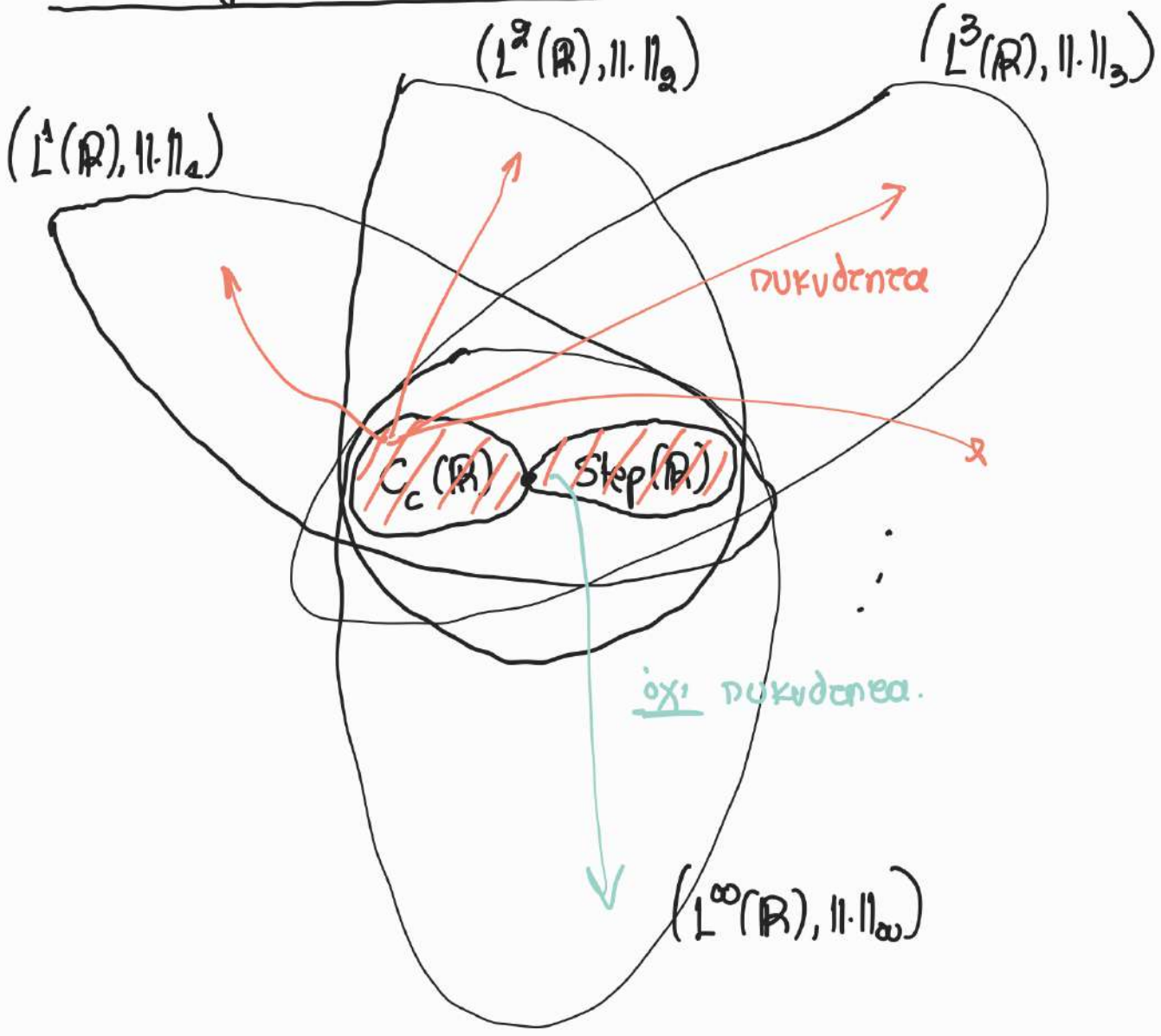
Κάθε εσωτερικός χώρος είναι πυκνός σε κάθε εξωτερικό $(L^p, \|\cdot\|_p)$ (εκτός αν ο εξωτερικός χώρος είναι ο L^∞.

Π.χ. ο $L^2([a,b])$ είναι πυκνός στον $(L^1([a,b]), \|\cdot\|_1)$

$$\left(C([a,b]) \subseteq L^2([a,b]) \subseteq (L^1([a,b]), \|\cdot\|_1) \right).$$

πυκνός

→ Εικόνα για τους $L^p(\mathbb{R})$:



→ Παρένθεση ...

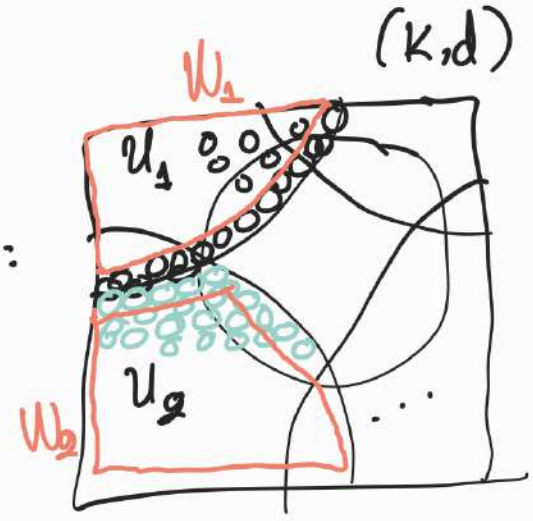
Λήμμα (ύπαρξη διαμέρισης της μονάδας):

Έστω (K, d) συμπαγής μ.χ. Έστω $K \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$, όπου U_i ανοιχτό $\forall\ i = 1, \dots, n$. Τότε, μπορούμε να βρούμε συνεχείς $\phi_i : K \to \mathbb{R}$, $\forall\ i = 1, \dots, n$, ώστε

(α) $0 \le \phi_i \le 1$, $\forall\ i = 1, \dots, n$

(β) $\phi_1 + \dots + \phi_n \equiv 1$ στο K.

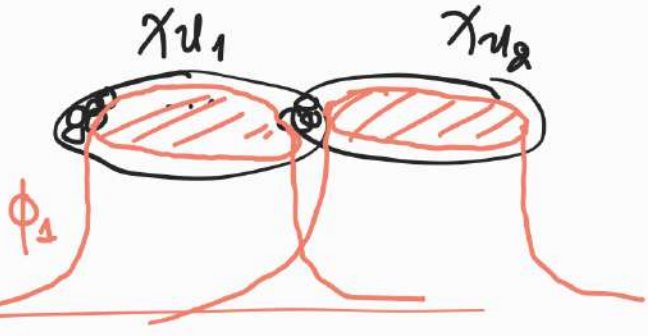
(γ) $\phi_i = 0$ στο $K \setminus U_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.



Απδδ: $\forall x \in K$, $\exists\, i_x \in \{1, \dots, n\}$: $x \in U_{i_x}$,

και αφού U_{i_x} ανοιχτό, υπάρχει $\delta_x > 0$:

$$B(x, \delta_x) \subseteq \tilde{B}(x, \delta_x) \subseteq U_{i_x}.$$



- K συμπαγές $\Rightarrow$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in K$:

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta_{x_i}).$$

περιέχεται στο U_{i_x}, ίσως και σε άλλα U_i.

- $\forall i = 1, \dots, n$, έστω $W_i := \bigcup_{j=1}^{m}$ από όλες τις κλειστές $\tilde{B}(x_j, \delta_{x_j})$ που περιέχονται στο U_i

$\subseteq U_i$, W_i κλειστό.

- Από το Λήμμα του Urysohn, $\exists$

$g_i : K \to \mathbb{R}$ συνεχής, $0 \le g_i \le 1$,

$g_i \equiv 1$ στο W_i και $g_i \equiv 0$ στο $K \setminus U_i$.

$$\left(g_i(x) = \frac{d(x, K \setminus U_i)}{d(x, K \setminus U_i) + d(x, W_i)} \right).$$

Τότε: • $\phi_1 := g_1$, $0 \le \phi_1 \le 1$, ϕ_1 συνεχής

- $\phi_2 = (1-\phi_1)\, g_2$, $0 \le \phi_2 \le 1$, ϕ_2 συνεχής
- $\phi_3 = (1-\phi_1-\phi_2)\, g_3$, $0 \le \phi_3 \le 1$, ϕ_3 συνεχής

$\vdots$

- $\phi_n = (1-\phi_1-\dots-\phi_{n-1})\, g_n$, $0 \le \phi_n \le 1$, ϕ_n συνεχής

Παρατηρούμε ότι κάθε $\phi_i \equiv 0$ στο $K \setminus U_i$ (αφού $g_i \equiv 0$ στο $K \setminus U_i$).

Και: $1-\phi_1-\phi_2 = 1-g_1-(1-g_1)g_2$

$= (1-g_1)(1-g_2)$

$\vdots$

$1-\phi_1-\dots-\phi_n = (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)$.

Χαίρη σε αυτό, $\phi_1+\dots+\phi_n \equiv 1$ στο K:

$\forall x \in K$, $\exists\ W_i : x \in W_i \Rightarrow g_i(x) = 1$

$\Rightarrow 1-g_i(x) = 0$

$\Rightarrow 1-\phi_1(x)-\dots-\phi_n(x) = 0$.

■

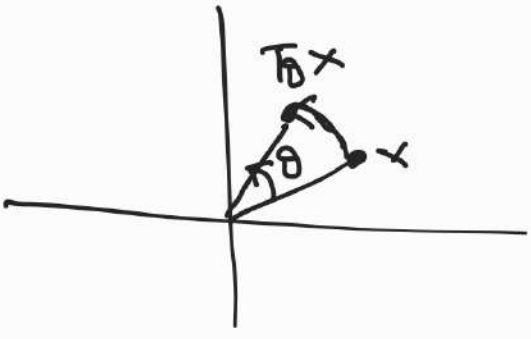
→ Θεώρημα σταθερού σημείου (Banach), εφαρμογές:

→ Ορισμός: Έστω (X,d) μετρικός χώρος, και $T: X \to X$. Λέμε ότι ένα $x \in X$ είναι σταθερό σημείο της T αν $Tx = x$.

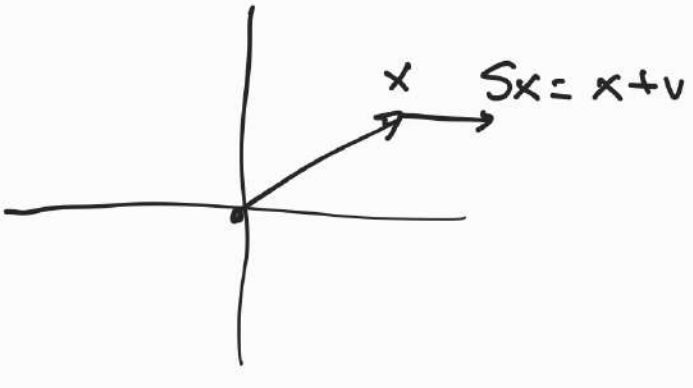
Π.χ: • $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, περιστροφή κατά γωνία θ αριστερόστροφα (γύρω από το 0).



Σταθερά σημεία: • 0,
• $\mathbb{R}^2$, αν $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

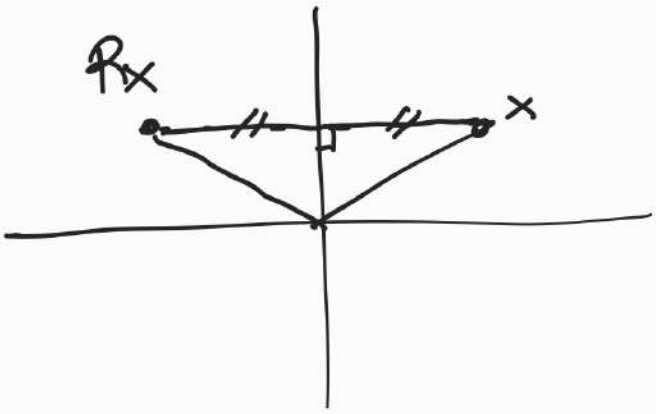


• $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



Κανένα σταθερό σημείο.

- $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: η ανάκλαση ως προς τον $y'y$.



Σταθερά σημεία: $y'y$

Κοινό όλων των T_ϑ, S, R:

$$d\left(\begin{matrix} Sx, Sy \\ T_\vartheta x, T_\vartheta y \\ Rx, Ry \end{matrix}\right) = d(x,y)$$

→ Ορισμός: Έστω (X,d) μ.χ. και $T: X \to X$.

Η T λέγεται συστολή αν:

$$\boxed{d(Tx, Ty) \leq L \cdot d(x,y), \quad \forall x,y \in X,}$$

για κάποια σταθερά $L \neq 1$.

⚠ Το να ισχύει απλά ότι

$$d(Tx, Ty) < d(x,y), \quad \forall x \neq y \text{ στον } X$$

δεν αρκεί για να είναι συστολή η T.

Πχ: $T:\ [1,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$,

$Tx = x + \frac{1}{x}$. (θα εξηγηθεί).

- Πχ: Κάθε παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

$$\boxed{|f'(x)| \le L, \quad \forall x\in\mathbb{R}},$$

όπου L σταθερά με $\boxed{L<1}$,

είναι συστολή.

Απδ: $\forall\ x<y$ στο $\mathbb{R}$,

$$|f(x)-f(y)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\le L}\cdot|x-y| \le L\cdot|x-y|$$

↓ ΘΜΤ, για κάποιο $c\in(x,y)$

■

- Με παρόμοια σκέψη, η $T:[1,+\infty)\longrightarrow[1,+\infty)$

$$Tx = x+\frac{1}{x},$$

συμπεραίνουμε αποστάσεις:

$$|Tx-Ty| \underset{\text{ΘΜΤ}}{=} \overbrace{|T'(c)|}^{<1}\cdot|x-y| < |x-y|,$$

$|T'(x)| = \left|1-\frac{1}{x^2}\right| < 1$ ↓ κάποιο $c\in(x,y)$ $\forall\ x<y$.

Οπότε, η T δεν είναι συστολή.

Γιατί: $|Tx - Ty| = \left|\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(y+\frac{1}{y}\right)\right|$

$= \left|(x-y) - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right| \text{"}=\text{"} |x-y|$

$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \to$ εκδδν 0 για μεγάλα x, y

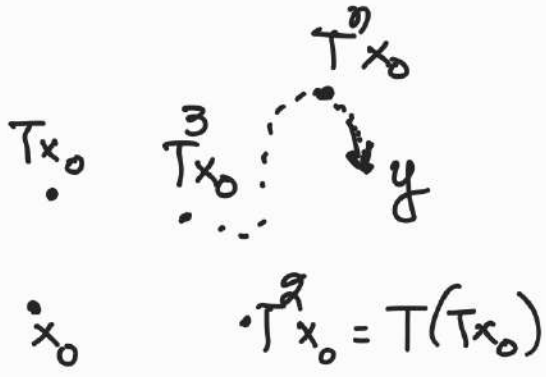
→ Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach (ΘΣΣ):

Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. , και $T: X \to X$ συστολή. Τότε:

(i) Η T έχει σταθερό σημείο $y \in X$.

(ii) Το σταθερό σημείο της T είναι μοναδικό.

(iii) $\forall x_0 \in X$, η ακολουθία $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο y ως προς τη d (δηλ. $d(T^n x_0, y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$).



→ Παρατηρήσεις:

(1) Το ότι ο (X,d) είναι πλήρης δεν μπορεί να

απορρίπτει από τις υποθέσεις.

Π.χ.: ο $((0,1), |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης,

και η $T: (0,1) \to (0,1)$

$$Tx = \frac{1}{2}x$$

είναι συστολή, αλλά δεν έχει σταθερό σημείο

$$\left(Tx = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = x \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,1) \right).$$

(2) Το ότι η T είναι συστολή δεν μπορεί να αντικατασταθεί από το ασθενέστερο

(*) $\boxed{d(Tx, Ty) \leq d(x,y), \ \forall x \neq y \text{ στον } X}$.

Ο $([1, +\infty), |\cdot|)$ είναι πλήρης μ.χ., και η $T: [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, με $Tx = x + \frac{1}{x}$ $\forall x \in [1, +\infty)$, ικανοποιεί την (*). Αλλά η T δεν έχει σταθερό σημείο:

$$Tx = x \Leftrightarrow \cancel{x} + \frac{1}{x} = \cancel{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0, \text{ αδύνατον.}$$

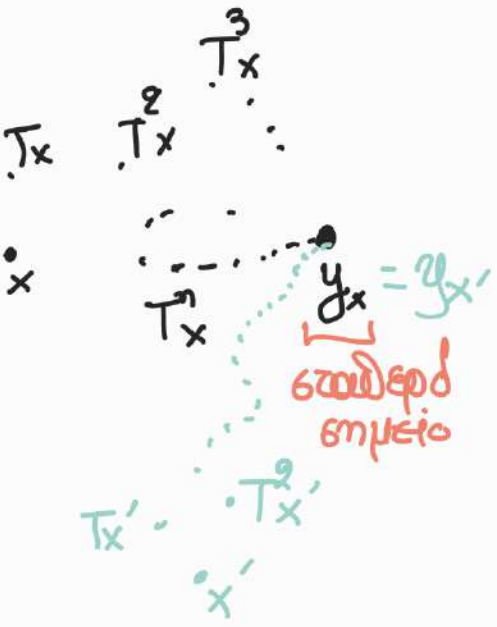
[Αφού αποδείχθει το ΘΣΣ, από το παραπάνω προκύπτει ότι η T δεν είναι συστολή (αν ήταν, θα είχε σταθερό σημείο)].

→ **Άσκηση 055:** $T: X \to X$, (X,d) πλήρης μ.χ., T συστολή.

Σχέδιο: (1) Έστω $x \in X$.

$\Theta\Delta O_n \left(T^n x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει$^{(i)}$ σε κάποιο σταθερό$^{(ii)}$ σημείο της T

(2) $\Theta\Delta O$ η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο.



T συστολή $\Rightarrow \exists\, L \neq 1 : \forall x,y \in X,\ d(Tx,Ty) \leq L\, d(x,y)$.

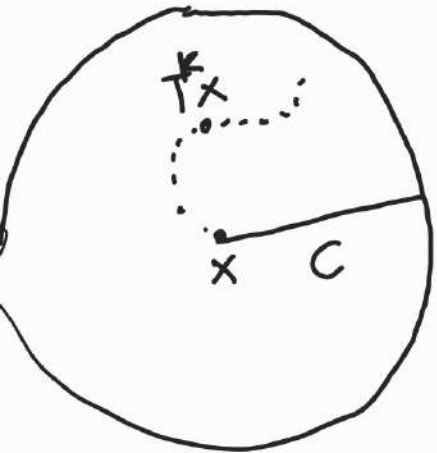
Βήμα 1: Έστω $x \in X$. $\Theta\Delta O$ η $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολ. Cauchy στον (X,d):

$\forall\, m \geq n$,

$$d(T^m x, T^n x) \leq L \cdot d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)$$

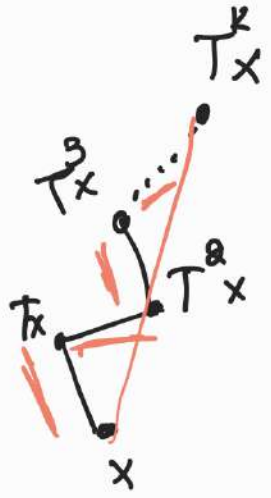
$T(T^{m-1}x)$ $T(T^{n-1}x)$

$$\leq L^2\, d(T^{m-2}x, T^{n-2}x)$$
$$\leq L^3\, d(T^{m-3}x, T^{n-3}x)$$
$$\leq \ldots \leq L^n \cdot \underbrace{d(T^{m-n}x, x)}_{\leq C?} \quad (*_1)$$



$\Theta\Delta O$ $\exists$ C σταθερά ώστε

$d(T^k x, x) \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (δηλ., δηλ. η $(T^k x)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη).



$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq L \cdot d(T^n x, T^{n-1} x)$$
$$\leq L^2 \, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$$
$$\leq \dots$$
$$\leq L^n \, d(Tx, x).$$

Άρα, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$d(T^k x, x) \leq d(T^k x, T^{k-1}x) + d(T^{k-1}x, T^{k-2}x) + \dots$$
$$\dots + d(Tx, x)$$
$$\leq (L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + L + 1) \cdot d(Tx, x)$$
$$= \frac{1 - L^k}{1 - L} \cdot d(Tx, x) \leq \underbrace{\frac{1}{1-L} \cdot d(Tx, x)}_{\| \; C} \quad (*_2)$$

$(\Phi_1) \Rightarrow (*_2)$

$$\boxed{d(T^m x, T^n x) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(Tx, x), \quad (+)}$$

$\forall \, m \geq n.$

Αφού $L^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(0 \leq L < 1)$, η $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον (X, d).

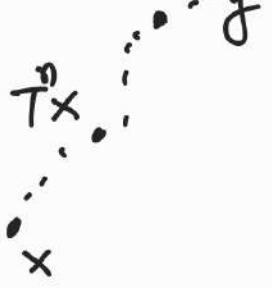
Βήμα 2: Αφού ο (X,d) είναι πλήρης, $\exists\, y \in X$:

$T^n x \xrightarrow{d} y$. ΘΔΟ το y είναι σταθερό σημείο

της T: Θέλουμε: $Ty = y \iff d(Ty, y) = 0$.

Και:

$$0 \le d(Ty, y) \le \underbrace{d(Ty, T^n x)}_{\le L\, d(y, T^{n-1}x) \to 0} + d(T^n x, y), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$\to 0$

Άρα, $d(Ty, y) = 0$.

Ιδέα: $T^n x \to y$

$\Rightarrow T^{n+1} x = " T^n x "$

$\Rightarrow T(T^n x) = " T^n x " = " y$

Βήμα 3: Η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο

(⚠ Αυτό συνεπάγεται πως, $\forall x \in X$, η $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο ίδιο (σταθερό) σημείο).

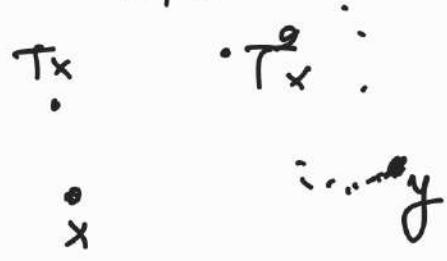
Έστω ότι η T έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία, y_1 και y_2. Τότε: $Ty_1 = y_1$, $Ty_2 = y_2$

$$\Rightarrow d(y_1, y_2) = d(Ty_1, Ty_2) \le L \cdot d(y_1, y_2) < d(y_1, y_2),$$

άτοπο. ■

→ Παρατήρηση: Πώς μπορούμε να βρούμε / προσεγγίσουμε το σταθερό σημείο y μιας συστολής $T: \underbrace{(X,d)}_{\text{πλήρης}} \to (X,d)$;

Το y ισούται με το όριο της ακολουθίας τροχιάς $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\forall x \in X)$.



Μάλιστα, από την (+), αφήνοντας το $n \to +\infty$, παίρνουμε: $\forall x \in X$,

$$d(y, T^n x) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x, Tx).$$

■

→ **Εφαρμογή**: Θεώρημα Picard-Lindelöf, για ύπαρξη και μοναδικότητα τοπικών λύσεων διαφορικών εξισώσεων ειδικής μορφής:

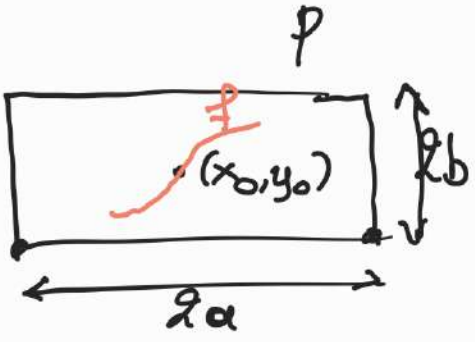
$$\begin{cases} f'(x) = x^2 \cdot \underbrace{f(x)}_{=y}, & \forall x \in [0,1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$x^2 \cdot y$ συνεχής

→ <u>Θεώρημα Picard - Lindelöf</u>: Έστω $G: P \to \mathbb{R}$,

όπου $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}$

Έστω ότι:



- G συνεχής στο P.
- G Lipschitz - συνεχής ως προς το y:

$\exists\, M>0$: $|G(x,y_1) - G(x,y_2)| \le M \cdot |y_1 - y_2|$,

$\forall x \in [x_0-a, x_0+a]$

Τότε, η διαφορική εξίσωση

$$(\Delta E)\begin{cases} f'(x) = G(x, f(x)) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση

$f: [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}$, για κάποιο (μικρό) $h>0$.

Μάλιστα, αυτό λειτουργεί $\forall\, h < \min\left\{a, \dfrac{b}{\|G\|_\infty + 1}, \dfrac{1}{M}\right\}$.

⚠ Για να έχει νόημα η $G(x, f(x))$, πρέπει

$|x-x_0| \le a$, και $|f(x) - y_0| \le b$

Άρα, για να ικανοποιεί μια $f: [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}$ τη (ΔE), αναγκαστικά πρέπει: $0 \le h \le a$

και $|f(x)-y_0| \le b$, δηλ. $f: [x_0-h, x_0+h] \to [y_0-b, y_0+b]$.

Και η f πρέπει να είναι συνεχής.

$0 \le h \le a$, και

Απδ: Έστω $C_h = \{ f: [x_0-h, x_0+h] \to [y_0-b, y_0+b] : f \text{ συνεχής} \}$.

Το C_h είναι κλειστό υποσύνολο του $\underbrace{(C([x_0-h, x_0+h]), \|\cdot\|_\infty)}_{\text{Banach}}$ ο $(C_h, d_{\|\cdot\|_\infty})$ είναι πλήρης μ.χ.

Μια f ικανοποιεί τη $(\Delta E) \iff f \in C_h$

και $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} G(x, f(x))\, dx$,

$\forall x \in [x_0-h, x_0+h]$.

$\iff$ η f είναι σταθερό σημείο της $T: C_h \to C_h$?

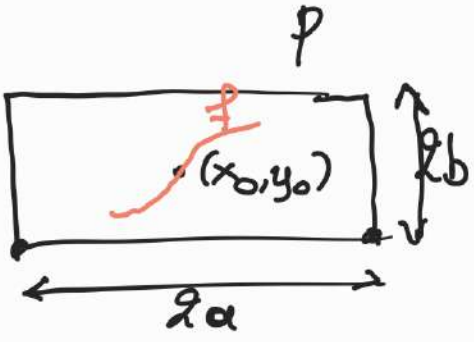
με $Tf(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} G(x, f(x))\, dx.$

Αρκεί να βρεθεί h τέτοιο μικρό ώστε η $T: C_h \to C_h$ να είναι συστολή.

→ <u>Θεώρημα Picard - Lindelöf</u>: Έστω $G: P \to \mathbb{R}$,

όπου $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}$

Έστω ότι:



- G συνεχής στο P.
- G Lipschitz - συνεχής ως προς το y:

$\exists\, M>0$: $|G(x,y_1) - G(x,y_2)| \le M \cdot |y_1 - y_2|$,

$\forall x \in [x_0-a, x_0+a]$, $\forall y \in [y_0-b, y_0+b]$.

Τότε, η διαφορική εξίσωση

$$(\Delta E)\begin{cases} f'(x) = G(x, f(x)) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση

$f: [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}$, για κάποιο (μικρό) $h>0$.

Μάλιστα, αυτό λειτουργεί $\forall\, h < \min\left\{a, \dfrac{b}{\|G\|_\infty + 1}, \dfrac{1}{M}\right\}$.

⚠ Για να έχει νόημα η $G(x, f(x))$, πρέπει

$|x-x_0| \le a$, και $|f(x) - y_0| \le b$

Άρα, για να ικανοποιεί μια $f: [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}$ τη (ΔE), αναγκαστικά πρέπει: $0 \le h \le a$

και $|f(x)-y_0| \le b$, δηλ. $f: [x_0-h, x_0+h] \to [y_0-b, y_0+b]$.

Και η f πρέπει να είναι συνεχής.

$0 \le h \le a$, και

Ανδδ: Έστω $C_h = \{ f: [x_0-h, x_0+h] \to [y_0-b, y_0+b] :$ f συνεχής $\}$.

Το C_h είναι κλειστό υποσύνολο του $\underbrace{\left(C([x_0-h, x_0+h]), \|\cdot\|_\infty\right)}_{\text{Banach}}$ ο $\left(C_h, d_{\|\cdot\|_\infty}\right)$ είναι πλήρης μ.χ.

Μια f ικανοποιεί τη $(\Delta E) \iff f \in C_h$

και $$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} G(t, f(t))\,dt,$$

$\forall x \in [x_0-h, x_0+h]$.

Ορίζουμε $T: C_h \to C([x_0-h, x_0+h])$, με

$$Tf(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} G(t, f(t))\,dt \quad , \forall\ x \in [x_0 - h, x_0 + h] .$$

ΘΔΟ, για μικρό h, η $T: C_h \to C_h$ και είναι συστολή.

- $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$,

$$|Tf(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} G(t, f(t))\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|G(t, f(t))|}_{\leq \|G\|_\infty} dt \leq \|G\|_\infty \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{\leq h}$$

χωρίς $x_0 \leq x$

$$\leq \|G\|_\infty \cdot h \leq b,$$

$$\forall\ h \leq \frac{b}{\|G\|_\infty + 1} .$$

Άρα, $Tf \in C_h$.

- $\forall\ \phi, \psi \in C_h$,

$$\|T\phi - T\psi\|_\infty \leq \ldots \leq (C) \cdot \|\phi - \psi\|_\infty \quad ? \qquad (C \leq 1)$$

$\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$,

$$|T\phi(x) - T\psi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \Big(G(t, \phi(t)) - G(t, \psi(t)) \Big) dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |G(t, \phi(t)) - G(t, \psi(t))| \, dt$$

$\downarrow$ χbg, $x_0 \leq x$

$$\leq M \cdot |\phi(t) - \psi(t)|$$

$$\leq M \cdot \|\phi - \psi\|_\infty$$

$$\leq M \cdot \|\phi - \psi\|_\infty \cdot \underbrace{|x_0 - x|}_{\leq h} \leq (M \cdot h) \cdot \|\phi - \psi\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \|T\phi - T\psi\|_\infty \leq \boxed{(M \cdot h)} \cdot \|\phi - \psi\|_\infty .$$

Άρα, $\forall \boxed{h \leq \frac{1}{M}}$, το $M \cdot h \leq 1$, και

άρα η T είναι συστολή.

Άρα, $\forall \; h \leq \min \left\{ a, \frac{b}{\|G\|_\infty + 1}, \frac{1}{M} \right\}$,

η $T : C_h \longrightarrow C_h$ είναι συστολή.

Από το Θ.5.5 (Banach), η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλ. $\exists!\ f:[x_0-h, x_0+h] \to [y_0-b, y_0+b]$

ώστε να ικανοποιεί τη ΔΕ.

■

⟶ Πώς βρίσκουμε / προσεγγίζουμε τη μοναδική λύση της (ΔΕ) κοντά στο x_0;

$$(\Delta E)\begin{cases} f'(x) = G(x, f(x)) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

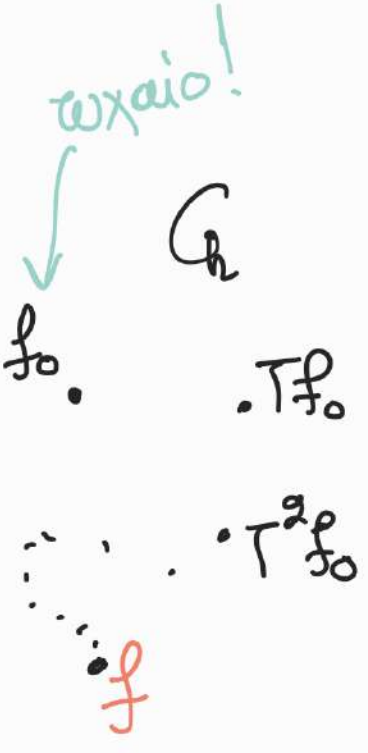
Έστω $h = \frac{1}{2}\min\left\{a, \frac{b}{\|G\|_\infty + 1}, \frac{1}{M}\right\}$

Ξεκινάμε με <u>όποια</u> f_0

Θέλουμε στο G_h, δηλ. με

$f_0 : [x_0-h, x_0+h] \to [y_0-b, y_0+b]$ συνεχή.

Πχ: $f_0 \equiv y_0$ στο $[x_0-h, x_0+h]$.



Ορίζουμε $T : C_h \to C_h$

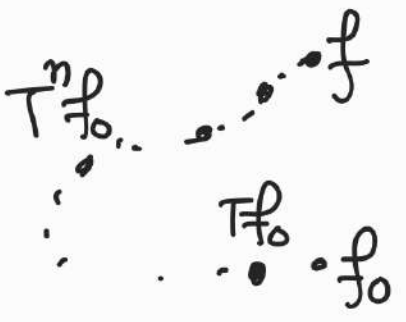
$$Tf(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} G(t, f(t))\,dt \,, \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Ξέρουμε ότι η μοναδική λύση της (ΔΕ) είναι το μοναδικό σταθερό σημείο f της T. Από το ΘΣΣ, ξέρουμε ότι $\| T^n f_0 - f \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

($\forall$ $f_0 \in C_h$, άρα και για το f_0 που επιλέξαμε).

Άρα (ομοιόμορφο όριο $\Longrightarrow$ κατά σημείο όριο):

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} T^n f_0(x), \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$



Επίσης,

$$\| f - T^n f_0 \|_\infty \leq \frac{(Mh)^n}{1 - Mh} \cdot \| Tf_0 - f_0 \|_\infty \quad \forall n,$$

όπου M είναι η Lipschitz σταθερά της G ως προς τη $2η$ μεταβλητή.

Άσκηση:

$$\begin{cases} f'(x) = \overbrace{x^2 \cdot f(x)}^{= G(x, f(x))} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(Λύση: e^{x^2})

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 f(x) + x^3 f^2(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

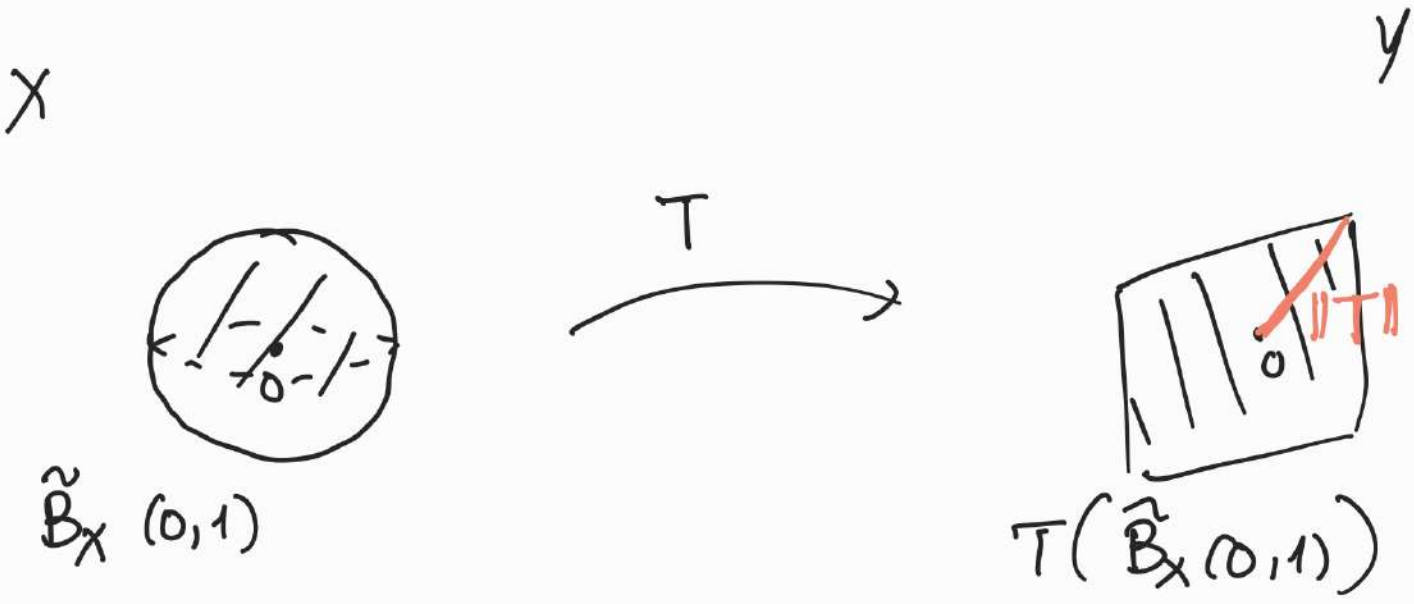
(Μη προφανής λύση).

Βρείτε τη λύση / προσέγγιση της λύσης για καθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις (κοντά στο 0), χρησιμοποιώντας το ΘΣΣ.

→ **Νόρμες γραμμικών τελεστών**

→ Ορισμός: Έστω $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ γραμμικός τελεστής.

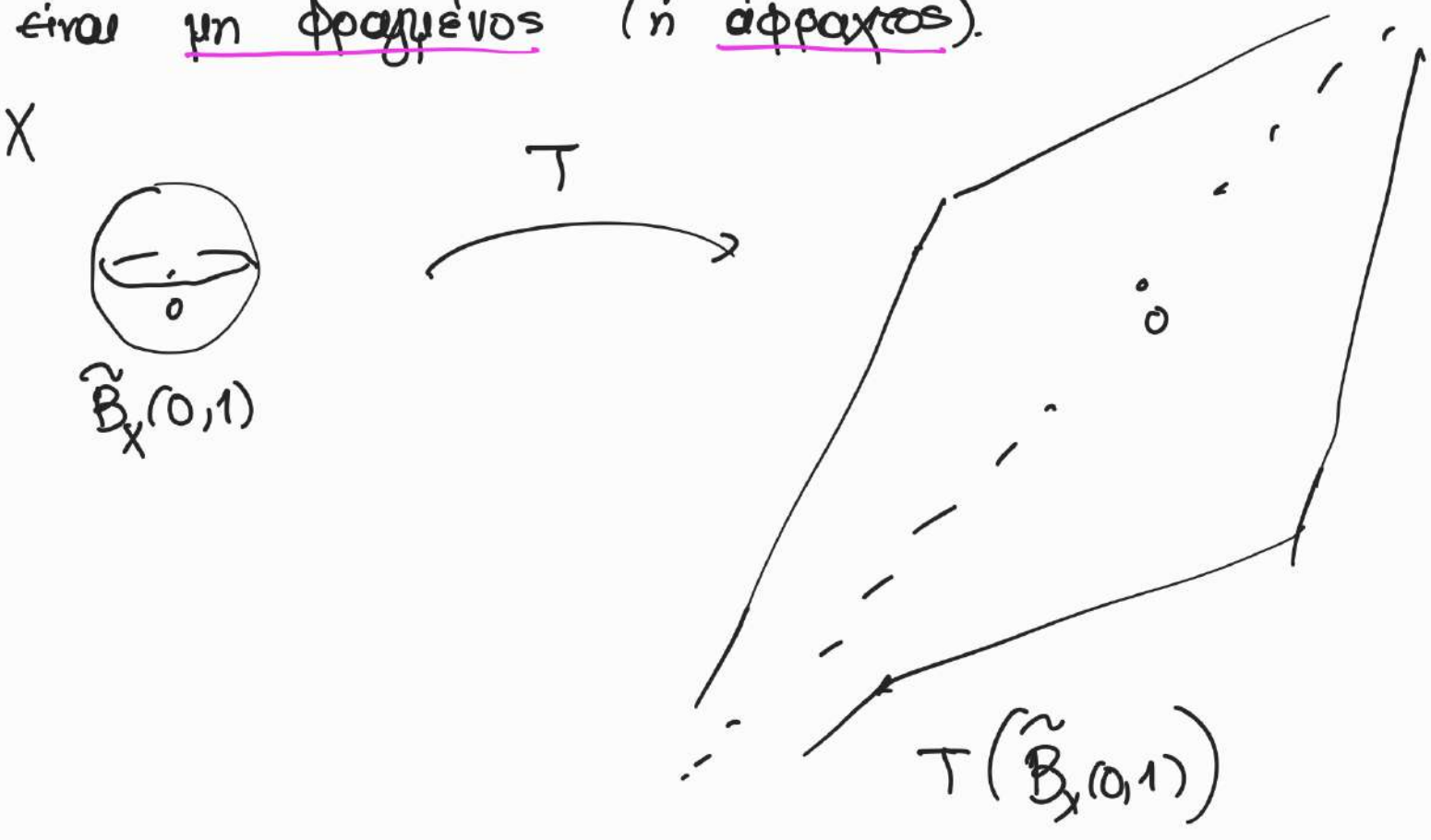
Η $\|T\| := \sup_{x \in \tilde{B}_X(0,1)} \|Tx\|_Y$ ονομάζεται η νόρμα του T.



Παρατήρηση 1: Η $\|T\|$ είναι το "μεγαλύτερο" από τα μήκη όλων των διανυσμάτων στην $T(\tilde{B}_X(0,1))$.

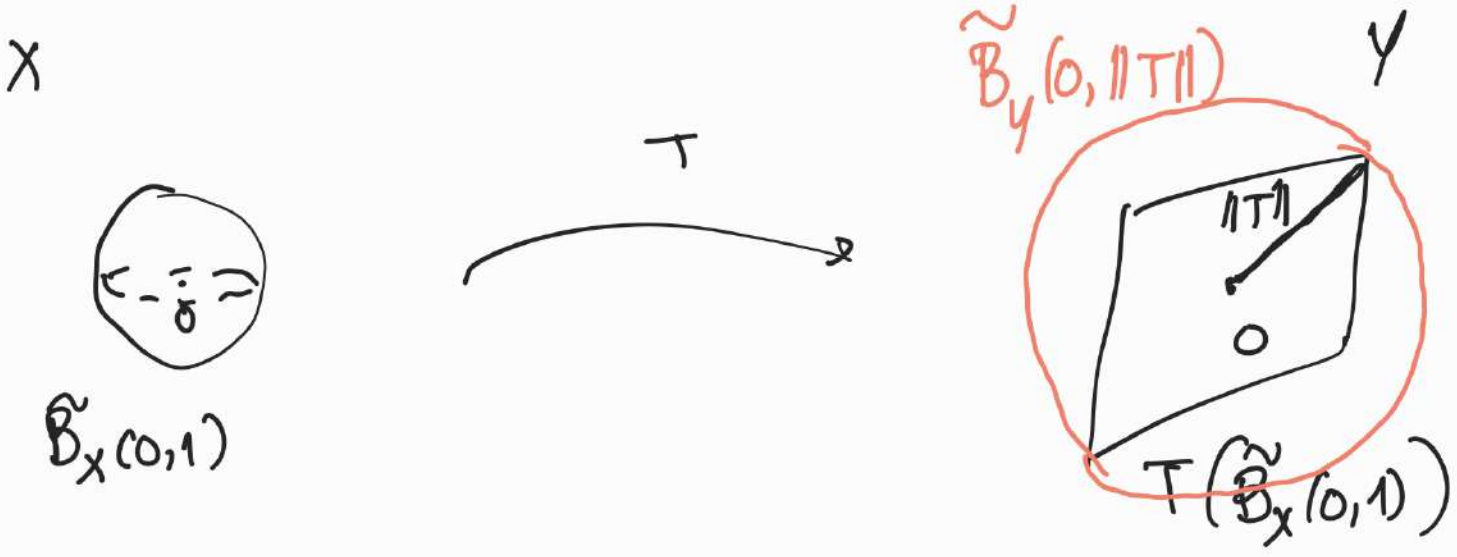
Πιο σωστά, είναι το <u>supremum</u> αυτών των μηκών. ⚠ Μπορεί αυτό να είναι άπειρο!

<u>Περ. 1</u>: $\|T\| = +\infty$. Τότε λέμε ότι ο T είναι <u>μη φραγμένος</u> (ή <u>άφραχτος</u>).



Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε οσοδήποτε μακριά διανύσματα στην $T(\tilde{B}_X(0,1))$.

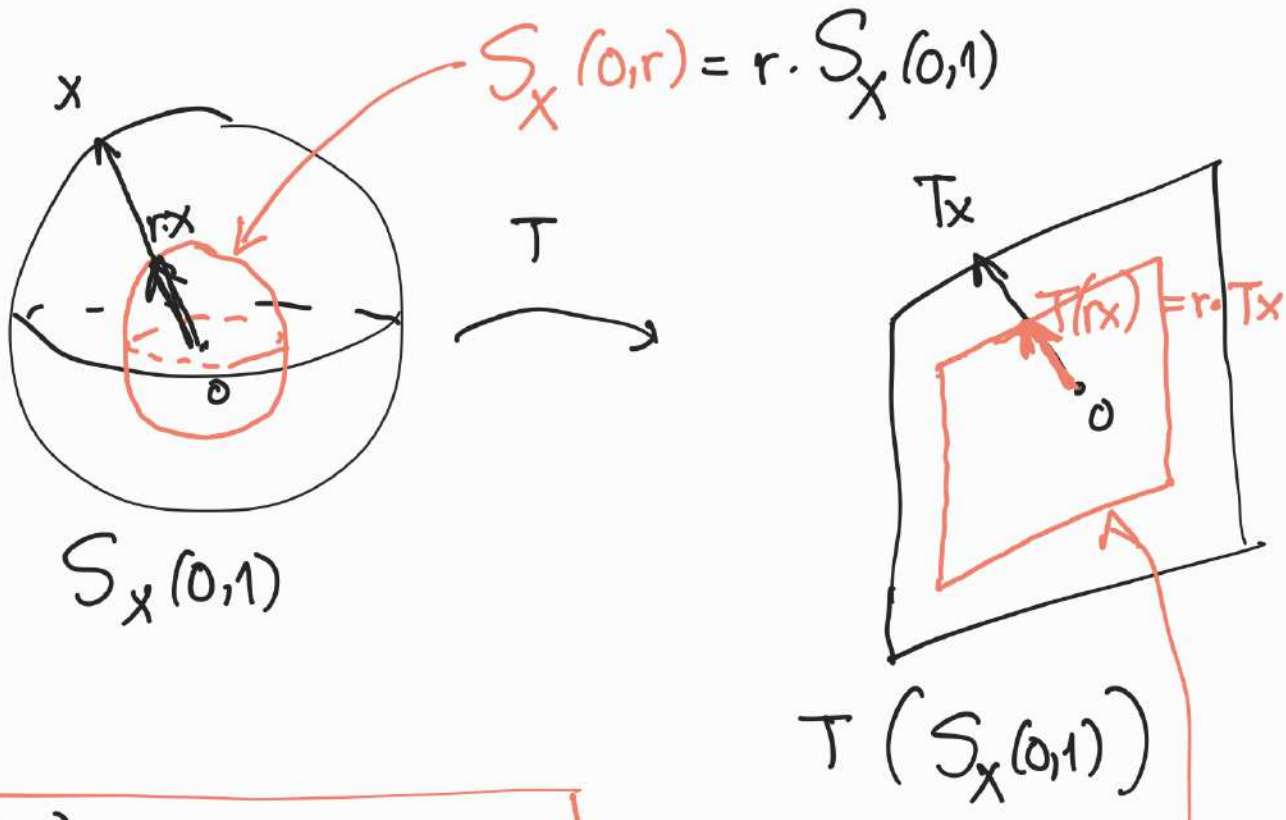
Πρ. 2: $\|T\| < +\infty$: Τότε λέμε ότι ο T είναι φραγμένος.



Σημαίνει ότι η $T(\tilde{B}_X(0,1))$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Παρατήρηση 2: Η $\|T\|$ είναι η μικρότερη ακτίνα M ώστε $T(\tilde{B}_X(0,1)) \subseteq \tilde{B}_Y(0, M)$.

→ Παρατήρηση:



$$T(rx) = r\,Tx,$$

$$\|T(rx)\| = r \cdot \|Tx\| \leq \|Tx\|.$$

Άρα: $$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in \tilde{B}_X(0,1)\}$$

$$= \sup\{\|Tx\|_Y : x \in S_X(0,1)\}$$

Δηλ: $$\|T\| = \sup_{x \in S_X(0,1)} \|Tx\|_Y .$$

→ Πρόταση: Έστω $T: (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ γρ. τελεστής. Τότε, η $\|T\|$ είναι το μικρότερο $M \in [0, +\infty]$ που ικανοποιεί:

$$\|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad , \forall x \in X.$$

Δηλ.:

$$\|T\| = \min \{ M \in [0, +\infty] : \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \ \forall x \in X \}.$$

⚠ Δηλ.:

- T αφραγμένος $\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $\|T\| = +\infty$ $\overset{\text{πρόταση}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Longleftrightarrow \nexists\, M \in \mathbb{R} :$$

$$\|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

- T φραγμένος $\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $\|T\| < +\infty$ $\overset{\text{πρόταση}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \ M \in \mathbb{R} \ :$$

$$\|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

(Παίλιασα, $\|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$, $\forall x \in X$,

αλλιώς $\nexists\ \tilde{M} < \|T\|$ ώστε

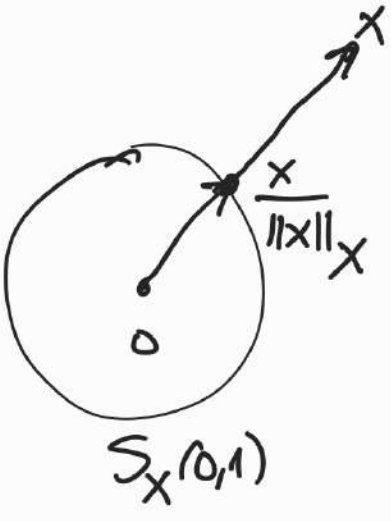
$$\|Tx\|_Y \le \tilde{M} \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X \ ).$$

Απόδειξη πρότασης:

$$\|T\| = \underbrace{\sup}_{\text{ελάχιστο άνω φράγμα}} \{ \|Tx\|_Y : x \in S_X(0,1) \}$$

$$= \min \{ M \in [0, +\infty] : \|Tx\|_Y \le M, \ \forall x \in S_X(0,1) \}$$

$$= \min \{ M \in [0, +\infty] : \underbrace{\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y}_{\| \ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot Tx} \le M, \ \forall x \in X \setminus \{0\} \}$$



$$= \min \{ M \in [0, +\infty] : \|Tx\|_Y \le M \cdot \|x\|_X, \ \forall x \in X \}.$$

■

Παρατήρηση 3: Το $\|T\|$ είναι ο "καλύτερος" παράγοντας αλλαγής μήκους που επιτυγχάνει ο T. Πχ, αν $\|T\|=2$, τότε ο T το πολύ διπλασιάζει μήκη

$$\left(\|Tx\|_Y \leq 2 \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X \right),$$

αλλά υπάρχουν και διανύσματα των οποίων τα μήκη ουσιαστικά διπλασιάζονται μέσω του T.

→ Μεθοδολογία υπολογισμού της $\|T\|$:

(1) $\forall x \in X$, $\|Tx\|_Y \leq \dots\dots \leq \underbrace{M}_{\text{δεν πιο μικρό γίνεται...}} \cdot \|x\|_X$

Τότε: $\|T\| \leq M$.

(2) • Βρίσκουμε κάποιο $x \in X \setminus \{0\}$ ώστε $\|Tx\|_Y = M \cdot \|x\|_X$. Τότε $\|T\| \geq M$.

(ή) • Βρίσκουμε $x_0 \in S_X(0,1)$ ώστε (γεωδ.)

$\|Tx_0\|_Y = M$. Τότε:

$$\|T\| \left(= \sup_{x \in S_X(0,1)} \|Tx\|_Y \right) \geq \|Tx_0\|_Y = M.$$

(ii) • Βρίσκουμε $(x_n)_n$ ακολ. στην $S_X(0,1)$:

$\|Tx_n\|_Y \longrightarrow M$. Πάλι, $\|T\| \geq M$.

→ Άσκηση: Έστω $T, S : \left(L^2([0,1]), \|\cdot\|_2\right) \to \left(L^2([0,1]), \|\cdot\|_2\right)$

οι γραμμικοί τελεστές:

$$Tf(x) := \begin{cases} 3f(x), & \forall x \in [0, 1/2] \\ 0, & \forall x \in [1/2, 1] \end{cases},$$

$$Sf(x) := \begin{cases} 3x f(x), & \forall x \in [1/2, 1] \\ 0, & \forall x \in [0, 1/2]. \end{cases}$$

Βρείτε τις $\|T\|$, $\|S\|$.

Λύση (για την T): • $\forall f \in L^2([0,1])$,

$$\|Tf\|_2 = \left(\int_0^1 |Tf(x)|^2 \, d\lambda(x) \right)^{1/2}$$

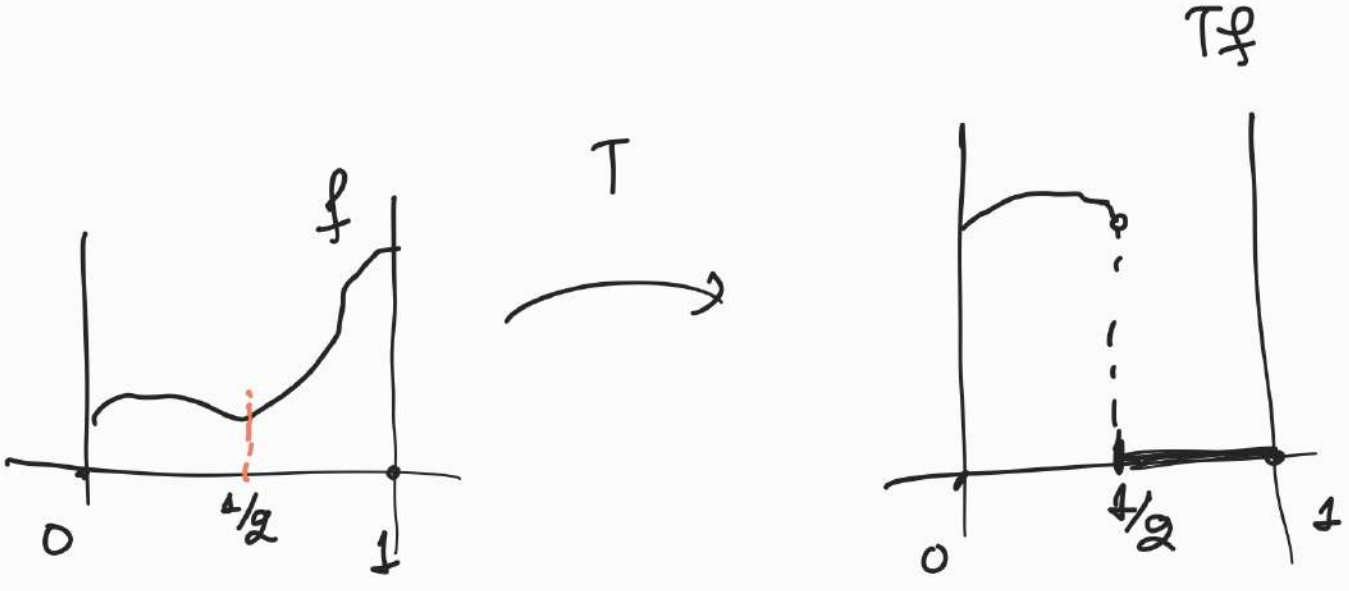
$$= \left(\int_0^{1/2} |3f(x)|^2 \, d\lambda(x) \right)^{1/2}$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\left[\int_0^{1/2} |f(x)|^2 \, d\lambda(x) \right]^{1/2}}_{\leq \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 d\lambda(x) \right)^{1/2}}$$

$$\leq 3 \cdot \|f\|_2 .$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 3$.

- $\|T\| \geq 3$:



Ψάχνω $f \in L^2([0,1])$ ώστε $Tf = 3f$

(δηλ. $\forall x \in [0,1]$, $Tf(x) = 3f(x)$)

Η $f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2] \\ 0, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$ λειτουργεί.

Τότε, $\|Tf_0\|_2 = 3\|f_0\|_2$

$\xrightarrow{f_0 \neq 0} \left\| T\left(\frac{f_0}{\|f_0\|_2}\right) \right\|_2 = 3$

$\in S_{L^2([0,1])}(0,1)$

$\Rightarrow \|T\| \geq 3.$

Άρα, $\|T\| = 3.$ ■

Παρατήρηση: T φραγμένος (φραγμένος) $\Longleftrightarrow$

$\exists M \in \mathbb{R}: \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$

$\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}:$

$\|Tx - Ty\|_Y \leq M \cdot \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$

$\Longleftrightarrow T$ Lipschitz - συνεχής.

→ Πρόταση: Έστω $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$, γραμμικός τελεστής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) T συνεχής

(ii) T συνεχής στο 0_X

(iii) T φραγμένος ($\Leftrightarrow$ T Lipschitz-συνεχής)

Απόδειξη: (iii) $\Rightarrow$ (i).

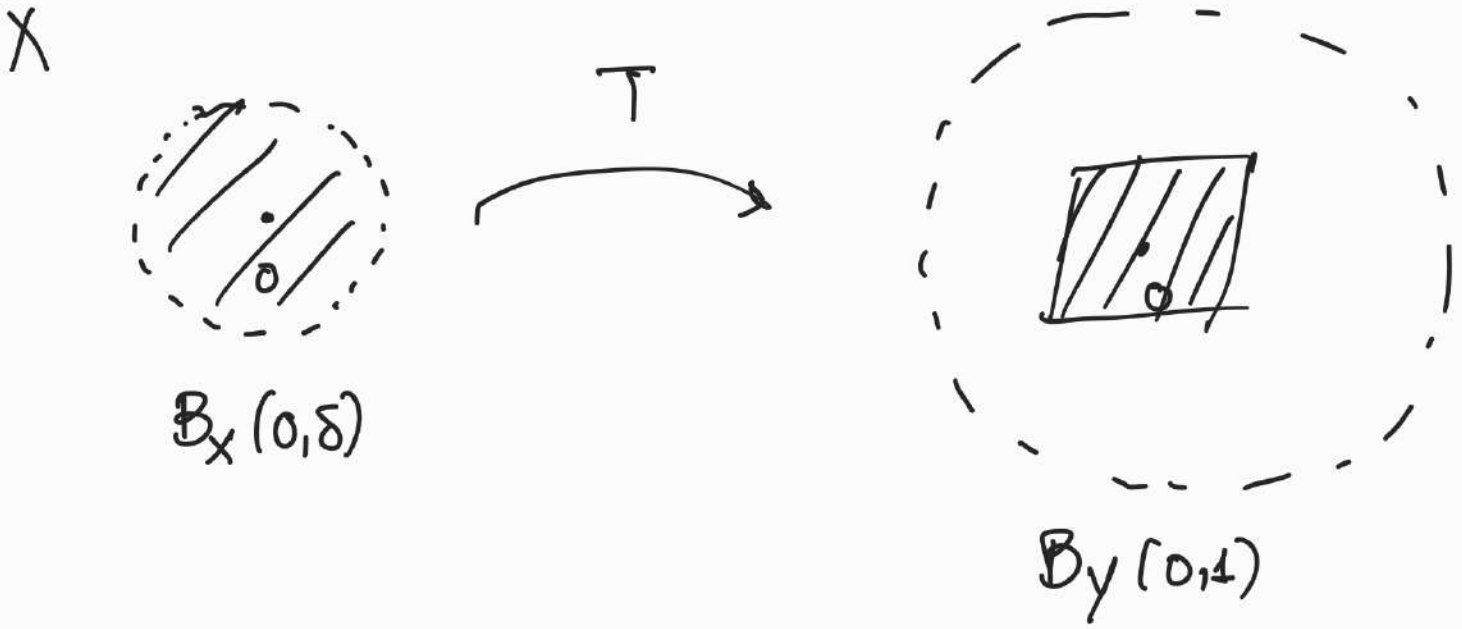
(i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): T συνεχής στο 0_X

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$: αν $\|x\|_X < \delta$, τότε :

$$\|Tx\|_Y < 1.$$

Απ.:



1ος τρόπος: Άρα, $T\left(\tilde{B}_X(0,\delta/2)\right) \subseteq B_Y(0,1)$

επί $\frac{2}{\delta}$

$\Longrightarrow T\left(\tilde{B}_X(0,1)\right) \subseteq B_Y\left(0,\frac{2}{\delta}\right)$,

άρα η $T\left(\tilde{B}_X(0,1)\right)$ είναι φραγμένη

$\Rightarrow$ ο T είναι φραγμένος.

2ος τρόπος: $\forall x \in X\setminus\{0\}$, $\left\| \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta$

$\Longrightarrow \left\| T\left(\frac{\delta}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y < 1$

$\Longrightarrow \|Tx\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\cdot\|x\|_X$, $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ ο T είναι φραγμένος. ■

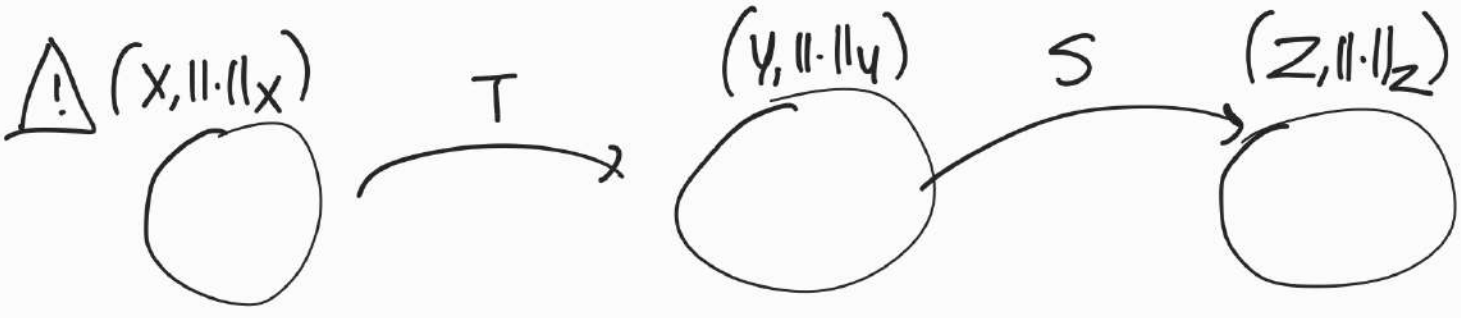
→ Ορισμός: Έστω $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$.

Ορίζουμε $B(X,Y) := \{T: (X,\|\cdot\|_X) \to (Y,\|\cdot\|_Y):$ T φραγμένος γρ. τελεστής$\}$.

→ Ορισμός: Ορίζουμε $B(X,Y)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$.

Ο $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

↑ νόρμα τελεστών



Αν οι T, S είναι φραγμένοι γρ. τελεστές, τότε η $S \circ T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_Z)$ είναι φρ. γρ. τελεστής, $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$:

$$\forall x \in X, \quad \|(S \circ T)x\|_Z = \|S(\underbrace{Tx}_{\in Y})\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X.$$

■

→ Πρόταση: Αν ο $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι Banach, τότε ο $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ είναι Banach.

Απόδ: Έστω $(T_n)_n$ ακολ. Cauchy στον $(B(X,Y), \|\cdot\|)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_0$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in X,\ \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \varepsilon \cdot \|x\|_X$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in X,\ \|T_n x - T_m x\|_Y \leq \varepsilon \cdot \|x\|_X} \quad (*)$$

Άρα, $\forall x \in X$, η $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(Y, \|\cdot\|_Y)$, που είναι Banach $\Rightarrow$

ορίζεται το $Y \ni Tx := \lim_{n \to +\infty} T_n x$ (ως προς τη $\|\cdot\|_Y$)

Η $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι γραμμική (απλά), και:

$(*) \xrightarrow{n \to +\infty}$ $\forall n \geq n_0$,

$$\forall x \in X,\ \|\underbrace{T_n x - Tx}_{\| (T_n - T)(x) \|}\|_Y \leq \varepsilon \cdot \|x\|_X$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq n_0,\ \|T_n - T\| \leq \varepsilon \cdot}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \\ T_{n_0} - T \in B(X,Y),\ T_{n_0} \in B(X,Y) \end{cases} \Rightarrow$$

(διον. χώρος)

$$\Rightarrow T_{n_0} - (T_{n_0} - T) = T \in B(X,Y)$$

■

→ Ορισμός: Κάθε γραμμική $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ λέγεται γραμμικό συναρτησοειδές.

(Εδώ το $\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ επί του οποίου ο X είναι διαν. χώρος.).

Συμβολίζουμε: $X^* := B(X, \mathbb{K})$

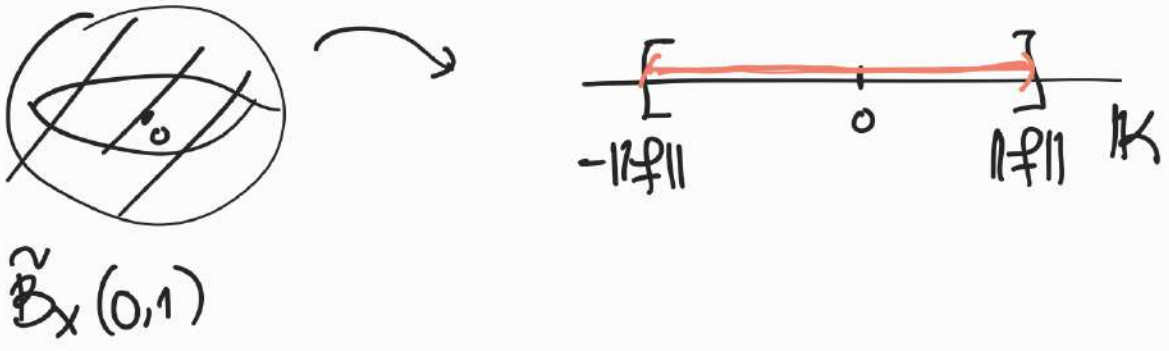
= το σύνολο των φραγμένων γρ. συναρτησοειδών $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Ο $(X^*, \|\cdot\|)$ λέγεται ο δυϊκός του $(X, \|\cdot\|_X)$.

Και είναι πάντα χώρος Banach.

⚠ Αν $f \in X^*$, τότε: $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|_X$, $\forall x \in X$

f:



→ Οι δυϊκοί των $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$:

→ Πρόταση: Έστω $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, και q : $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Συμβολίζουμε:

$L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ορίζουμε:

$$T_f : (L^q, \|\cdot\|_q) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

$$T_f\, g = \int f \cdot g \, d\mu, \quad \forall g \in L^q.$$

Ο T_f είναι φραγμένος γρ. τελεστής (δηλ. $T_f \in (L^q)^*$), με

$$\|T_f\| = \|f\|_p.$$

Το ίδιο ισχύει και για $p = \infty$, αν το μ είναι πμπεπερασμένο (δηλ. $\forall A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = +\infty$, $\exists B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$, με $0 < \mu(B) < +\infty$).

Πχ: • Το μέτρο Lebesgue σ του $\mathbb{R}$ είναι πμπεπερασμένο: Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ με

$$\lambda(A) = +\infty, \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap [-n, n])$$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\lambda(A \cap [-n, n])}_{< +\infty}$$

$$\lambda(A) = +\infty$$

$$\Rightarrow \exists\ n_0 : \quad 0 < \lambda(A \cap [-n_0, n_0]) < +\infty$$ ■

- Το μέτρο $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

$$\nu(A) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } \#A = +\infty, \ A \text{ υπεραρ.} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δεν είναι πληπεπεραστέο.

Απόδ: $f \in L^p$, $T_f : L^q \longrightarrow \mathbb{K}$

$$T_f g = \int f \cdot g \, d\mu.$$

- Η T_f είναι καλά ορισμένη: Το $\int f \cdot g \, d\mu$ ορίζεται επειδή: $\int |f \cdot g| \, d\mu < +\infty$:

$$\int |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < +\infty, \quad \forall g \in L^q \ (f \in L^p).$$

- Η T_f είναι γραμμική (απλά)
- Η T_f είναι φραγμένη:

$\forall g \in L^q$, $|T_f g| \leq \left| \int f \cdot g \, d\mu \right| \leq \underbrace{\|f\|_p}_{\in \mathbb{R}} \cdot \|g\|_q$.

Hölder

$$\Longrightarrow \boxed{\|T_f\| \leq \|f\|_p}.$$

Αν $p \neq +\infty$:

- ΘΔΟ: $\|T_f\| \geq \|f\|_p$: Ψάχνουμε $g_0 \in L^q$ με $\|g_0\|_q = 1$, ώστε $|T_f g_0| = \|f\|_p$.

Τότε: $\|T_f\| \left(= \sup_{\|g\|_q = 1} |T_f g| \right)$

$$\geq |T_f g_0| = \|f\|_p.$$

Έχουμε: $\|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu = \int_{\{f \neq 0\}} f \cdot \frac{|f|^p}{f} \, d\mu$

$$\rightarrow \|f\|_p = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \int_{\{f \neq 0\}} f \cdot \left(\frac{|f|^p}{f \cdot \|f\|_p^{p-1}} \right) d\mu$$

Άρα, για $g_0 : X \longrightarrow \mathbb{K}$

$$g_0(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|^p}{f(x) \cdot \|f\|_p^{p-1}} & , \forall x : f(x) \neq 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

έχω: $\|f\|_p = \int f \cdot g_0 \, d\mu = T_f g_0$.

Και: $\|g_0\|_q = 1$:

$\rightsquigarrow$ Αν $p \neq 1 \Rightarrow q \neq +\infty$:

$$\int |g_0|^q \, d\mu \overset{q=\frac{p}{p-1}}{=\!=} \int_{\{f\neq 0\}} \left[\frac{|f|^p}{|f| \cdot \|f\|_p^{p-1}} \right]^{\frac{p}{p-1}} d\mu$$

$$= \int_{\{f\neq 0\}} \left(\frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \right)^{\frac{p}{p-1}} d\mu$$

$$= \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_{\{f\neq 0\}} |f|^p \, d\mu = 1.$$

$\rightsquigarrow$ Αν $p = 1 \Rightarrow q = +\infty$:

$$\forall x, \quad |g_0(x)| = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{|f(x)|} = 1, & \forall x : f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\|g_0\|_\infty = 1$ (εκτός αν το $\{f\neq 0\}$ έχει μέτρο $0 \Rightarrow f = 0 \in L^p$

$\Leftrightarrow T_f = 0$, άλλα εύκολα...)

- Αν $p = +\infty$: Ξέρουμε: $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$.

Θέλουμε $\|T_f\| \geq \|f\|_\infty$.

Ψάχνουμε $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. με $\|g_n\|_1 = 1$, ώστε

$|T_f g_n| \longrightarrow \|f\|_\infty$, δηλ.

$$\left| \int f \cdot g_n \, d\mu \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty .$$

Τότε, $\|T\| \left(= \sup_{\|g\|_1 = 1} |T_f g| \right) \geq \|f\|_\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $A_n \in \mathcal{A}$, με $\mu(A_n) < +\infty$, ώστε:

$$(0 <) \|f\|_\infty - \frac{1}{n} < |f(x)| \leq \|f\|_\infty \qquad \forall x \in A_n .$$

Άρα, $g_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \frac{|f|}{f} , & \forall x \in A_n \\ 0 , & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Τότε: $\int f \cdot g_n \, d\mu = \int_{A_n} \cancel{f} \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \frac{|f|}{\cancel{f}} \, d\mu$

$$= \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \int_{A_n} |f| \, d\mu \geq \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} \left(\|f\|_\infty - \frac{1}{n} \right) d\mu$$

$$= \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \mu(A_n) \cdot \left(\|f\|_\infty - \frac{1}{n} \right) = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

Άρα, $\forall n$, $T_f g_n \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$.

Και: $\|g_n\|_1 = \int_{A_n} \frac{1}{\mu(A_n)} \, d\mu = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\|T\| \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \|T\| \geq \|f\|_\infty$. ∎

Παρατήρηση: $\|f\|_p = \|T_f\|$

$$= \sup_{\|g\|_q = 1} \left| \int f \cdot g \, d\mu \right|$$

(όπου $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$),

$\forall \quad 1 \leq p \leq +\infty$

↓

για μ πμιπεπερασμένο...

Πόρισμα: Έστω $f \in L^p$. Αν $\int f \cdot g \, d\mu = 0$,

$\forall g \in L^q$ (όπου $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$), τότε

$f = 0 \in L^p$ (δηλ. $f(x) = 0$ για μ-σχεδόν παντού x).

Απόδ: $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1} \left| \underbrace{\int f\cdot g\, d\mu}_{=0} \right| = 0$

$\Rightarrow f = 0 \in L^p$ ∎

→ Άσκηση: Έστω $f \in L^p$, $p>1$ ($\Rightarrow q<+\infty$)

Αν $\int f\cdot s\, d\mu = 0 \quad \forall s \in L^q$ απλή, τότε

$f=0 \in L^p$.

Λύση: Δείχνουμε ότι $\int f\cdot g\, d\mu = 0$, $\forall g \in L^q$:

$\forall g \in L^q$, $\exists$ ακολ. $(s_n)_n$ απλών στον L^q,

με $\|s_n - g\|_q \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \overbrace{\int f\cdot s_n\, d\mu}^{=0} \longrightarrow \int f\cdot g\, d\mu$:

$$\left| \int f\cdot g\, d\mu - \int f\cdot s_n\, d\mu \right| \le \int |f|\cdot|g-s_n|\, d\mu$$
$$\le \|f\|_p \cdot \|g-s_n\|_q \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Άρα, $\int f\cdot g\, d\mu = 0$. Άρα, $f=0 \in L^p$.

∎

→ Άσκηση: Έστω $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p>1$ ($\Rightarrow q<+\infty$)

Αν $\int f\cdot \ell\, d\lambda = 0 \quad \forall\ \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ πλιμακωτή,

τότε $f=0 \in L^p(\mathbb{R})$ ($\Leftrightarrow f=0$ λ-σ.π.).

→ **Θεώρημα**: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $1 \leq p < +\infty$. $L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Τότε, ο $(L^p)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον L^q, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Μάλιστα, η $T: L^q \longrightarrow (L^p)^*$

$g \longrightarrow T_g$, όπου

$T_g : L^p \to \mathbb{K}$, με

$T_g(f) = \int g \cdot f \, d\mu$, $\forall f \in L^p$, είναι γραμμική, ισομετρία (δηλ. $\|g\|_q = \|T_g\| \ \forall g \in L^q$), και επί.

Αυτό ισχύει και για $p=1$, αρκεί το μ να είναι σ-πεπερασμένο.

Απόδ: Έχουμε δει ότι $\|T_g\| = \|g\|_q$, $\forall g \in L^q$.

Άρα, η $T: g \longrightarrow T_g$ είναι ισομετρία.

Είναι και γραμμική (εύκολο). ⚠ Άρα είναι 1-1:

Έστω $g_1, g_2 \in L^q$ με $T(g_1) = T(g_2)$, δηλ.

με $T_{g_1} = T_{g_2}$. Τότε,

$$0 = \| T_{g_1} - T_{g_2} \| \overset{\text{γρ}}{=} \| T_{g_1 - g_2} \| \overset{\text{ισομετρία}}{=} \| g_1 - g_2 \|_q$$

$$\Longrightarrow g_1 - g_2 = 0 \in L^q \Rightarrow g_1 = g_2 \in L^q.$$

Αρκεί ΝΑΟ η T είναι επί, δηλ. θα:

$\forall \phi \in (L^p)^*$, δηλ. $\forall\ \phi : L^p \longrightarrow \mathbb{K}$ γρ. γρ. συναρτησοειδές,

$\exists\ g \in L^q$: $\phi(f) = \int f \cdot g \, d\mu$, $\forall f \in L^p$.

Έστω $\phi \in (L^p)^*$.

$\longrightarrow$ <u>Βήμα 1</u>: μ πεπερασμένο.

Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, ώστε:

$$\nu(A) = \phi(\chi_A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

• Το ν είναι καλά ορισμένο: $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$|\nu(A)| = |\phi(\chi_A)| \leq \|\phi\| \cdot \|\chi_A\|_p$$

$\phi : L^p \to \mathbb{K}$

$$= \|\phi\| \cdot \mu(A)^{1/p} < +\infty$$

• Το ν είναι (προσημασμένο) μέτρο:

$$\rightsquigarrow |\nu(\phi)| \le \|\phi\| \cdot \underbrace{\mu(\phi)^{1/p}}_{=0} = 0$$

$\rightsquigarrow$ $\forall$ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ξένα ανά δύο $\in \mathcal{A}$,

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i) :$$

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) := \phi\left(\chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i}\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i}\right)$$

$$\overset{+\infty\,''}{\sum_{i=1}} \chi_{A_i}$$

$$\overset{\text{⚠}}{=\!=} \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\phi(\chi_{A_i})}_{''\,\nu(A_i)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i) .$$

ϕ γραμμική + συνεχής

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_{A_i} \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i} \quad \text{κ.σ.}$$

Κυρ. Σύγκλιση (μ περπερασμένο!)

$$\| \sum_{i=1}^{\kappa} \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i} \|_p$$

$\phi: L^p \to \mathbb{K}$ συνεχής

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_{A_i}\right) \xrightarrow[\kappa \to +\infty]{} \phi\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i}\right)$$

δηλ. $$\phi\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i}\right) = \lim_{\kappa \to +\infty} \phi\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_{A_i}\right)$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} \phi(\chi_{A_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \phi(\chi_{A_i}) \quad .$$

- $\nu << \mu$: Δείξαμε ότι $|\nu(A)| \leq \mu(A)^{1/p}$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Άρα, αν $\mu(A)=0$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$, τότε και $\nu(A)=0$.

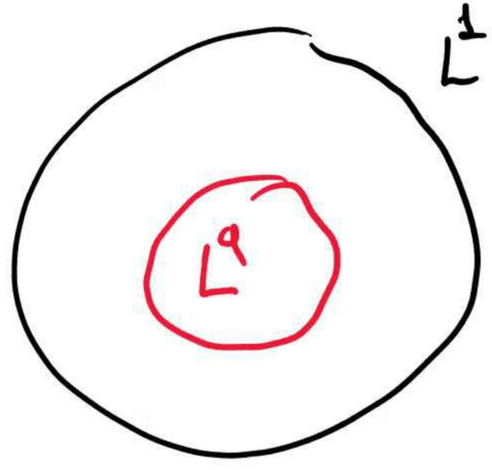
Από το <u>Θεώρημα Radon-Nikodym</u>, $\exists\, g \in L^1$ ώστε:

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu \quad , \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Δηλαδή, $$\phi(\chi_A) = \int \chi_A \cdot g \, d\mu \, , \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$\Longrightarrow$ $$\phi(s) = \int s \cdot g \, d\mu \quad , \quad \forall \; s: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{K} \text{ απλή και μετρήσιμη}$$

(εδώ χρησιμοποιούμε ότι κάθε τέτοια s γράφεται ως $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$ για κάποια $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{K}$, και $A_i \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_i) < +\infty$ [καθώς μ περιορισμένο], και άρα εφαρμόζεται η γραμμικότητα του ολοκληρώματος).



(μ περιορισμένο)

ΘΔΟ $g \in L^q$.

Τότε, η απόδειξη θα τελειώσει ως εξής:

$\forall f \in L^p$ βρίσκουμε $(s_n)_n$

ακολουθία απλών στον L^p, με $\|s_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Longrightarrow \quad \phi(s_n) \longrightarrow \phi(f)$.

$\phi : L^p \to K$ συνεχής

$\Longrightarrow \quad \phi(s_n) \longrightarrow \phi(f)$. $\Big\}$ (*)

Όμως, $\phi(s_n) = \int s_n \cdot g \, d\mu \longrightarrow \int f \cdot g \, d\mu$,

καθώς $\left| \int f \cdot g \, d\mu - \int s_n \cdot g \, d\mu \right| \le \int |f - s_n| \cdot |g| \, d\mu$

Hölder $\le \underbrace{\|f - s_n\|_p}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|g\|_q}_{\text{σταθ.}} \longrightarrow 0$.

(*) $\Longrightarrow$ $\boxed{\phi(f) = \int f \cdot g \, d\mu, \quad \forall f \in L^p,}$ όπως θέλαμε. ∎

Δείχνουμε ήδη ότι $g \in L^q$: Χρησιμοποιούμε ότι

$$\phi(s) = \int s \cdot g \, d\mu \quad \forall\, s : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{απλή, μετρήσιμη}$$

και $|\phi(s)| \le \|\phi\| \cdot \|s\|_p \quad \forall\, s$ ——— " ———.

Ισχύει ότι $\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p = 1} \left| \int g \cdot f \, d\mu \right|$.

⚠

[Αυτό το έχουμε δείξει όταν $g \in L^q$. Ισχύει όμως και για κάθε μετρήσιμη g σε σ-πεπερ. χώρους, δηλ. ακόμη και αν $\|g\|_q = +\infty$ (άσκηση)].

Οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον L^p,

και άρα, σε <u>σ-πεπερασμένους</u> χώρους,

$$\|g\|_q = \sup_{\substack{\|s\|_p=1 \\ s \text{ απλή}}} \left| \int g \cdot s \, d\mu \right|$$

(Άσκηση. Για $\|g\|_q = +\infty$, προσεγγίζουμε πρώτα τη $\|g\|_q$ and $\|t\|_q < +\infty$, για $0 \le t \le |g|$, t απλές.)

Άρα, $\|g\|_q = \sup_{\substack{\|s\|_p=1 \\ s \text{ απλή}}} \underbrace{|\phi(s)|}_{\le \|\phi\| \cdot \|s\|_p = \|\phi\|} \le \|\phi\| < +\infty.$

Άρα, $g \in L^q$.

→ **Βήμα 2** : Το αποδεικνύουμε για μ σ-πεπερασμένο.

Έστω $\phi : L^p \to \mathbb{K}$ φραγμένο γρ. συναρτησοειδές. Ψάχνουμε $g \in L^q$ ώστε: $\phi(f) = \int f \cdot g \, d\mu \quad \forall f \in L^p$.

$\forall A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε $L^p(A) := \{ f \in L^p : f \equiv 0 \text{ στο } X \setminus A \}$.

Ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος, άρα $\exists (A_n)_n$ αύξουσα ακολ. στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.

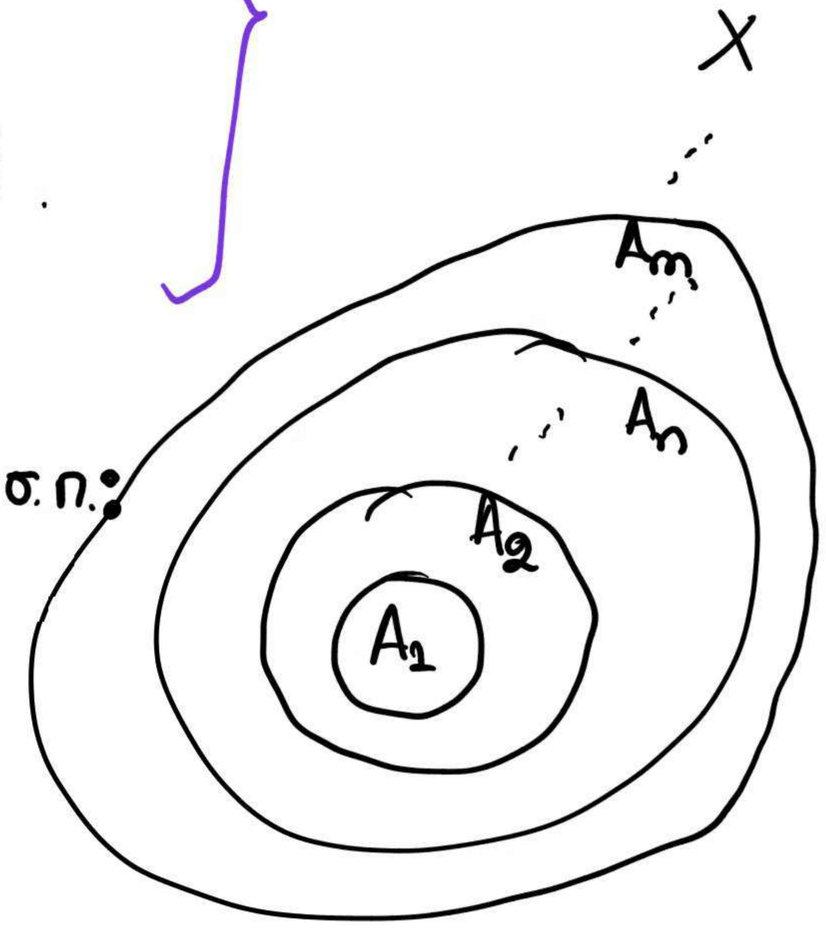
$$\phi \in (L^p)^* \longrightarrow \phi_{|L^p(A_n)} \in \left(L^p(A_n)\right)^* = L^q(A_n)$$

(καθώς $\mu(A_n) < +\infty$).

Αρα, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\ g_n \in L^p(A_n)$:

(*1) $\phi(f) = \int f \cdot g_n \, d\mu \left(= \int_{A_n} f g_n \, d\mu \right)$, $\forall\ f \in L^p(A_n)$

και (*2) $\| g_n \|_q = \| \phi_{|L^p(A_n)} \| \leq \| \phi \|$.



Για κάθε $m \geq n$, $A_m \supseteq A_n \longrightarrow$ $g_m \chi_{A_n} = g_n$ μ-σ.π.

$\forall\ f \in L^p(A_n)$:

- $\phi(f) = \int f \cdot g_n \, d\mu$
- $f \in L^p(A_m) \Rightarrow \phi(f) = \int f \cdot g_m \, d\mu$

$= \int f \cdot (g_m \chi_{A_n}) \, d\mu$.

Άρα, το $\phi \in (L^p(A_n))^*$ αναπαρίσταται ευχερώς από τις

$g_n \cdot g_m \chi_{A_n}$. Λόγω της μοναδικότητας αυτής της αναπαράστασης

(καθώς $\mu(A_n) < +\infty$), έχουμε: $g_n = g_m \chi_{A_n}$ στον $L^p(A_m)$.

Άρα, μπορούμε να ορίσουμε $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}$

με $g\chi_{A_n} := g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(η g ορίζεται καλά μ-σ.π.). Έχουμε:

• $g \in L^q$: $0 \le |g_n|^q \nearrow |g|^q \xrightarrow[\text{Σήμελ.}]{\text{Μονότ.}}$

$$\longrightarrow \int |g|^q \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int |g_n|^q \, d\mu}_{\| g_n \|_q^q} \overset{(*_2)}{\leq} \|\phi\|^q < +\infty, \text{ για } q \neq +\infty.$$

Για $q = +\infty$: $\|g\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty \leq \|\phi\|$.

⊙ $\phi(f) = \int f \cdot g \, d\mu \quad \forall f \in L^p$:

Έστω $f \in L^p$. $|f\chi_{A_n} - f|^p \longrightarrow 0$ κ.σ.

$\overset{\text{Κυριαρχ. Σύγκλιση}}{\Longrightarrow}$ $\|f\chi_{A_n} - f\|_p \longrightarrow 0$

$\phi: L^p \to K$ συνεχής $\Longrightarrow$ $\phi(f\chi_{A_n}) \longrightarrow \phi(f)$, δηλ. $(*_1)$:

$$\phi(f) = \lim_{n\to+\infty} \int \underbrace{g_n}_{\| \; g\chi_{A_n}} f\,d\mu = \int g\cdot(f\chi_{A_n})\,d\mu \overset{(+)}{=} \int g f\,d\mu .$$

$$\Big((+):\ \Big|\int gf\,d\mu - \int g f\chi_{A_n}\,d\mu\Big| \le \int |g|\cdot|f - f\chi_{A_n}|\,d\mu$$

$$\le \underbrace{\|g\|_q}_{<+\infty} \cdot \underbrace{\|f - f\chi_{A_n}\|_p}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Big).$$

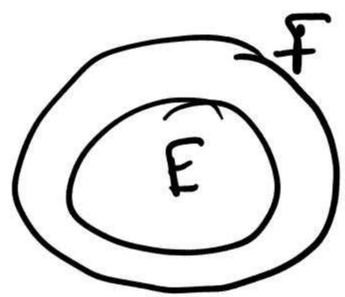
→ Βήμα 3 : Το αποδεικνύουμε για τυχαίο μέτρο μ:

Έστω $\phi: (X, \Lambda, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}$ φρ. γρ. συναρτησοειδές.

Ψάχνουμε $g \in L^q$ με $\phi(f) = \int f \cdot g \, d\mu \quad \forall f \in L^p$.

$\forall \; E \subseteq X$ σ-πεπερασμένο, ξέρουμε ήδη ότι $f g_E \in L^q(E)$

$$\left.\begin{aligned} \phi(f) &= \int f \cdot g_E \, d\mu \quad \forall f \in L^p(E) \\ \text{και} \quad \|g_E\|_q &= \|\phi_{|L^p(E)}\| \leq \|\phi\| . \end{aligned}\right\}$$



Επίσης, όπως στο προηγούμενο βήμα, αν $E \subseteq F$ σ-πεπερασμένα, τότε $g_F = g_E$ μ-σ.π. στο E,

και άρα $\|g_E\|_q \leq \|g_F\|_q$.

Έστω $M := \sup\{\|g_E\|_q : E \subseteq X \text{ σ-περασμένο}\}$.
$(\leq \|\phi\|)$.

Υπάρχει F σ-περασμένο $\subseteq X$ με $\boxed{\|g_F\|_q = M}$ (δηλ. το sup είναι max). Πράγματι, $\exists$ $(E_n)_n$ ακολ. σ-περασμένων $\subseteq X$ με $\|g_{E_n}\|_q \longrightarrow M$. Ορίζουμε $F := \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, έχουμε ότι F σ-περ. και

$E_n \subseteq F \quad \forall n \longrightarrow \|g_{E_n}\|_q \leq \|g_F\|_q \leq M \quad \forall n$

$\|g_{E_n}\|_q \downarrow M$

$M \downarrow M$

$\longrightarrow \quad \|g_F\|_q = M.$ ∎

ΘΔΟ $\phi(f) = \int f \cdot g_F \, d\mu$, $\forall f \in L^p$:

Πρώτα, παρατηρούμε ότι, $\forall$ $A \subseteq X$ σ-πεπερασμένο με $F \subseteq A$, έχουμε $g_F = g_A$ μ-σ.π.

Πράγματι, $\|g_A\|_q \leq M = \|g_F\|_q = \|g_A\|_q \Longrightarrow \|g_F\|_q = \|g_A\|_q$,

δηλ. $\int |g_F|^q \, d\mu \overset{(*)}{=} \int |g_A|^q \, d\mu$. Επίσης, $F \subseteq A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g_A = g_F$ μ-σ.π. πάνω στο F. (*')

Άρα, $\int |g_A|^q \, d\mu = \int_F |g_A|^q \, d\mu + \int_{F \setminus A} |g_A|^q \, d\mu$

$\overset{(*')}{=} \int |g_F|^q \, d\mu + \int_{F \setminus A} |g_A|^q \, d\mu$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \int_{F \setminus A} |g_A|^q \, d\mu = 0 \longrightarrow g_A = 0$ μ-σ.π. εκτός του F. ∎

Τώρα, έστω $f \in L^p$.

Το $A := F \cup \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο $\subseteq X$
(Άσκηση!)

Επιπλέον, $f \equiv 0$ στον $X \setminus A$, δηλ. $f \in L^p(A)$. Άρα,

$$\phi(f) = \int f \cdot g_A \, d\mu \underset{g_A = g_F \ \mu\text{-σ.π.}}{=\!=} \int f \cdot g_F \, d\mu .$$

■

→ **Χώροι πηλίκα**:

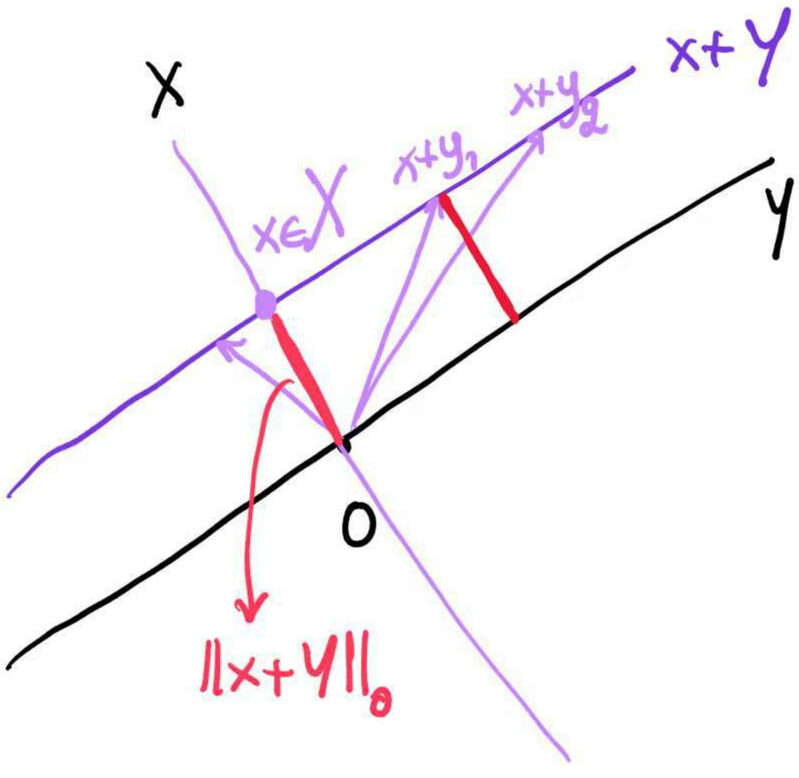
→ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $Y \leq X$ (δηλ., Y διανυσματικός υπόχωρος του X).

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X, με

$$x_1 \sim x_2 \overset{\text{ορ}}{\iff} x_1 - x_2 \in Y.$$

$\forall x \in X$, η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το

$$x + Y := \{ x + y : y \in Y \} =: [x].$$



X/Y := ο χώρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας

$$= \{ x+Y : x \in X \}.$$

Ο X/Y είναι επίσης διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{με} & (x_1+Y)+(x_2+Y) := (x_1+x_2)+Y \quad \forall\, x_1, x_2 \in X, \\ \text{και} & \lambda\cdot(x+Y) := (\lambda x)+Y \quad \forall\, x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right).$$

Το $\mathbb{0}$ του X/Y είναι το $0+Y = Y$.

Έστω επιπλέον ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

$\forall x \in X$, ορίζουμε $\|x+Y\|_0 := \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$

$\left(= \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x, Y)\right)$.

Η $\|x+Y\|_0$ είναι ανεξάρτητη του αντιπροσώπου που επιλέγουμε στον $x+Y$! Πράγματι, για $\bar{x} \in x+Y$, $\exists\, \bar{y} \in Y$: $x-\bar{x} = \bar{y}$. Άρα,

$$\|\bar{x}+Y\|_0 = \inf\{\|\bar{x}-y\| : y \in Y\}$$

$$= \inf\{\|x-(\bar{y}+y)\| : y \in Y\} \overset{\bar{y}+Y=Y}{=\!=} \|x+Y\|_0 .$$

⟶ **Πρόταση:** Αν $Y \leq X$ κλειστός, τότε η $\|\cdot\|_0$ είναι νόρμα στον $(X, \|\cdot\|)$.

Απδ: • $\|x+Y\| \geq 0 \quad \forall x \in X$, και

$$\|x+Y\| = 0 \iff \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x, Y) = 0 \iff x \in \overline{Y} = Y$$

$$\iff x + Y = 0 + Y.$$

• $\|\lambda x + Y\|_0 = \inf\{\|\lambda x - y\| : y \in Y\}$

$$= |\lambda| \cdot \inf\left\{\left\|x - \frac{y}{\lambda}\right\| : y \in Y\right\}$$

$$\overset{\frac{Y}{\lambda} = Y}{=} |\lambda| \cdot \inf\{\|x-y\| : y \in Y\} = |\lambda| \cdot \|x+Y\|_0,$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ x \in X.$

- $\| (x_1 + Y) + (x_2 + Y) \|_0 = \| (x_1 + x_2) + Y \|_0 =$

$= \inf \{ \| (x_1 + x_2) - y \| : y \in Y \}$ $\underline{\underline{Y + Y = Y}}$

$= \inf \{ \underbrace{\| (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \|}_{\| (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \|} : y_1, y_2 \in Y \}$

$\| (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \|$

$\leq$

$\| x_1 - y_1 \| + \| x_2 - y_2 \|$

$= \inf \{ \| x_1 - y_1 \| : y_1 \in Y \} + \inf \{ \| x_2 - y_2 \| : y_2 \in Y \}$

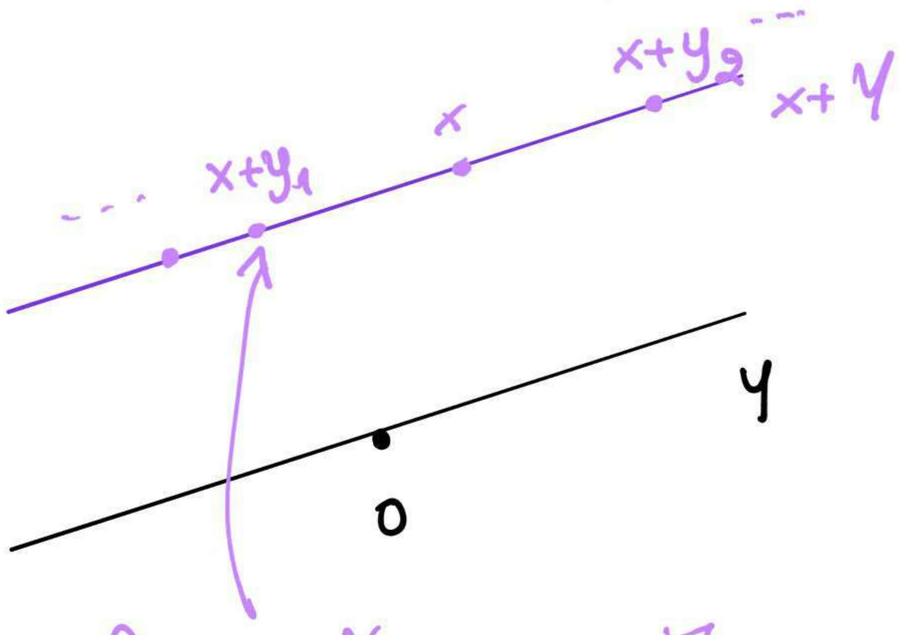
$= \| x_1 + Y \|_0 + \| x_2 + Y \|_0 .$ ∎

→ <u>Ορισμός:</u> Αποκαλούμε φυσιολογική απεικόνιση τη συνάρτηση

$$Q : X \longrightarrow X/Y$$

με $x \longrightarrow x+Y$, $\forall x \in X$.

Η Q είναι <u>γραμμική</u> (απλό).



καθε $x \in X$ απεικονίζεται στην κλάση ισοδυναμίας του.

→ <u>Πρόταση:</u> Αν $Y \leq X$ <u>κλειστός</u>,

τότε ο $Q: X \longrightarrow X/Y$

$x \longrightarrow x+Y$

είναι <u>φραγμένος</u> γρ. τελεστής, με <u>$\|Q\|=1$</u>.

Αν $Y \lneq X$, τότε $\|Q\|=1$.

Απδ.: • $\forall x \in X$,

$$\|Qx\|_0 = \|x+Y\|_0 = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$$

$$\leq_{0 \in Y} \|x-0\| = \|x\|.$$

Άρα, ο γρ. τελεστής Q είναι φραγμένος, και $\|Q\| \leq 1$.

• $Y \subsetneq X \Rightarrow \|Q\| \geq 1$: $\forall \varepsilon > 0$, θα βρούμε $x_\varepsilon \in X$ ώστε:

$$\|Qx_\varepsilon\|_0 \geq (1-\varepsilon) \cdot \|x_\varepsilon\|.$$

(Αυτό θα σημαίνει ότι $\|Q\| \left(= \sup_{\|x_0\|=1} \|Qx_0\|_0\right) \geq \|Q\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)\|_0 \geq 1-\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

και άρα $\|Q\| \geq 1$.)

Έστω $\varepsilon > 0$.

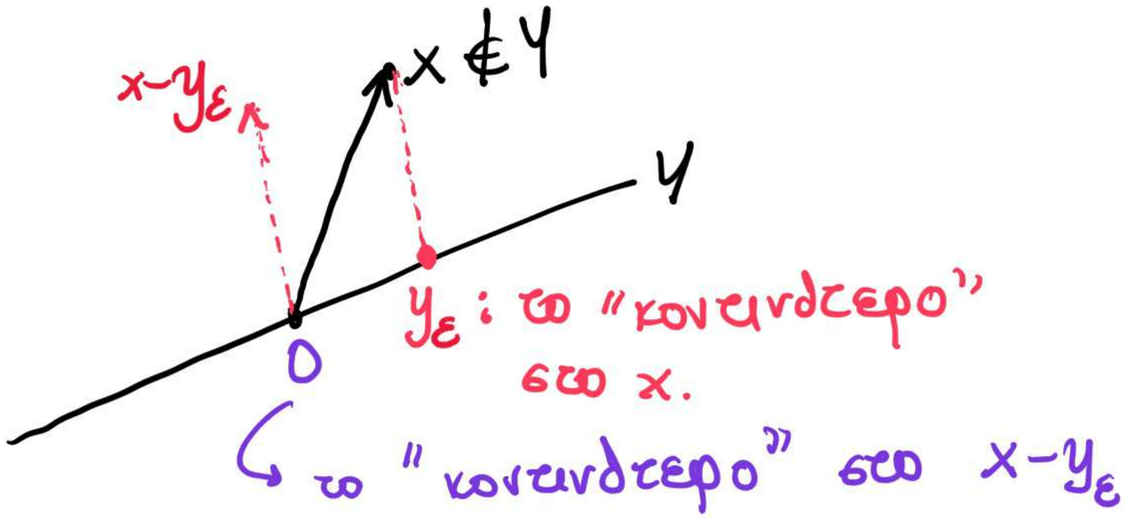
Ξέρουμε ότι, $\forall x \in X$,

$$\|Qx\|_0 = \text{dist}_{\|\cdot\|}(x, Y), \text{ ενώ } \|x\| = \text{dist}_{\|\cdot\|}(x, 0).$$

Άρα, ψάχνουμε $x_\varepsilon \in X$ ώστε

$$\text{dist}_{\|\cdot\|}(x_\varepsilon, Y) \geq (1-\varepsilon) \cdot \text{dist}_{\|\cdot\|}(x_\varepsilon, 0)$$

Δηλαδή, στο περίπου, το $0 \in Y$ πρέπει να είναι το "πιο κοντινό" στοιχείο του Y στο x_ε



Έστω $x \in X \setminus Y$

(τέτοιο x υπάρχει επειδή $Y \subsetneq X$).

$$\inf \{ \|x-y\| : y \in Y \} \underset{Y=\bar{Y}}{=} \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x, \bar{Y}) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, y_\varepsilon \in Y : \left(\operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x, \bar{Y}) \leq \right) \|x - y_\varepsilon\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x, \overset{Y}{\bar{Y}}) \overset{''}{}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x - y_\varepsilon, Y)$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \|Q(x - y_\varepsilon)\|_0$$

$x + Y = x - y_\varepsilon + Y$,
αφού $y_\varepsilon \in Y \Longrightarrow$ ισες $\|\cdot\|_0$

Άρα, το $x_\varepsilon := x - y_\varepsilon \in Y$ ικανοποιεί:

$$\| Q x_\varepsilon \|_0 \geq (1-\varepsilon) \| x_\varepsilon \| .$$

■

→ <u>Υπόχωροι πεπερασμένης συνδιάστασης:</u>

→ <u>Ορισμός</u>: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $Y \leq X$. Ορίζουμε τη συνδιάσταση του Y, και συμβολίζουμε με $\operatorname{codim} Y$, την ποσότητα

$$\operatorname{codim} Y := \dim \left(X / Y \right).$$

⚠ Επομένως, $\operatorname{codim} Y = m < +\infty$ σημαίνει ότι υπάρχουν

$x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε:

$X/Y = \operatorname{span}\{x_1 + Y, \dots, x_m + Y\}$ και $x_1 + Y, \dots, x_m + Y$ γρ. ανεξάρτητα.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής:

$\forall x \in X$, υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x + Y = \lambda_1 (x_1 + Y) + \dots + \lambda_m (x_m + Y),$$

δηλ. ώστε $x - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \in Y$,

δηλ. ώστε $x = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) + y$, για κάποιο $y \in Y$.

→ <u>Λήμμα</u>: Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T: X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε

$\tilde{T}: X/\ker T \longrightarrow Y$

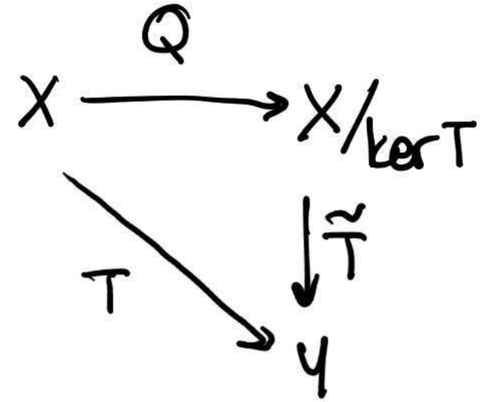
με $\tilde{T}(x + \ker T) = Tx$, $\forall x + \ker T \in X/\ker T$.

Ο $\tilde{T}$ είναι καλά ορισμένος, γραμμικός τελεστής, 1-1, και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

$\ker T = T^{-1}(\{0\})$ <u>κλειστός</u> $\subsetneq X$, άρα $\|\cdot\|_0$ <u>νόρμα</u> στον X.

<u>Απδ</u>: Παρατηρούμε πως έχουμε ορίσει

$\tilde{T} \circ Q := T$, όπου $Q: X \longrightarrow X/\ker T$
$x \longrightarrow x + \ker T.$



Αφού δείξουμε πως ο $\tilde{T}$ ορίζεται καλά, θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για μέρος της απόδειξης. ∎

- <u>Ο $\tilde{T}$ ορίζεται καλά</u> : ΘΔΟ πως αν

$x_1 + \ker T = x_2 + \ker T$ (δηλ., αν $x_1 \sim x_2$), τότε

$\tilde{T}(x_1+\ker T) = \tilde{T}(x_2+\ker T)$, δηλ. $Tx_1 = Tx_2$. Και όντως,

$x_1 \sim x_2 \longrightarrow \exists\, z \in \ker T : \; x_2 = x_1 + z$

$$\Longrightarrow \quad Tx_2 = Tx_1 + \underbrace{Tz}_{\| \; 0} = Tx_1 .$$

- Ο $\tilde{T}$ είναι <u>γραμμικός</u> τελεστής (απλά), με <u>$\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$</u>:

$\forall\, x + \ker T \in X/\ker T$ (δηλ., $\forall x \in X$),

$$x + \ker T = (x+z) + \ker T \,, \quad \forall z \in \ker T$$

$$\Longrightarrow \|\tilde{T}(x+\ker T)\| = \|\tilde{T}((x+z)+\ker T)\| \,, \quad \forall z \in \ker T$$

$$= \|T(x+z)\| \,, \quad \forall z \in \ker T$$

$$\leq \|T\| \cdot \|x+z\| \,, \quad \forall z \in \ker T.$$

$$\longrightarrow \|\tilde{T}(x+\ker T)\| \leq \|T\| \cdot \inf\{\|x+z\| : z \in \ker T\}$$

$$= \|T\| \cdot \|x+\ker T\|_0 .$$

Άρα, $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

- $\underline{\|T\| \leq \|\tilde{T}\|}$: $T = \tilde{T} \circ Q \Longrightarrow \|T\| \leq \|\tilde{T}\| \cdot \|Q\| =$

$$= \begin{cases} \|\tilde{T}\| \cdot 1, & \text{αν } \ker T \subsetneq X, \text{ δηλ. } T \neq 0 \\ 0, & \text{αν } T = 0 \end{cases}$$

$$= \|\tilde{T}\|.$$

- $\underline{\tilde{T} \text{ 1-1}}$: Έστω $x_1 + \ker T \neq x_2 + \ker T$

$\Longrightarrow$ $x_1 - x_2 \notin \ker T \Longrightarrow T(x_1 - x_2) \neq 0 \Longrightarrow Tx_1 \neq Tx_2$,

δηλ. $T(x_1 + \ker T) \neq T(x_2 + \ker T)$.

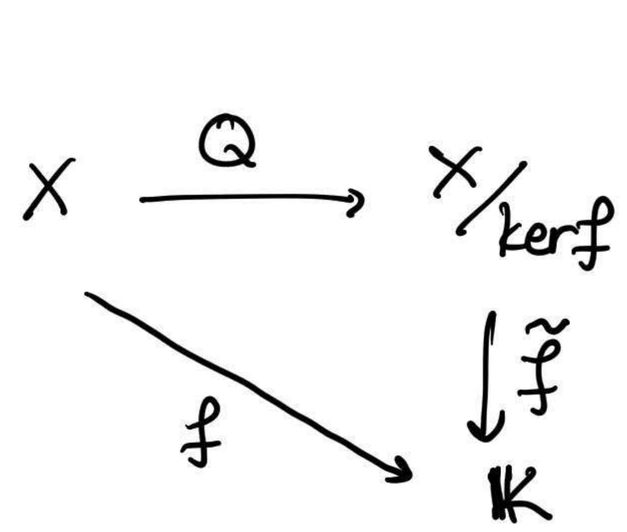
→ Πρόταση: Έστω $f: X \to \mathbb{K}$ γρ. συναρτησοειδές.

Τότε, $f \neq 0 \iff$ ο $\ker f$ έχει συνδιάσταση 1.

Απδ: ($\Longleftarrow$) Τετριμμένο: $\exists\ x + \ker f \neq \ker f$, δηλ. $\exists x \in X \setminus \ker f$.
Άρα, $f \neq 0$.

($\Longrightarrow$) Η $\tilde{f}: X/\ker f \to \mathbb{K}$

με $\tilde{f}([x]) = f(x) \quad \forall x \in X$



ικανοποιεί: $\tilde{f}$ γραμμική, 1-1 (από Λήμμα), και επί ($\tilde{f} \neq 0$).

Apa, $\dim\left(X/\ker f\right) = \dim \underbrace{\ker \tilde{f}}_{\|} + \dim \underbrace{\operatorname{Im} \tilde{f}}_{\|} = 0+1 = 1.$

$\{0\}$ $\quad$ $\mathbb{K}$

■

→ **Πήμμα**: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $f, g : X \to \mathbb{K}$ γραμμικές, με

$$\ker f = \ker g.$$

Τότε, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ ώστε: $f=\lambda g$.

Απόδειξη: • Αν $f=0 \Rightarrow \ker f = X \Rightarrow \ker g = X \Rightarrow g=0=f$.

• Έστω $f\neq 0 \Rightarrow$ ο $\ker f$ έχει συνδιάσταση 1. Άρα, επιλέγοντας $x_0 \in X \setminus \ker f$, έχουμε: $X/\ker f = \operatorname{span}\{x_0 + \ker f\}$.

Άρα, $\forall x \in X$, υπάρχουν (μοναδικά) $\alpha \in \mathbb{K}$, $y \in \ker f$, ώστε

$$x = \alpha x_0 + y$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha f(x_0) + \cancel{f(y)}^{0} = \alpha f(x_0) \\ g(x) = \alpha g(x_0) + \cancel{g(y)}^{0} = \alpha g(x_0) \end{cases} \xrightarrow{\alpha = \frac{g(x)}{g(x_0)}} f(x) = \boxed{\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}^{\mathbb{K}} \cdot g(x),$$

$\forall x \in X.$

■

→ Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και

$f: X \to \mathbb{K}$ γραμμική.

Τότε, η f είναι φραγμένη $\iff$ ο $\ker f$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Απδ.: • Για $f=0$: $\ker f = X$, κλειστό στο X.

• Για $f \neq 0$: ($\Longrightarrow$) f φραγμένη $\Rightarrow$ f συνεχής $\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(\{0\})}_{\ker f}$ κλειστό στο X. (κλειστό $\{0\}$)

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\ker f$ κλειστός στον X. Τότε, ο

$\left(X/_{\ker f} , \|\cdot\|_0 \right)$ είναι χώρος με νόρμα, και

$\dim\left(X/_{\ker f}\right) = 1 = \dim \mathbb{K}$. Άρα, υπάρχει <u>ισομορφισμός</u>

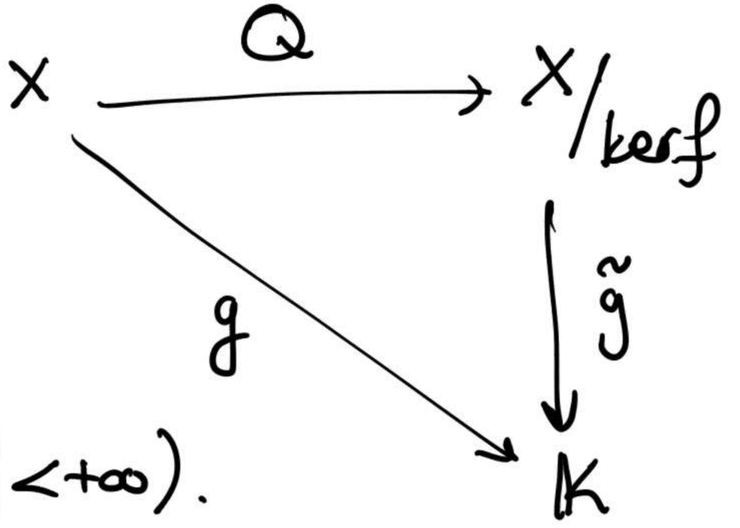
(δηλ. 1-1, επί, συνεχής, με συνεχή αντίστροφη)

$$\tilde{g} : X/_{\ker f} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

(π.χ., η $\tilde{g}$ με $\tilde{g}(x_0+\ker f)=1$, όπου $\operatorname{span}\{x_0+\ker f\} = X/_{\ker f}$)

Επομένως, η $g: X \to \mathbb{K}$

με $g := \tilde{g} \circ Q$,



είναι γραμμική και <u>φραγμένη</u> (αφού $\|g\| = \|\tilde{g}\| < +\infty$).

Και: $\boxed{\ker g = \ker f}$: $g(x) = 0 \iff \tilde{g}(x + \ker f) = 0$

$\iff$ $x + \ker f = \emptyset_{x/\ker f}$

$\tilde{g}$ 1-1

$\iff$ $x \in \ker f$.

Από το Λήμμα, $\exists \lambda \in K$ ώστε $f = \lambda g$ $\xrightarrow[\text{μέση}]{g \text{ φραγ-}}$ f φραγμένη.

■

→ Ημινόρμες, Θεώρημα Hahn-Banach

→ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Μια $p: X \to \boxed{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ λέγεται ημινόρμα αν:

(i) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $\forall x,y \in X$.

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

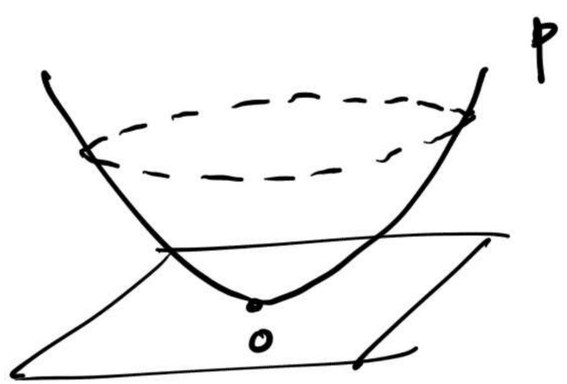
→ Ιδιότητες:
- $p(x)=p(-x)$, $\forall x \in X$.
- $p(0)=0$
- $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$, $\forall x,y \in X$.

- Το $Y = \{ x \in X : p(x) = 0 \}$ είναι γραμμική υπόχωρος του X:

$$\left[\begin{array}{l} \forall x, y \in Y, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow x + y \in Y. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in Y, \quad p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) = |\lambda| \cdot 0 = 0 \Longrightarrow \lambda x \in Y. \end{array} \right]$$

- Κάθε νημίνδρομα $p : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι κυρτή συνάρτηση:

$$\forall x, y \in X, \quad p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{p(x+y)}{2} \leq \frac{p(x)+p(y)}{2}.$$



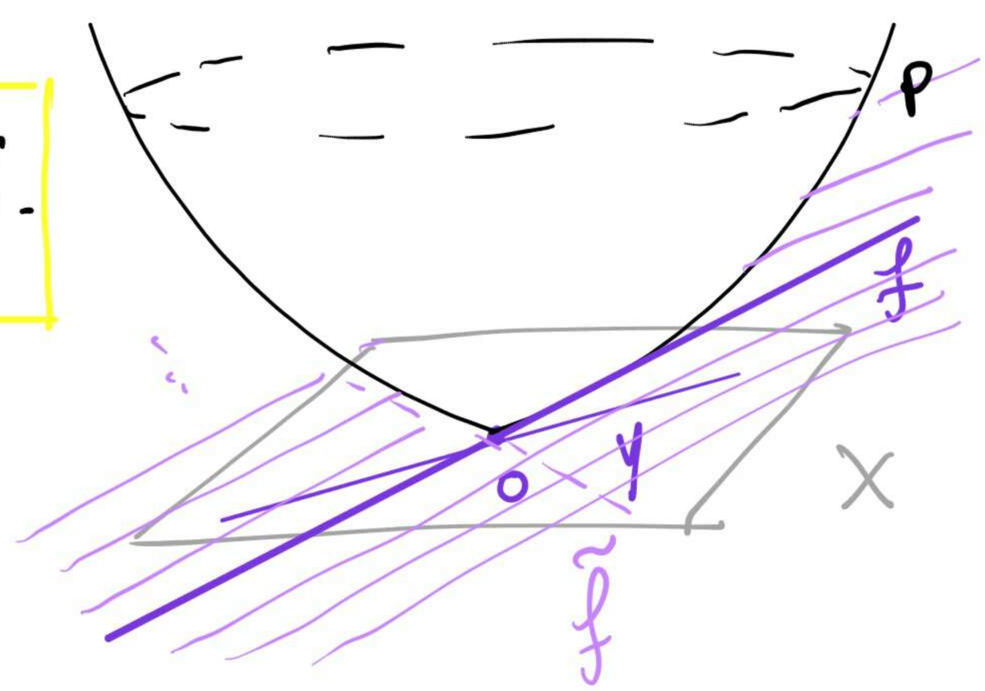
→ **Θεώρημα Hahn - Banach:** Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω:

(i) $p : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ νημίνδρμα, και

(ii) $Y \leq X$ και $f : Y \to \mathbb{K}$ γραμμική, με $|f(y)| \leq p(y)$ $\forall y \in Y$.

Τότε, $\exists$ $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ γραμμική, με

$$\tilde{f}_{|Y} = f \quad \text{και} \quad |\tilde{f}(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X.$$



→ <u>Θεώρημα:</u> (<u>αναλυτική</u> μορφή του Θ. Hahn-Banach)

Έστω X χώρος με νόρμα, και $Y \leq X$.

Έστω $f \in Y^*$. Τότε, $\exists\ \tilde{f} \in X^*$, με

$$\tilde{f}_{|Y} = f \quad \text{και} \quad \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

<u>Απδδ.:</u> $\forall y \in Y, \quad |f(y)| \leq \underbrace{\|f\|_{Y^*} \cdot \|y\|}_{\text{ημινόρμα στον } Y}.$

Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

με $p(x) = \|f\|_{Y^*} \cdot \|x\| \quad \underline{\forall x \in X}$. Η p είναι ημινόρμα στον $\underline{X}$,

και η γραμμική $f: Y \to \mathbb{K}$ ικανοποιεί:

$$|f(y)| \leq p(y) \quad \forall\, y \in Y.$$

Από το Θ. Hahn-Banach, ∃ γραμμική $\tilde{f}: X \to \mathbb{K}$, με

$$\tilde{f}_{|Y} = f \quad \text{και} \quad |\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X,$$

δηλ. $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{Y^*} \cdot \|x\| \quad \forall x \in X.$

Άρα, $\tilde{f} \in X^*$ και μάλιστα $\|\tilde{f}\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$.

Και τετριμμένα: $\|f\|_{Y^*} \leq \|\tilde{f}\|_{X^*}$:

$$\|f\|_{Y^*} = \sup_{y \in S_Y(0,1)} |\underbrace{f(y)}_{\tilde{f}(y)}|$$

$$S_Y(0,1) \subset_C S_X(0,1) \qquad \leq \sup_{x \in S_X(0,1)} |\tilde{f}(x)| = \|f\|_{X^*}.$$

Aρα, $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.

■

⟶ Βασικά πορίσματα του Θ. Hahn – Banach:

(1) $\forall x_0 \in X,\ \exists\ f \in S_{X^*}(0,1)$ με $f(x_0) = \|x_0\|$

(Δηλ., $\exists\ f \in S_{X^*}(0,1)$ που "βλέπει" το $\|x_0\|$.)

Απδδ: Έστω $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Ορίζουμε $Y := \operatorname{span}\{x_0\}$,

και $f_0 : Y \longrightarrow \mathbb{K}$

με $f_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Τότε, $f_0 \in Y^*$ και $\|f_0\|_{Y^*} = 1$: $|f_0(\underbrace{\lambda x_0}_{\| y})| = |\underbrace{\lambda x_0}_{\| y}|$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Από Θ. Hahn - Banach, η f_0 επεκτείνεται σε κάποια γραμμική

$f: X \to \mathbb{K}$, με $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*} = 1$

και $f(x_0) \overset{x_0 \in Y}{=\!=} f_0(x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$. ∎

(2) $\forall x \in X$, $\|x\| = \max_{f \in S_{X^*}(0,1)} |f(x)|$

$\left(= \max_{f \in \widetilde{B}_{X^*}(0,1)} |f(x)| \right)$



Απόδ: Έστω $x \in X$.

$\forall f \in B_{X^*}(0,1)$, έχουμε:

$|f(x)| \leq \underbrace{\|f\|_{X^*}}_{\leq 1} \cdot \|x\|$. Άρα:

$$\|x\| \geq \sup_{x \in B_{X^*}(0,1)} |f(x)|$$

Και $\exists\ f_0 \in S_{X^*}(0,1)$ $\left(\subseteq B_{X^*}(0,1)\right)$ ωστε

$$\|x\| = |f_0(x)|.$$

Άρα, $\|x\| = |f_0(x)| = \max_{x \in S_{X^*}(0,1)} |f(x)| = \max_{x \in B_{X^*}(0,1)} |f(x)|$.

■

③ Ο X^* διαχωρίζει σημεία του X.

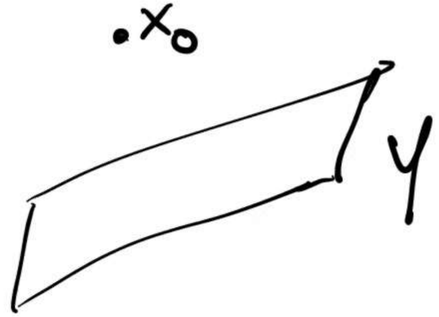
Απόδ: Έστω $x \neq y$ στον X. Τότε, $\exists\, f \in X^*$, με $\|f\|_{X^*} = 1$,

ώστε $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0 \Longrightarrow$ $f(x) \neq f(y)$ για αυτή την $f \in X^*$.

■

④ Ο X^* διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους (στον X).

Δηλ., έστω $x_0 \in X$ και $Y \leq X$ κλειστός. Τότε, $\exists\, f \in X^*$, με $\|f\| = 1$, ώστε $f(y) = 0 \quad \forall y \in Y$ και $f(x_0) = \mathrm{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y)$



Αποδ.: Y κλειστός $\subseteq X \implies o\ (X/Y, \|\cdot\|_0)$ είναι χώρος με νόρμα.

Αφού $x_0 \notin Y$, το $x_0 + Y \neq 0_{X/Y}$.

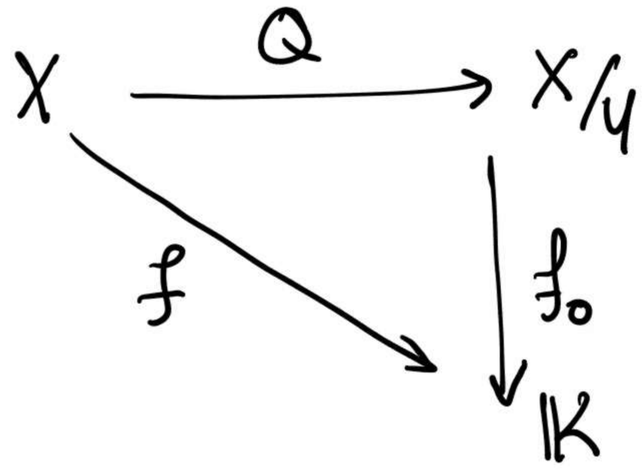
Άρα, $\exists\ f_0 \in (X/Y)^*$, με $\|f_0\|_{(X/Y)^*} = 1$, ώστε

$$f_0(x_0 + Y) = \|x_0 + Y\|_0 = \mathrm{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y).$$

Τότε, η $f: X \to \mathbb{K}$

$$f := f_0 \circ Q$$

είναι γραμμική,



και $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{(X/Y)^*} = 1$. Επιπλέον,

$$f(x_0) = f_0(x_0 + Y) = \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y)$$

$$\text{et} \quad \forall y \in Y, \quad f(y) = f_0(\underbrace{y + Y}_{\| \; \Phi_{X/Y}}) \underbrace{=}_{f_0 \text{ appart.}} 0$$

$\Big\}$.

■

→ Τοπολογικοί χώροι

→ Ορισμός: Έστω $X \neq \phi$.

⊙ Τοπολογία στον X ονομάζεται κάθε οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X, με τις εξής ιδιότητες:

⇝ $\phi, X \in \mathcal{T}$.

⇝ Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

⇝ Αν $U_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$, τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(I: κάποιο σύνολο δεικτών)

⊙ Έστω $\mathcal{C}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X.

Συμβολίζουμε με $\sigma(\mathcal{C})$, και αποκαλούμε <u>την τοπολογία που παράγεται από τη $\mathcal{C}$</u>, τη μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει τη $\mathcal{C}$.

Η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η τομή όλων των τοπολογιών στον X που περιέχουν τη $\mathcal{C}$.

Έστω $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X.

- Μία $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ λέγεται <u>βάση της $\mathcal{T}$</u> αν κάθε $U \in \mathcal{T}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.

- Αν $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$, τότε η

$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} := \{$πεπερασμένες τομές στοιχείων της $\mathcal{C}\} \cup \{X\}$

είναι βάση της $\mathcal{T}$.

Απδδ.: Έστω $\mathcal{T}' := \{$ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}\}$.

→ Η $\mathcal{T}'$ είναι τοπολογία στον X (απλό), και περιέχει τη $\mathcal{C}$. Άρα, περιέχει και την $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$. Δηλ: $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$.

→ Από την άλλη πλευρά, η $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$ περιέχει τη $\mathcal{C}$, άρα και όλες τις πεπερασμένες τομές στοιχείων της. Δηλ., $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$.

Επομένως, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$! ∎

● Ορίζουμε ως <u>περιοχή του $x \in X$</u> κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$.

Συμβολίζουμε: $\mathcal{N}_x := \{\text{περιοχές του } X\}$.

● Μια $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ λέγεται <u>βάση περιοχών του x</u> αν:

$\forall$ περιοχή $U \in \mathcal{N}_x$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}_x$ με $V \subseteq U$.



⊙ Έστω ότι $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$ και η $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ όπως παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{N}_x$ είναι βάση περιοχών του x.

Απόδ: Κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_x$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, και κάποιο από αυτά τα στοιχεία θα περιέχει το x. ∎

• Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι.

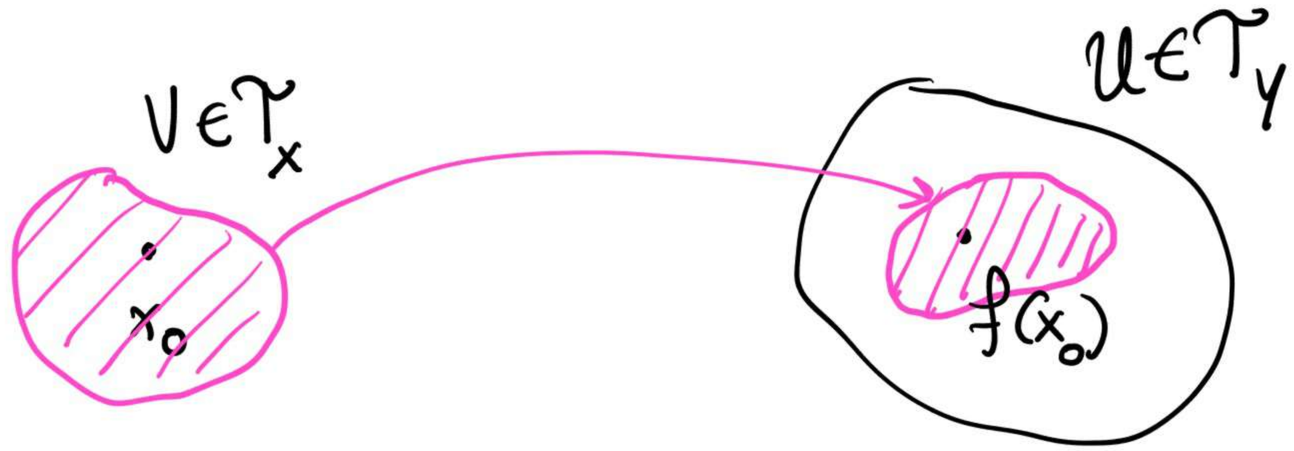
Λέμε ότι μία $f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι <u>συνεχής</u> αν:

$$f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_X \ , \ \forall \ \mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$$

(δηλ., αν αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά).

Λέμε ότι η f είναι <u>συνεχής στο $x_0 \in X$</u> αν:

$\forall\, U \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, $\exists\, V \in \mathcal{N}_{x_0}$: $f(V) \subseteq U$.



→ <u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι, και $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$. Τότε:

$$f \text{ συνεχής} \iff f \text{ συνεχής στο } x_0,\ \forall x_0 \in X.$$

<u>Απδ</u>: Απλή άσκηση.

Ασθενείς τοπολογίες

Η w - τοπολογία στον X :

$X^* = \{ x^* : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) \ : \ x^* \text{ συνεχής γραμμική απεικόνιση} \}$.

Κάθε $x^* \in X^*$ είναι συνεχής $: (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$, και άρα αντιστρέφει ανοιχτά του $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ σε ανοιχτά του $(X, \|\cdot\|)$ (τα ανοιχτά του $(X, \|\cdot\|)$ είναι ενώσεις ανοιχτών μπαλών $B_{(X,\|\cdot\|)}(x,r)$).

Όμως, ο $(X, \|\cdot\|)$ μπορεί να έχει <u>πιο πολλά</u> ανοιχτά απο όσα χρειά-

Θέλουμε για να είναι οι $x^* : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχείς.

Ορίζουμε

$\tau_w :=$ η μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει τα $(x^*)^{-1}(U)$, $\forall U$ ανοιχτό στον $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, $\forall x^* \in X^*$

$=$ η μικρότερη τοπολογία τ στον X ώστε <u>κάθε</u> $x^* \in X^*$ να είναι συνεχής : $(X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Αποκαλούμε την τ_w την **ασθενή τοπολογία στον X**, ή την **w-τοπολογία στον X**. Συμβολίζουμε $(X, \tau_w) =: (X, w)$.



Η w-τοπολογία στον X είναι χρήσιμη επειδή έχει λιγότερα ανοιχτά από όσα η τοπολογία του $(X, \|\cdot\|)$.

Άρα, ο (X, w) έχει περισσότερα συμπαγή από τον $(X, \|\cdot\|)$, και έτσι περισσότερα σύνολα απολαμβάνουν τις όμορφες ιδιότητες που η συμπάγεια συνεπάγεται (π.χ. ύπαρξη υποδικτυακών ορίων κάθε δικτύου).

→ Παρατήρηση 1: $\forall x_0 \in X$ και $\forall U \in X$, ισχύει ότι

$$U \in \mathcal{T}_w \iff x_0 + U \in \mathcal{T}_w.$$

Δηλαδή, $$\boxed{\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0, \quad \forall x_0 \in X.}$$

Απδ: Αρκεί το ($\Longrightarrow$). Έστω $x_0 \in X$. ΘΔΟ, $\forall U \in \mathcal{T}_w$, $x_0 + U \in \mathcal{T}_w$ επίσης.

Βήμα 1: Ισχύει για $U = (x^*)^{-1}\left(B(z,r)\right)$, όπου $B(z,r)$ η τυχαία ανοιχτή μπάλα του $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Πράγματι:

$U \in \mathcal{T}_w$, και $U = \{x \in X : |x^*(x) - z| < r$

$$\Longrightarrow \quad x_0 + U = \{ \underbrace{x_0 + x}_{=y} \in X : |x^*(x) - z| < r \} =$$

$$= \{ y \in X : \underbrace{|x^*(y - x_0)}_{\| \; x^*(y) - x^*(x_0)} - \bar{x}| < r \}$$

$$= \{ y \in X : |x^*(y) - \underbrace{(x^*(x_0) + \bar{x})}_{\| \; \alpha \in \mathbb{K}}| < r \}$$

$$= (x^*)^{-1} \Big(B(\alpha, r) \Big) \in \mathcal{T}_w \text{ επίσης.}$$

Βήμα 2: Ισχύει για $U = (x^*)^{-1}(V)$, όπου x^* το τυχαίο στοιχείο του λ^* και V το τυχαίο ανοικτό στον $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Πράγματι, $U \in \mathcal{T}_w$, και:

$$V = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \Longrightarrow U = (x^*)^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} (x^*)^{-1}(B(x_i, r_i))$$

$$\Longrightarrow x_0 + U = \bigcup_{i \in I} \underbrace{x_0 + (x^*)^{-1}\left(B(x_i, r_i)\right)}_{\in \mathcal{T}_w, \text{ and Βήμα 1}} \in \mathcal{T}_w.$$

$\longrightarrow$ <u>Βήμα 3</u>: Ισχύει για το τυχαίο στοιχείο U της βάσης

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}(V_i) : n \in \mathbb{N},\ x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*,\ V_1, \dots, V_n \text{ ανοιχτά στον } (\mathbb{K}, |\cdot|) \right\}.$$

Πράγματι, για την τυχαία επιλογή τέτοιων παραμέτρων,

τότε $U = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_w$, και

$$x_0 + U = \bigcap_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{x_0 + (x_i^*)^{-1}(V_i)}_{\in \mathcal{T}_w, \text{ από Βήμα 2}} \Big) \in \mathcal{T}_w.$$

<u>Βήμα 4</u>: Έστω $U \in \mathcal{T}_w$. Τότε, $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, όπου $B_i \in \mathcal{B}$ $\forall i \in I$

$$\Rightarrow \quad x_0 + U = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(x_0 + B_i)}_{\in \mathcal{T}_w, \text{ από Βήμα 3}} \in \mathcal{T}_w.$$

■

→ Παρατήρηση 2: Το σύνολο

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}\big(B(0,\varepsilon)\big) : n\in\mathbb{N},\ x_1^*,\dots,x_n^*\in X^*,\ \varepsilon>0 \right\}$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x\in X : |x_i^*(x)|<\varepsilon\} : \text{———— " ————} \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του 0. Επομένως, η

$$\mathcal{B}_{x_0} := x_0 + \mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x_0+x\in X : |x_i^*(x)|<\varepsilon\} : n\in\mathbb{N},\ x_1^*,\dots,x_n^*,\ \varepsilon>0 \right\}$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x\in X : |x_i^*(x-x_0)|<\varepsilon\} : \text{———— " ————} \right\}$$

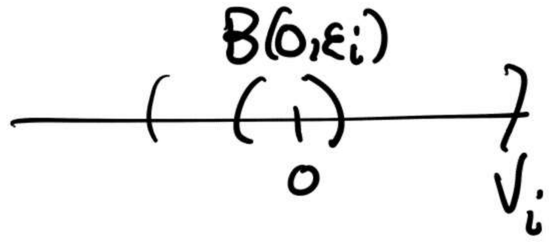
αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0\in X$.

Απδ: Έστω $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_0$. Τότε, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$,
$V_1, \dots, V_n$ ανοιχτά στο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, ώστε $0 \in \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}(V_i) \subseteq \mathcal{U}$.

Κάθε ανοιχτό V_i περιέχει το 0 (καθώς $0 \in (x_i^*)^{-1}(V_i)$
$\Rightarrow x_i^*(0) \in V_i$)
$\Rightarrow 0 \in V_i$

Άρα, $\exists\, \varepsilon_i > 0$ ώστε:

$B(0, \varepsilon_i) \subseteq V_i$.



Άρα, $B(0, \varepsilon) \subseteq V_i$, $\forall i = 1, \dots, n$,
όπου $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Επομένως, $0 \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}\left(B(0,\varepsilon)\right)}_{\in \tau_w} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}(V_i) \subseteq \mathcal{U}$.

→ **Η w^*-τοπολογία στον X^***: $\forall\ (X, \|\cdot\|)$, ορίσαμε

$$X^* = \{ x^* : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : x^* \text{ γραμμική και συνεχής} \}.$$

Χρησιμοποιώντας τον $(X^*, \|\cdot\|)$ στη θέση του $(X, \|\cdot\|)$,
(↳ νόρμα τελεστών)

ορίζουμε

$$X^{**} := (X^*)^* = \{ f : (X^*, \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \text{ γραμμική και συνεχής} \}$$

Η w^*-τοπολογία στον X^* θα είναι η μικρότερη τοπολογία
ώστε <u>κάποιες</u> από τις $f \in X^{**}$ να είναι συνεχείς: συγκεκριμένα,

αυτές που δίνονται από υπόλοιπο σε σημείο:

→ Πράξη: $\forall x_0 \in X$, ορίζουμε $f_{x_0} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$,

με $f_{x_0}(x^*) = x^*(x_0)$, $\forall x^* \in X^*$.

Τότε, $f_{x_0} \in X^{**}$ και $\|f_{x_0}\| = \|x_0\|$.

Από: $\forall x^* \in X^*$, $|f_{x_0}(x^*)| = |x^*(x_0)| \leq \|x_0\| \cdot \|x^*\|$. Άρα, $f_{x_0} \in X^{**}$

και $\|f_{x_0}\| \leq 1$.

Όμως, $\|f_{x_0}\| \geq 1$: από Θ. Hahn-Banach, $\exists\, x_0^* \in X^*$ με $\|x_0^*\| = 1$

και $x^*(x_0) = \|x_0\|$. Άρα, $\|f_{x_0}\| \left(= \sup_{\|x^*\|=1} |f_{x_0}(x^*)| \right) \geq |f_{x_0}(x_0^*)| =$

$= f''_{x_0}(x_0^*)$

$= \|x_0\|$. ∎

→ **Ορισμα**: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χωρος με νορμα. Η απεικονιση

$$\tau : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$$

($\|\cdot\|$: νορμα του X; $\|\cdot\|$: νορμα τελεστων)

με $$\boxed{\tau(x) := f_x \quad \forall\, x \in X},$$

είναι **ισομετρική εμφύτευση** (δηλ. τ γραμμική, τ ισομετρία, αρα και τ 1-1).

⚠ Η τ δεν είναι παντα επι! Αν είναι, τοτε ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **αυτοπαθής**.

→ Ορίζουμε

τ_{w^*} := η μικρότερη τοπολογία τ στον X^* ώστε η

$f_x : (X^*, \tau) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ να είναι συνεχής, $\forall x \in X$

= η μικρότερη τοπολογία στον X^* που περιέχει τα $(f_x)^{-1}(V)$, $\forall x \in X$, $\forall V$ ανοικτό στο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Αποκαλούμε την τ_{w^*} την ασθενή* -τοπολογία στον X^*, ή την w^* - τοπολογία στον X^*. Συμβολίζουμε $(X^*, \tau_{w^*}) =: (X^*, w^*)$.

→ Παρατηρήσεις : ① $\boxed{\mathcal{N}_{x_0^*} = x_0^* + \mathcal{N}_0}$, $\forall\, x_0^* \in X^*$.

② Η $\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (f_{x_i})^{-1}\left(B(0,\varepsilon)\right) : n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n \in X,\ \varepsilon>0 \right\}$

$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x^*\in X^* : |f_{x_i}(x^*)|<\varepsilon : \text{——— // ———} \right\} \right\}$

$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x^*\in X^* : |x^*(x_i)|<\varepsilon : \text{——— // ———} \right\} \right\}$

είναι βάση περιοχών του $0\in X^*$ στην τ_{w^*}.

Επομένως, n

$$\mathcal{B}_{x_0^*} := x_0^* + \mathcal{B}_0 =$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x_0^* + x^* \in X^* : |f_{x_i}(x^*)| < \varepsilon : n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in X,\ \varepsilon > 0 \right\} \right.$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x^* \in X^* : \underbrace{|f_{x_i}(x^* - x_0^*)|}_{\| \\ |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)|} < \varepsilon : \text{---}''\text{---} \right\} \right.$$

είναι βάση περιοχών του x_0^*, $\forall x_0^* \in X^*$.

Από: Άσκηση (παρόμοια με την περίπτωση του (X, w)). ■

Τώρα ορίζουμε τοπολογίες που γενικεύουν τις w, w^*:

→ Η ασθενής τοπολογία που παράγεται από μια οικογένεια ημινορμών.

Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και έστω $\mathcal{P}$ μια οικογένεια ημινορμών $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ορίζουμε

$\tau_{\mathcal{P}}$:= η μικρότερη τοπολογία τ στον X ώστε

κάθε $p \in \mathcal{P}$ να είναι συνεχής: $(X,\tau) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$

και $\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0$, $\forall x_0 \in X$.

$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ = η μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει τα σύνολα

$x_0 + p^{-1}(U)$, $\forall x_0 \in X$, $\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall U$ ανοιχτά $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

(από)

Η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ονομάζεται η ασθενής τοπολογία στον X που παράγεται από την $\mathcal{P}$

⚠ $\forall (X, \|\cdot\|)$:

- $(X, w) = (X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$, όπου $\mathcal{P} = \{ |x^*| : x^* \in X^* \}$.
- $(X^*, w^*) = (X^*, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$, όπου $\mathcal{P} = \{ |f_x| : x \in X \}$.

⟶ Παρατήρηση:

① $\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0$, $\forall x_0 \in X$.

② Η οικογένεια

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}\left(B(0,\varepsilon)\right) : n\in\mathbb{N},\ p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon>0 \right\}$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x\in X : p_i(x) < \varepsilon\} : \text{---------- // ----------} \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του 0. Άρα, από το ①, η

$$\mathcal{B}_{x_0} := x_0 + \mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x\in X : p_i(x-x_0) < \varepsilon\} : n\in\mathbb{N},\ p_1,\dots,p_n\in\mathcal{P},\ \varepsilon>0 \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

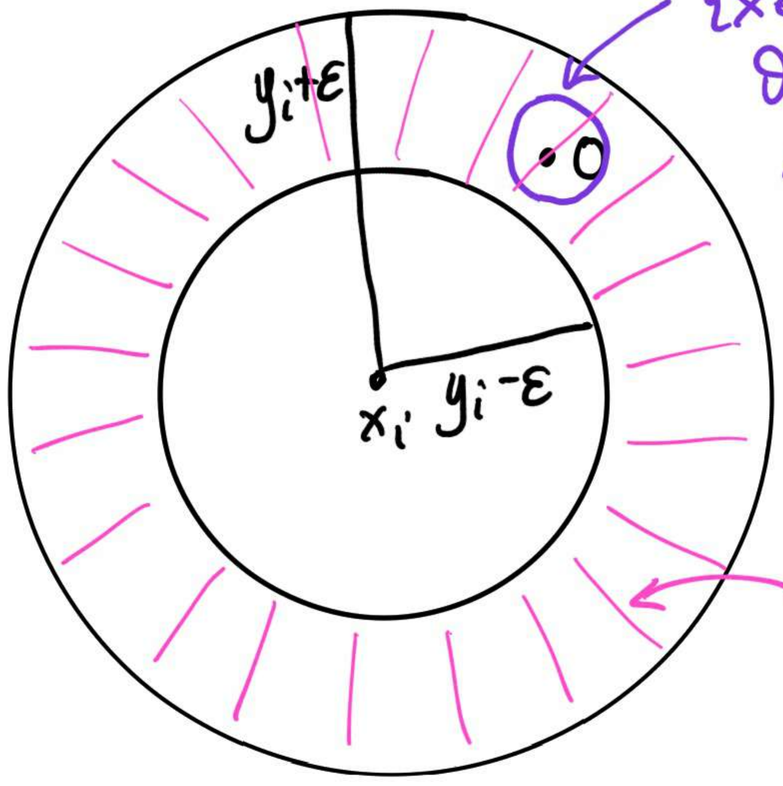
Απδ: (2): Αρκεί να δειχθεί ο ισχυρισμός για τη $\mathcal{B}_0$.

Έστω $U \in \mathcal{N}_0$. Αφού η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει τα $x_0 + p^{-1}(U) : x_0 \in X, p \in \mathcal{P}, U$ ανοικτό $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$, η οικογένεια

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (x_i + p_i^{-1}(U_i)) : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, U_1, \dots, U_n \text{ ανοικτά } \subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|) \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Άρα, $\exists\ V = \bigcap_{i=1}^{n} \left[x_i + p_i^{-1}(B(y_i, \varepsilon_i)) \right]$ με $0 \in V \subseteq U$. Άρα, $\forall i = 1, \dots, n$: $0 \in x_i + p_i^{-1}(B(y_i, \varepsilon_i))$

$$\Rightarrow \quad \underset{p_i(x_i'')}{p_i(-x_i)} \in B(y_i, \varepsilon_i), \text{ δηλ. } y_i - \varepsilon \leq p_i(x_i) \leq y_i + \varepsilon.$$



$\{x\in X: p_i(x)<d\}$ θα περιέχεται στο δακτύλιο για μικρό $d>0$.

$x_i + p^{-1}(B(y_i,\varepsilon_i))$: ο δακτύλιος

Ιδέα: Φαντάζόμαστε την $p_i(x_i)$ σαν μια "απόσταση" του x_i από το 0. Η απόσταση είναι μεταξύ $y_i-\varepsilon_i$ και $y_i+\varepsilon_i$, άρα το 0 ζει σε ένα "δακτύλιο" με κέντρο x_i και ακτίνες.

Έστω $d>0$ ώστε $A_d:=\{x\in X: p_i(x)<d\} \subseteq x_i + p_i^{-1}\left(B(y_i,\varepsilon_i)\right)$. Πράγματι:

$\forall x\in A_d$, $x = x_i + (x-x_i)$, όπου $p(x-x_i) \le p(x)+p(x_i) < p_i(x_i)+d$

$< y_i+\varepsilon$ για $d>0$ μικρό,

και $p(x - x_i) \geq p(x_i) - \underbrace{p(x)}_{<d} > p(x_i) - d > y_i - \varepsilon_i$ για $d>0$ μικρό.

Άρα, $0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \in X : p_i(x) < d\}}_{A_d, \in \mathcal{T}_p} \subseteq V \subseteq \mathcal{U}$,

για κατάλληλα μικρό $d>0$. ∎

⚠ Σταδιακά, θέλω η $\mathcal{T}_p$ είναι η μικρότερη τοπολογία στον X ώστε η

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$$

να αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

Σχέδιο απόδειξης: Έστω $\mathcal{T}$ η μικρότερη τέτοια τοπολογία.

- $\mathcal{T}_p \supseteq \mathcal{T}$, καθώς η $\mathcal{B}_{x_0}$ είναι βάση περιοχών του x_0 στην $\mathcal{T}_p$, $\forall x_0 \in X$.

- $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$: Θα δούμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί ότι κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής, και ότι $\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0 \ \forall x_0 \in X$.

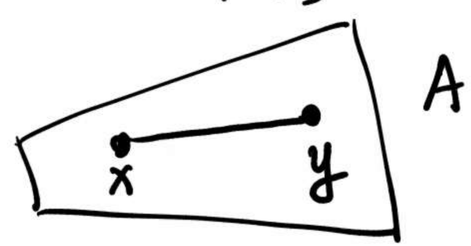
  Αφού η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι η μικρότερη τοπολογία με αυτές τις ιδιότητες, έχουμε ότι $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. ■

Αυτό θα δείχθει $\forall$ τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X με την ιδιότητα ότι η $\mathcal{B}_{x_0}$ αποτελεί βάση περιοχών του x_0 στην $\mathcal{T}$, $\forall x_0 \in X$! Θα δούμε ότι αυτές ακριβώς είναι οι τοπολογίες που καίνουν τον X τοπικά κυρτό, δηλ. οι τοπολογίες ώστε κάθε $x_0 \in X$ να έχει βάση περιοχών που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

Ξεκινάμε βλέποντας ότι το <u>σχήμα</u> κάποιων σημείων (σε κάποιο διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) εκτείνεται με κάποιους κανόνες.

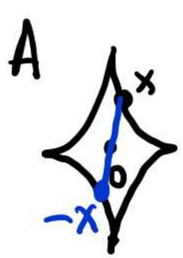
→ <u>Ορισμός:</u> Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.
Έστω $A \subseteq X$. Το A λέγεται:

- <u>κυρτό</u> αν: $\forall\, x,y \in A$ και $\forall\, t \in (0,1)$, το $tx+(1-t)y \in A$.

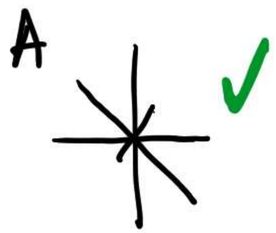


- <u>ισορροπημένο</u> αν: $\forall\, x \in A$ και $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| \leq 1$, το $\lambda x \in A$.

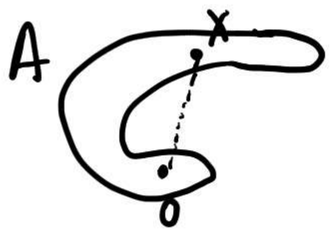
<u>$\mathbb{K}=\mathbb{R}$:</u>



✓



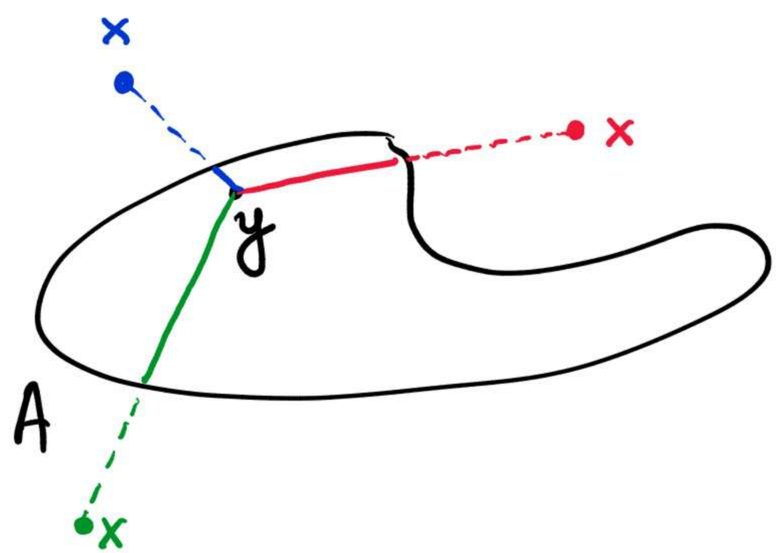
✓



✗

⚠ A ισορροπημένο $\Longrightarrow$ $\begin{cases} 0 \in A \\ A = -A, \text{ δηλ. } A \text{ συμμετρικό}. \end{cases}$

- απορροφούν στο $y \in A$ αν: $\forall x \in X,\ \exists\, \varepsilon_x > 0 : y + tx \in A\ \forall t \in [0, \varepsilon_x)$.



Δηλ., υπάρχει χωρος μέσα στο A χρώμα από το y, προς κάθε κατεύθυνση.

→ **Το συναρτησοειδές του Minkowski:**

Οι παρακάτω προτάσεις χαρακτηρίζουν τα κυρτά, ισορροπημένα και (παντού) απορροφούντα σύνολα ως τις ανοιχτές, μοναδιαίες μπάλες μηνορμών (με κέντρο το 0).

→ **Λήμμα:** (οι ανοιχτές μοναδιαίες μπάλες μηνορμών είναι κυρτές, ισορροπημένες και (παντού) απορροφούσες): Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ μηνόρμα στον X. Τότε, το

$$A := \{x \in X : p(x) < 1\}$$

είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του.

Απδ: • Α κυρτό: Έστω $x,y\in A$ και $t\in(0,1)$. Τότε,

$$p(tx+(1-t)y)\le p(tx)+p((1-t)y)=t\underbrace{p(x)}_{<1}+(1-t)\underbrace{p(y)}_{<1}<t+(1-t)=1.$$

Άρα, $tx+(1-t)y\in A$.

• Α ισορροπημένο: Έστω $x\in A$ και $\lambda\in\mathbb{K}$ με $|\lambda|\le 1$. Τότε,

$$p(\lambda x)=|\lambda|\cdot\underbrace{p(x)}_{<1}\le|\lambda|<1 \quad .\ \text{Άρα, } \lambda x\in A.$$

• Α απορροφούν σε κάθε σημείο του: Έστω $y\in A$. Το A είναι απορροφούν στο y: Έστω $x\in X$. $\forall\, t>0$,

$$p(y+tx)\le\underbrace{p(y)}_{<1}+tp(x)<1, \quad \forall\ t<\boxed{\frac{1-p(y)}{p(x)+1}} \quad .$$

$\|\ \varepsilon_x>0.$

Άρα, $y + tx \in A \quad \forall\, t \in [0, \varepsilon_x)$. ∎

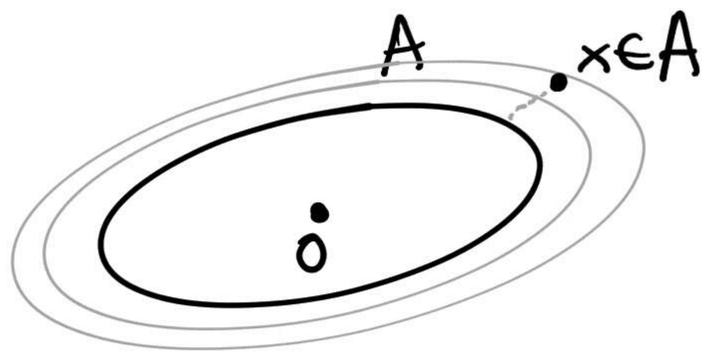
Τώρα θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

→ Πρόταση και ορισμός (κάθε κυρτό, ισορροπημένο και (πλήρες) απορροφούν σύνολο είναι η ανοιχτή μοναδιαία μπάλα (με κέντρο 0) κάποιας μοναδικής νόρμας):

Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $A \subseteq X$ κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του.

Τότε, υπάρχει μοναδική νόρμα $p_A : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ώστε

$$A = \{ x \in X : p_A(x) < 1 \}.$$



Μάλιστα, η p_A έχει τύπο:

$$p_A(x) := \inf \{ t \geq 0 : x \in tA \}$$

και λέγεται το συναρτησοειδές του Minkowski του A.

Μας λέει πόσο πρέπει να μεγεθύνουμε το A για να περιέχει το x (αν $x \notin A$), ή πόσο μπορούμε να συρρικνώνουμε το A ώστε το x ακόμα να περιέχεται στη συρρίκνωση.

⚠ Έστω $x \in X$. Παρατηρούμε ότι $\left.\begin{array}{ll} x \in tA & \forall\, t > p_A(x), \\ \text{και} \quad x \notin tA & \forall\, t < p_A(x) \end{array}\right\}$.



Πράγματι:

- $p_A(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in tA\}$. Έστω $t > p_A(x)$. $\exists\, p_A(x) \leq t_0 < t$: $x \in t_0 A$

$\Rightarrow$ $\exists\, x \in t_0 A$ $\forall\, |\lambda| < 1$, άρα $x \in \frac{t_0}{\lambda} \cdot A$ $\forall\, |\lambda| < 1$.

A ισορρ.
$\Rightarrow t_0 A$ ισορρ.

ο ωχαίος $\rho > p_A(x)$.

Επιλέγοντας $\lambda = \frac{t_0}{t}$ $\left(\left|\frac{t_0}{t}\right| < 1\right)$, παίρνουμε : $x \in tA$.

- Έστω $t < p_A(x)$. Ε} ορισμού του $p_A(x)$, $x \notin tA$.

∎

Ανδδ: • Η συνάρτηση $p_A : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι καλά ορισμένη,

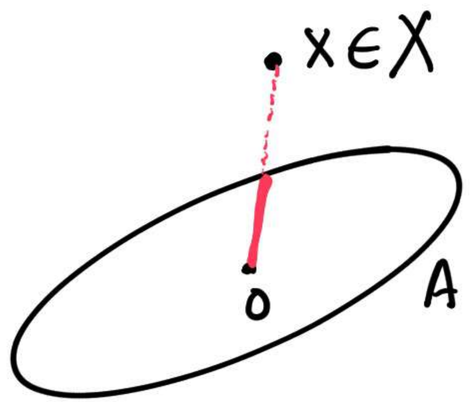
δηλ.: $\forall x \in X$, το $p_A(x) \in [0, +\infty)$:

Έστω $x \in X$. Το A είναι απορροφών

άρα $\exists\, \varepsilon > 0 : \varepsilon x \in A$

$\Longrightarrow x \in \frac{1}{\varepsilon} \cdot A$

$\to p_A(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} < +\infty$.



• Το p_A είναι <u>πμινόρμα</u>:

⇝ Έστω $x, y \in X$. ΘΔΟ: $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

Αρκεί ΝΔΟ: $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Έστω δοιπόν $\varepsilon > 0$. ΘΔΟ $\boxed{x+y \in \left(p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon\right) \cdot A.}$

Πράγματι, $\left.\begin{array}{l} p_A(x)+\varepsilon > p_A(x) \longrightarrow x \in \left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A. \\ p_A(y)+\varepsilon > p_A(y) \longrightarrow y \in \left(p_A(y)+\varepsilon\right)\cdot A \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x+y \in \left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A + \left(p_A(y)+\varepsilon\right)\cdot A \overset{!}{=} \left(p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon\right)\cdot A$$

A κυρτό!

Πράγματι, το ότι το A είναι κυρτό σημαίνει ότι

$\boxed{tA + sA = (t+s)A \quad \forall\ t,s>0}$:

- Αν $x, y \in A$, τότε $tx + sy = (t+s)\underbrace{\left(\frac{t}{t+s}x + \frac{s}{t+s}y\right)}_{\in A \text{ (κυρτό)}} \in (t+s)A$,

άρα $tA+sA \subseteq (t+s)A$.

- Αν $x \in A$, τότε $(t+s)x = tx+sx \in tA+sA$,
  άρα $(t+s)A \subseteq tA+sA$. ∎

Αφού δείξαμε ότι $x+y \in \left(p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon\right)\cdot A$,
έχουμε ότι $p_A(x+y) \leq p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon$, όπως επιδιώκαμε.

⇝ Έστω $x \in X$. Για ΝΔΟ $p_A(\lambda x) = |\lambda|\cdot p_A(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
αρκεί ΝΔΟ $p_A(\lambda x) \leq |\lambda|\cdot p_A(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$. $\forall \varepsilon > 0$, $x \in \left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A$

$\longrightarrow$ $\lambda x \in \lambda\left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A =$

$$= \quad |\lambda| \cdot \left(p_A(x) + \varepsilon\right) \cdot A .$$

↙ Α ισορροπημένο

Άρα, $p_A(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot \left(p_A(x) + \varepsilon\right), \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \quad p_A(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot p_A(x).$

- $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$:
  - $\boxed{\supseteq}$: Έστω $x \in X$ με $p_A(x) < 1$. Αφού το 1 είναι μεγαλύτερο του $p_A(x)$, έχουμε ότι το $x \in 1 \cdot A$, δηλ. ότι $x \in A$.
  - $\boxed{\subseteq}$: Έστω $x \in A \Longrightarrow x \in 1 \cdot A \rightarrow p_A(x) < 1$.

⊙ Έστω $q: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ σημιν/μα με $A = \{x \in X : q(x) < 1\}$.

Τότε, $\boxed{q = p_A}$:

$\rightsquigarrow$ $\forall x \in X$ με $q(x) \neq 0$, έχουμε $q\left(\frac{x}{q(x)}\right) = \frac{1}{q(x)} \cdot q(x) = 1$

$\Longrightarrow$ $\frac{x}{q(x)} \notin A$ $\Longrightarrow$ $p_A\left(\frac{x}{q(x)}\right) \geq 1$

$A = \{x \in X : q(x) < 1\}$ $\qquad$ $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$

$p_A\left(\frac{x}{q(x)}\right) = \frac{1}{q(x)} p_A(x)$

$\Longrightarrow$ $p_A(x) \geq q(x)$ (άρα και $p_A(x) \neq 0$ επίσης).

$\rightsquigarrow$ Παρόμοια, $\forall x \in X$ με $p_A(x) \neq 0$, έχουμε $q(x) \geq p(x)$
(άρα και $q(x) \neq 0$).

Επομένως, έστω $x \in X$.

- Αν τα $p_A(x), q_A(x)$ είναι και τα δύο 0, τότε $p_A(x) = q_A(x) (=0)$.
- Αν κάποιο από τα $p_A(x), q_A(x)$ είναι $\neq 0$, τότε είναι και το άλλο, άρα από τα παραπάνω: $\left.\begin{array}{l} p_A(x) \geq q(x) \\ \text{και} \quad q(x) \geq p_A(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_A(x) = q(x)$.

■

Θα δούμε σταδιακά ότι, σε ένα διανυσματικό χώρο, οποιαδήποτε τοπολογία που παράγεται από νόρμες είναι τοπολογική γραμμική και, ακόμα καλύτερα, τοπικά κυρτά.

Ξεκινάμε με μία γενική μελέτη της πρώτης κατηγορίας χώρων.

→ **Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι**:

→ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και έστω $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X. Ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπολογικός γραμμικός χώρος (τγχ) αν:

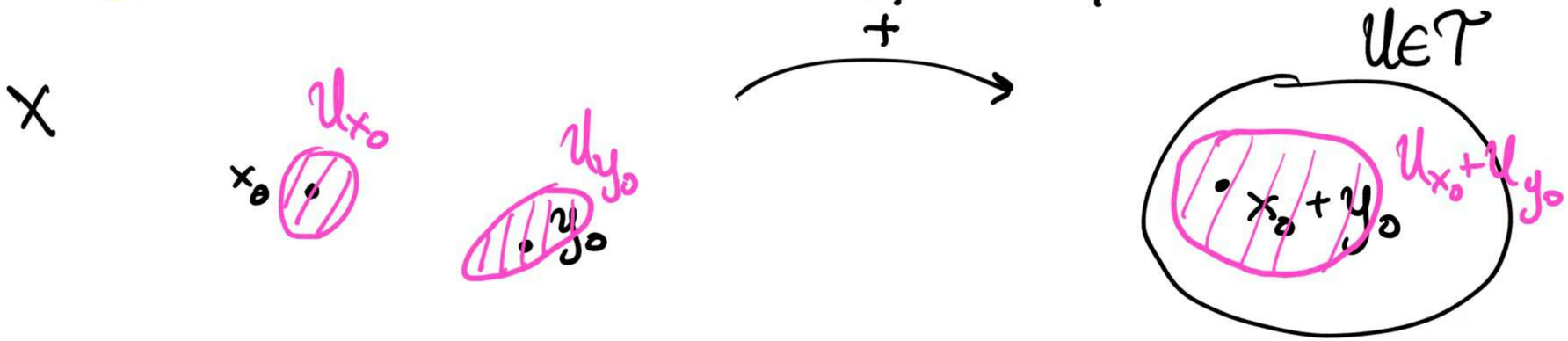
(i) $\forall x \in X$, το $\{x\}$ είναι κλειστό (ως προς την $\mathcal{T}$), και

(ii) Οι πράξεις $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \to x + y$, $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \to \lambda x$, με

είναι συνεχείς.

⚠ Ο $X \times X$ εφοδιάζεται με τη μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, και ο $\mathbb{K} \times X$ με την $\mathcal{T}_{|\cdot|} \times \mathcal{T}$. Έτσι:

→ $+ : X \times X \to X$ συνεχής σημαίνει ότι:



$\forall\ x_0, y_0 \in X$, $\forall\ U \in \mathcal{T}$ με $x_0 + y_0 \in U$,

$\exists\ U_{x_0} \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U_{x_0}$ ώστε $U_{x_0} + U_{y_0} \subseteq U$.

$U_{y_0} \in \mathcal{T}$ με $y_0 \in U_{y_0}$.

Εφαρμόζοντας αυτό για $x_0 = y_0 = 0 \in X$, παίρνουμε ότι:

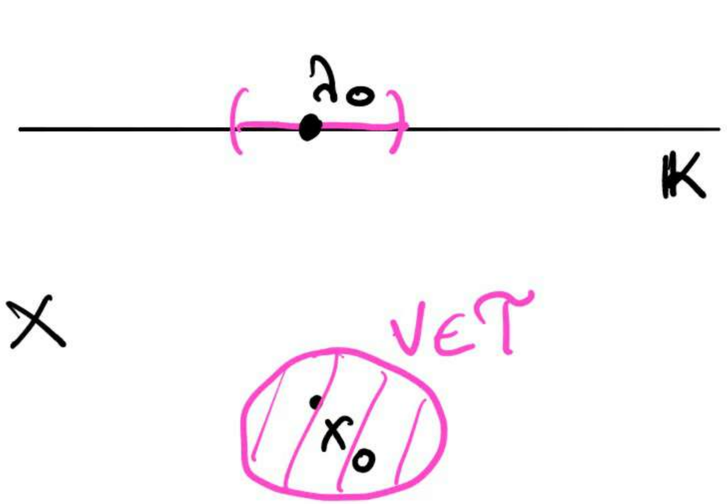
Η $\mathcal{U}$ περιοχή του 0 (στην $\mathcal{T}$), υπάρχουν $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ περιοχές του 0 ώστε $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Θέτοντας $V := \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, $(0 \in V \in \mathcal{T})$

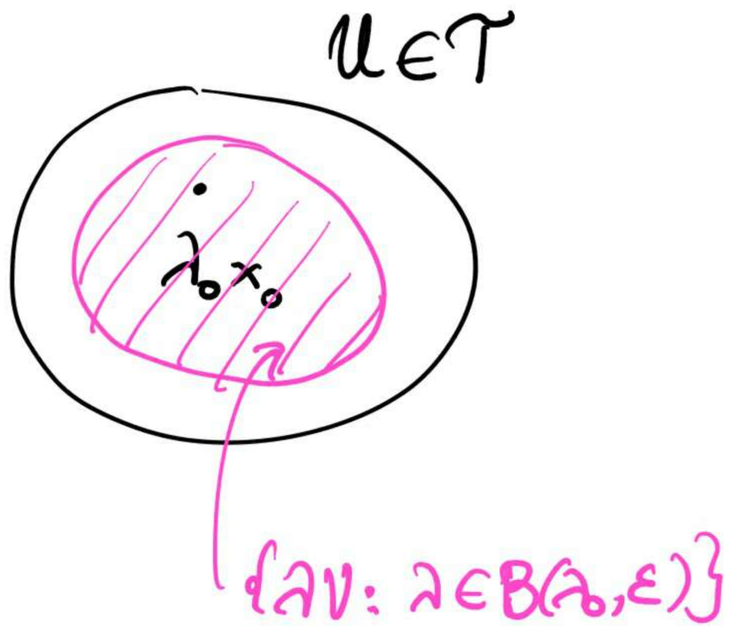
προκύπτει ότι:

Η $\mathcal{U}$ περιοχή του 0, $\exists$ V περιοχή του 0 ώστε:

$$V + V \subseteq \mathcal{U}.$$

→ $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ συνεχής σημαίνει ότι:





Δηλαδή $\forall$ U περιοχή του $\lambda_0 x_0$, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και V περιοχή του 0 ώστε:

$$\lambda V \subseteq U, \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$$

(B στον $(\mathbb{K}, |\cdot|)$)

Αφού οι πράξεις + και · είναι συνεχείς ως προς 2 μεταβλητές, παραμένουν συνεχείς αν σταθεροποιηθεί μία μεταβλητή τους. Δηλαδή, κάθε μεταφορά και κάθε διαστολή/συστολή είναι συνεχής συνάρτηση.

→ Πρόταση: Έστω (X,T) τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε:

(i) $\forall y \in Y$, η $\tau_y : X \to X$
$x \to x+y \quad \forall x \in X$

είναι ομοιομορφισμός (δηλ. 1-1, επί, συνεχής, τ_y^{-1} συνεχής).

Άρα: $U \in T \iff x_0 + U \in T, \ \forall x_0 \in X.$

(ii) $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0,$ η $\sigma_\lambda : X \to X$, $x \to \lambda x$ $\forall x \in X$

είναι ομοιομορφισμός.

Άρα: $U \in \mathcal{T} \iff \lambda U \in \mathcal{T},\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

→ Πόρισμα: Σε κάθε τοπολογικό γραμμικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, ισχύει ότι

$$\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0,\ \forall x_0 \in X.$$

Άρα, η τοπολογία του X προσδιορίζεται πλήρως από την οικογένεια περιοχών του 0.

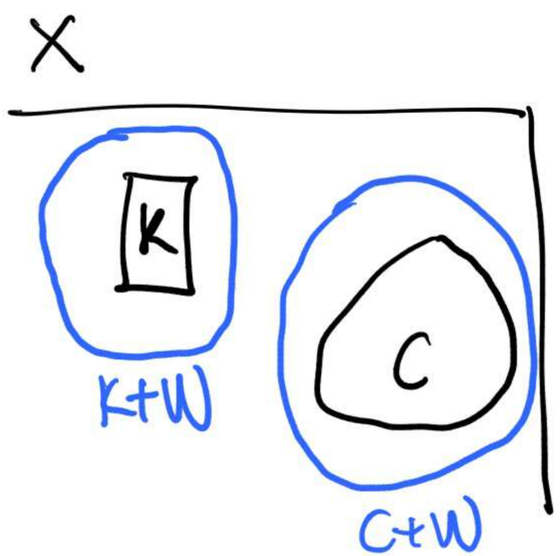
Σε κάθε τχ $(X,\mathcal{T})$, τα ανοιχτά σύνολα έχουν αρκετή "πολυπλοκότητα":

→ **Πρόταση:** Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ και $K \subseteq X$ συμπαγές, $C \subseteq X$ κλειστό.

Τότε, υπάρχουν ανοιχτά $(\in \mathcal{T})$ $U \supseteq K$, $V \supseteq C$, ώστε $U \cap V = \emptyset$.

Άλλη καλύτερα: υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0$ ώστε

$$(K+W) \cap (C+W) = \emptyset.$$



Απδ: **Βήμα 1:** $\forall$ περιοχή V του 0, $\forall n \in \mathbb{N}$,

υπάρχει συμμετρική περιοχή U του 0

ώστε: $\underbrace{U+U+\cdots+U}_{n \text{ φορές}} \subseteq V$.

Πράγματι: ⊙ <u>Για $n=2$:</u> Έχουμε δει, λόγω της συνέχειας της $+$, ότι υπάρχει $\tilde{U}$ περιοχή του 0 ώστε $\tilde{U}+\tilde{U} \subseteq V$.

Η $-\tilde{U} \in \mathcal{N}_0$ επίσης (λόγω της συνέχειας του $\cdot$), άρα

η $U := \tilde{U} \cap (-\tilde{U}) \in \mathcal{N}_0$. Και

$$U + U \subseteq \tilde{U} + \tilde{U} \subseteq W.$$

⊙ Επαγωγικά, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $U_k \in \mathcal{N}_0$, συμμετρική, ώστε

$$\underbrace{U_k + U_k + \dots + U_k}_{2^k \text{ φορές}} \subseteq V.$$

Άρα, και για κάθε $n \leq 2^k$,

$$\underbrace{U_k + \dots + U_k}_{n \text{ φορές}} \subseteq \underbrace{U_k + \dots + U_k}_{2^k \text{ φορές}} \subseteq V.$$

$0 \in U_k$

Βήμα 2: $\forall x \in K$, το $x \notin C \Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow$ η $X \setminus C - x \in \mathcal{N}_0$. Άρα:

$\exists\, U_x$ συμμετρική περιοχή του 0 ώστε

$$U_x + U_x + U_x \subseteq X \setminus C - x,$$

δηλ. $$x + U_x + U_x + U_x \subseteq X \setminus C$$

δηλ. $(x+U_x+U_x+U_x)\cap C=\phi$,

δηλ. $\boxed{(x+U_x+U_x)\cap \underbrace{(C-U_x)}_{\| \; C+U_x} = \phi.}$

$K \subseteq \bigcup_{x\in K}(x+U_x) \longrightarrow \exists\, x_1,\dots,x_n\in K$ ωστε

$\underbrace{K}_{\text{συμπαγές}}$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U_{x_i}).$$

Οπότε $W := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i} \in \mathcal{N}_0$,

n ⊛ $\Longrightarrow \left[(x_i+U_{x_i})+W\right]\cap(C+W)=\phi \quad \forall i=1,\dots,n,$

και άρα

$$\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i}) \right] + W \right) \cap \left(C + W \right) = \phi.$$

Επομένως, $(K+W) \cap (C+W) = \phi$. ∎

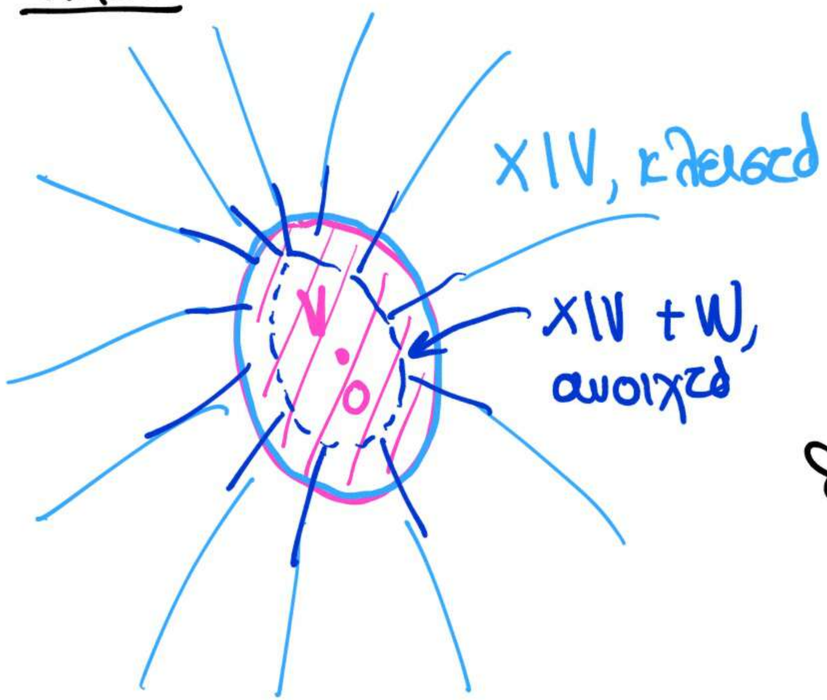
→ Πόρισμα 1: Κάθε εφχ $(X, \mathcal{T})$ είναι χώρος Hausdorff.

Μάλιστα, $\forall\, x \neq y$ στον X, υπάρχει περιοχή U του 0 με $(x+U) \cap (y+U) = \phi$.

→ **Πόρισμα 2:** Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ. Για κάθε V περιοχή του 0, υπάρχει περιοχή W του 0 ώστε

$$\bar{W} \subseteq V.$$

Απδ:



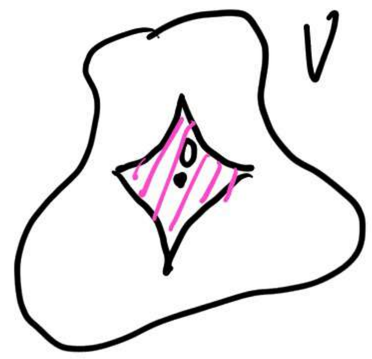
$\{0\}$ σύμπλεγές, $X\setminus V$ κλειστό $\Rightarrow$ $\exists$ W περιοχή του 0 ώστε $(0+W)\cap(X\setminus V + W) = \emptyset$,

Οπότε $W \subseteq X\setminus(\underbrace{X\setminus V + W}_{\text{ανοιχτό, } \supseteq X\setminus V})$.

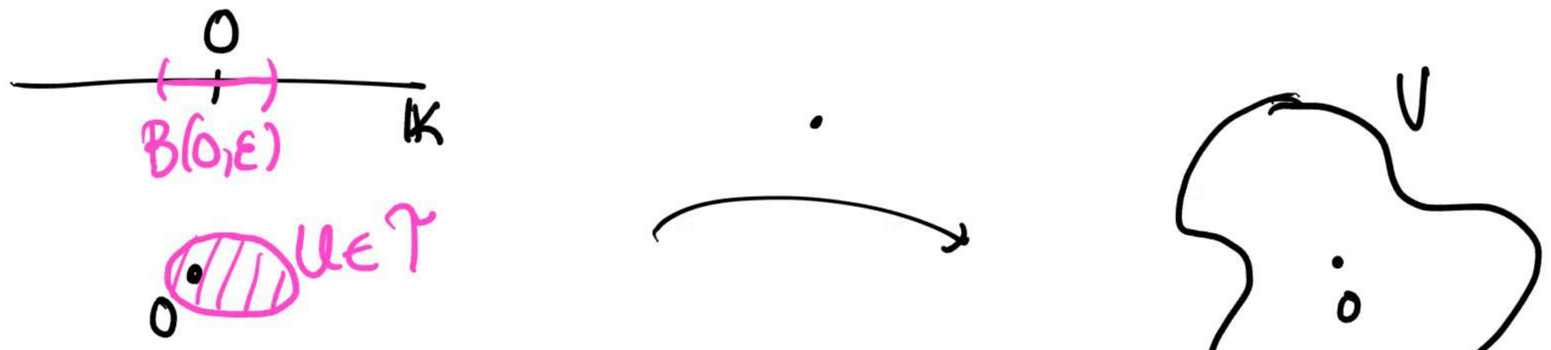
$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{κλειστό, } \subseteq V}$

Άρα, $\bar{W} \subseteq X \setminus (x \setminus V + W) \subseteq V$. ∎

→ Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τ.χ. Τότε, κάθε περιοχή του 0 περιέχει ισορροπημένη περιοχή του 0.



Απδ: $0 \cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής στο $(0,0) \in \mathbb{K} \times X$.



Έστω δοθείσα V περιοχή του $0 \cdot 0 = 0$.

Γ ε>0 και U περιοχή του 0 ώστε:

$$\lambda U \subseteq V, \quad \forall\, |\lambda| < \varepsilon,$$

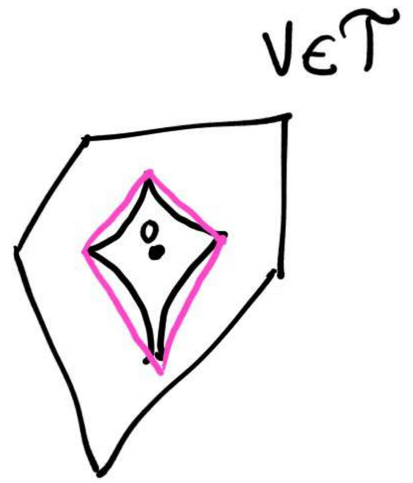
δηλ. ώστε $\underbrace{\bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} (\lambda U)}_{\text{ανοικτό,}} \subseteq V.$

ισορροπημένο,
περιέχει το 0.

■

→ **Πρόταση:** Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ. Τότε, κάθε κυρτή περιοχή του 0 περιέχει κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του 0.

Απδ: Έστω V κυρτή περιοχή του 0.



Ξέρουμε ότι $\exists\, U$ ισορροπημένη περιοχή του 0, με $U \subseteq V$ (V κυρτό) $\Longrightarrow \operatorname{conv}(U) \subseteq V$.

Επίσης, $0 \in U \subseteq \operatorname{conv}(U)$,

και $\operatorname{conv}(U) = \bigcup_{t\in(0,1)} \underbrace{\left(tU + (1-t)U \right)}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}$.

■

→ **Τοπικά κυρτοί χώροι**: Θα δούμε ότι οι παρακάτω δύο ορισμοί είναι <u>ισοδύναμοι</u>:

→ <u>Ορισμός 1:</u> Έστω X διανυσματικός χώρος, και $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X. Ο $(X,\mathcal{T})$ λέγεται τοπικά κυρτός αν υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, που <u>διαχωρίζει σημεία</u> του X, όπου η οικογένεια

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$$

να αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

→ Ορισμός 2: Έστω X διανυσματικός χώρος, και $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X. Ο $(X,\mathcal{T})$ λέγεται τοπικά κυρτός αν (a) ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τχ, και (b) το $0 \in X$ έχει βάση περιοχών που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

Ξεκινάμε δεχόμενοι τον Ορισμό 1, και σταδιακά θα δείξουμε ισοδυναμία με τον Ορισμό 2.

→ Πρόταση: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και έστω $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X.

Έστω ότι υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, που διαχωρίζει σημεία του X, ώστε η οικογένεια

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N},\ p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0 \right\}$$

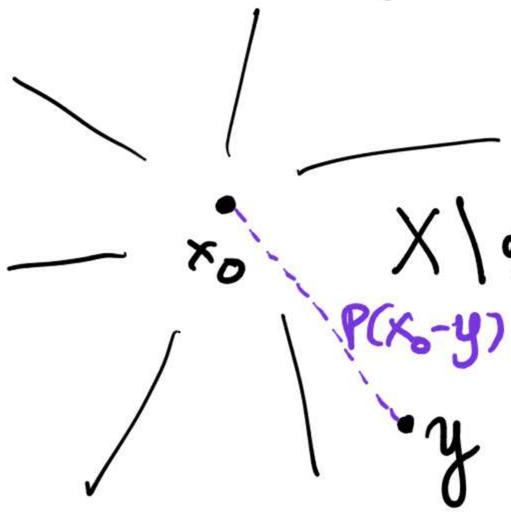
να αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$. Τότε:

(α) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τχ.

(β) Κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής : $(X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Λύση: (α) • Τα μονοσύνολα είναι κλειστά ως προς την $\mathcal{T}$:

Έστω $x_0 \in X$. Το $X \setminus \{x_0\} \in \mathcal{T}$: Έστω $y \in X \setminus \{x_0\}$.



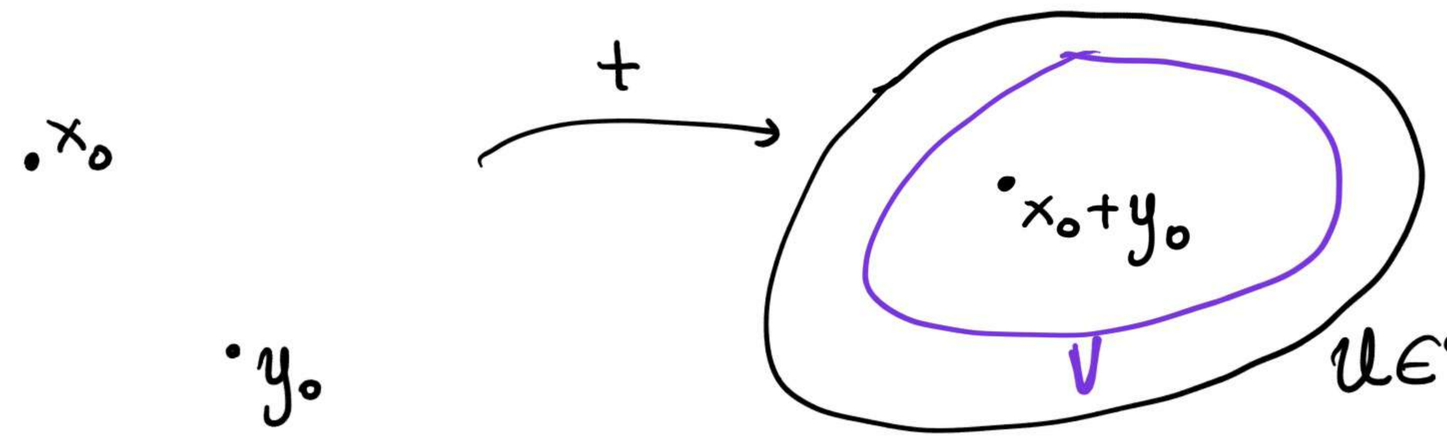
Η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει σημεία του X, άρα

$\exists\ p \in \mathcal{P} : p(x_0-y) \neq 0$.

Τότε, το $A=\{x \in X : p(x-y)<\varepsilon\}$ είναι περιοχή του y, και περιέχεται στο $X \setminus \{x_0\}$ (καθώς $x_0 \notin A$).

• Η $+ : X \times X \longrightarrow X$ είναι συνεχής:

Έστω $x_0, y_0 \in X$.



Έστω $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 + y_0 \in U$.

Θα βρούμε $U_{x_0} \in \mathcal{T}$, με $x_0 \in U_{x_0}$,
και $U_{y_0} \in \mathcal{T}$, με $y_0 \in U_{x_0}$,
ώστε

$U_{x_0} + U_{y_0} \subseteq U$. Από ορισμό, $\exists\ n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$

ώστε το $V := \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{z \in X : p(z - (x_0+y_0)) < \varepsilon\}}_{\in \mathcal{T}} \subseteq U$.

Ορίζουμε $\mathcal{U}_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in X : p_i(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \}$

και $\mathcal{U}_{y_0} := \bigcap_{i=1}^{n} \{ y \in X : p_i(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \}$,

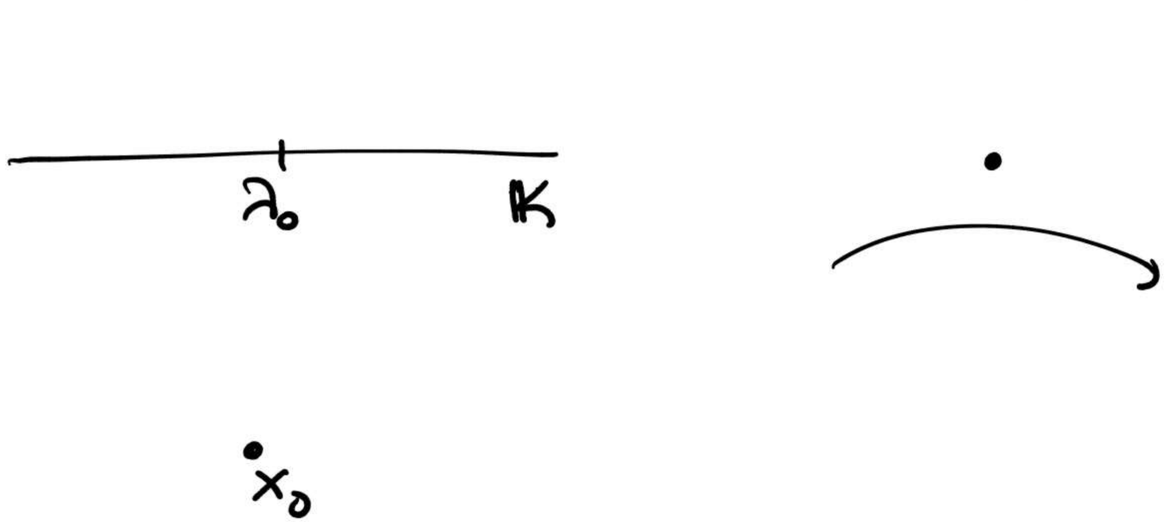
έχουμε: το $\mathcal{U}_{x_0}$ είναι περιοχή του x_0,

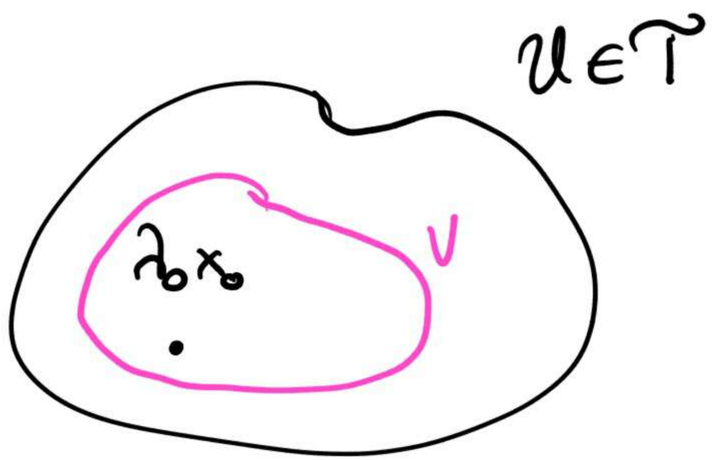
το $\mathcal{U}_{y_0}$ είναι περιοχή του y_0,

και $\mathcal{U}_{x_0} + \mathcal{U}_{y_0} \subseteq V \subseteq \mathcal{U}$, καθώς, $\forall\, x \in \mathcal{U}_{x_0}$ και $y \in \mathcal{U}_{y_0}$,

$$\left.\begin{array}{l} p(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ p(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow p\big((x+y) - (x_0+y_0)\big) \leq p(x - x_0) + p(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ είναι συνεχής:





Έστω $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$. $\cdot$ είναι συνεχής στο (λ_0, x_0):

Έστω $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_{\lambda_0 \cdot x_0}$. Τ $V = \bigcap_{i=1}^{n} \{z \in X : p_i(z - \lambda_0 x_0) < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}$,

για κάποια $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$.

Ορίζουμε, για $M>0$ κατάλληλα μεγάλο (το πόσο μεγάλο θα προσδιορισθεί αργότερα):

$\Lambda := B(\lambda_0, \frac{\varepsilon}{M})$ (περιοχή του λ_0 στον $(\mathbb{K}, |\cdot|)$),

$\mathcal{U}_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x-x_0) < \frac{\varepsilon}{M}\}$ (περιοχή του 0 στον $(X,\mathcal{T})$).

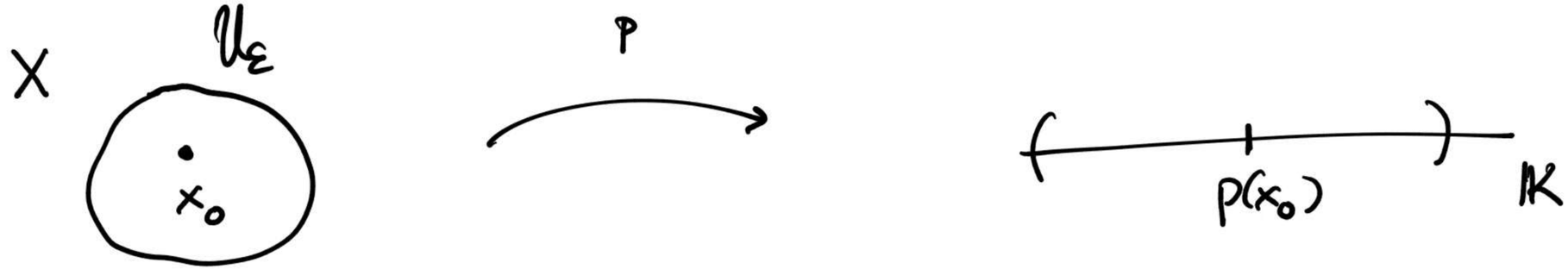
Τότε, $\forall\, \lambda \in \Lambda$ και $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, $\forall i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) &\le p_i(\lambda x - \lambda x_0) + p_i(\lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \\ &= |\lambda| \cdot p_i(x-x_0) + |\lambda - \lambda_0| \cdot p_i(x_0) \\ &< \left(|\lambda_0| + \frac{\varepsilon}{M}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{M} + \frac{\varepsilon}{M} \cdot p_i(x_0) \quad < \varepsilon, \end{aligned}$$

για M μεγάλο. Άρα, $\exists\, M>0$ ώστε $\lambda x \in V \subseteq \mathcal{U}$,

$\forall\ \lambda \in \Lambda$ και $x \in U_{x_0}$.

(β) Έστω $p \in \mathcal{P}$. Τότε, p συνεχής. Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$.



Θέλουμε να βρούμε $U_\varepsilon \in \mathcal{N}_{x_0}$ ώστε:

αν $x \in U_\varepsilon$, τότε $p(x) \in B_{\mathbb{K}}(p(x_0), \varepsilon)$,

δηλ. $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$.

Η $U_\varepsilon := \{x \in X : p(x - x_0) < \varepsilon\}$ λειτουργεί:

$\forall x \in U_\varepsilon$, $|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \varepsilon$.

Τώρα δείχνουμε την ισοδυναμία των Ορισμών 1 και 2 για τοπικά κυρτούς χώρους.

→ Θεώρημα: Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τοπικά κυρτός.

(ii) Ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τχχ και το 0 έχει βάση περιοχών που αποτελείται από κυρτά σύνολα.
↳ άρα και κάθε $x_0 \in X$

(iii) Ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τχχ τα ανοιχτά, κυρτά, ισορροπημένα υποσύνολα του X αποτελούν βάση περιοχών του 0.

Απδδ: • (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): απλδ. Πράγματα:

$\rightsquigarrow$ (ii) $\longrightarrow$ (iii): Κάθε κυρτή περιοχή του 0 σε εχει περιέχει κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του 0 (έχει δειχθεί).

$\rightsquigarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii): Προφανές.

- Μένει να δειχθεί η ισοδυναμία του (i) με οποιοδήποτε από τα (ii), (iii).

$\rightsquigarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii): Υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, που διαχωρίζει σημεία, δηλ., $\forall\, x_0 \in X$, η οικογένεια

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon : n \in \mathbb{N},\ p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0 \right\}$$

να αποτελεί βάση περιοχών του x_0. Άρα, τα σύνολα

$$B(p_1, \dots, p_n; \varepsilon) := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\},$$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0$, αποτελούν βάση περιοχών του 0.

Κάθε $B(p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$ είναι δηλαδή ανοικτό ($\in \mathcal{T}$) και

είναι και κυρτό: $\forall\, x,y \in B(p_1,\dots,p_n;\varepsilon)$ και $\forall t\in(0,1)$,

έχουμε ότι $p_i(tx+(1-t)y) \le p_i(tx) + p_i((1-t)y)$

$$= t\underbrace{p_i(x)}_{<\varepsilon} + (1-t)\underbrace{p_i(y)}_{<\varepsilon}$$

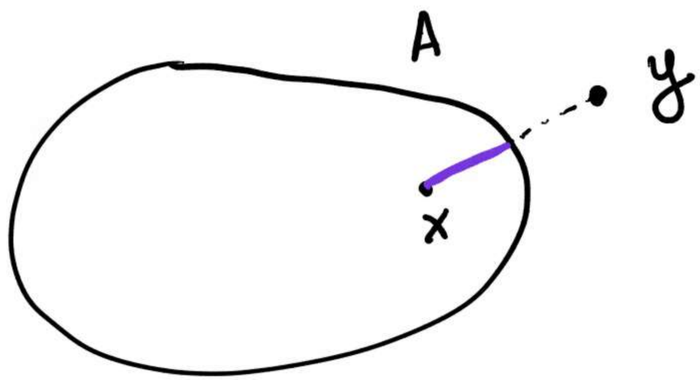
$$< t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon,$$

$\forall i=1,\dots,n$. Επομένως, $tx+(1-t)y \in B(p_1,\dots,p_n;\varepsilon)$.

Άρα, το 0 έχει βάση περιοχών που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

$\rightsquigarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i): Κάθε ανοιχτό σύνολο είναι αποπροφθύν σε κάθε σημείο του, καθώς ο χώρος είναι τχ. Πράγματι,

Έστω $A \in \mathcal{T}$ και $x \in A$. Το A είναι απορροφών στο x:

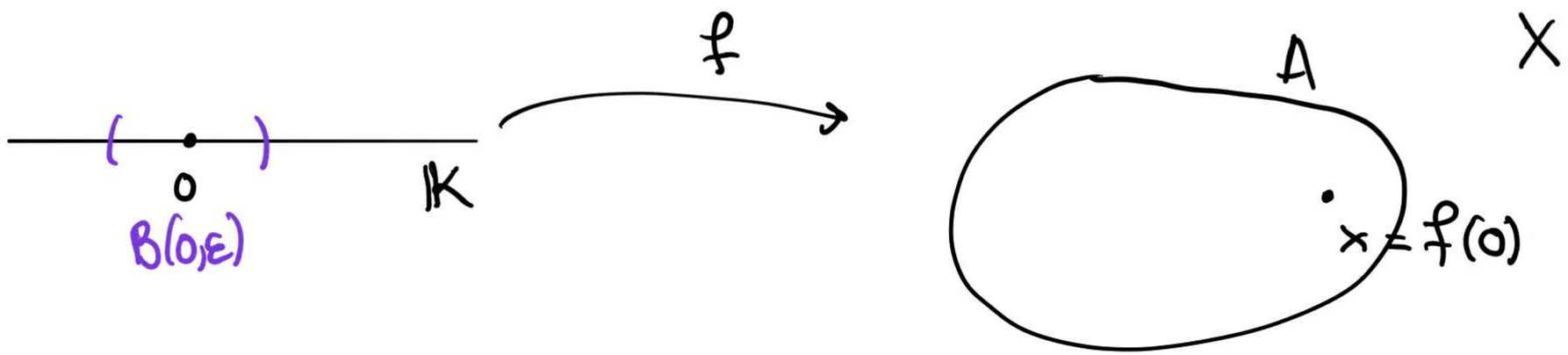


$\forall\, y \in A$, η απεικόνιση

$f : (\mathbb{K}, |\cdot|) \to (X, \mathcal{T})$

$f(t) := x + ty \quad \forall\, t \in \mathbb{K}$

είναι συνεχής (καθώς η πράξη $\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ είναι συνεχής). Άρα, η f είναι συνεχής στο $0 \in \mathbb{K}$.



Το $A \in \mathcal{N}_{f(0)}$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$: $f\left(B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)\right) \subseteq A$.

Δηλαδή, $\forall\, t \in \mathbb{K}$ με $|t| < \varepsilon$, έχουμε ότι $f(t) = x + ty \in A$.

Επομένως, $x + ty \in A \quad \forall\, t \in [0, \varepsilon) \Longrightarrow A$ απορροφά τον σημείο x.

Άρα, κάθε A ανοιχτό, ισορροπημένο και κυρτό είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφά σε κάθε σημείο του.

Άρα, $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$, όπου το $p_A : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι το συναρτησοειδές του Minkowski.

Ορίζοντας δοθέν $\mathcal{C} := \{ A \subseteq X : A \text{ ανοιχτό, κυρτό, ισορροπημένο} \}$

και $\mathcal{P} := \{ p_A : A \in \mathcal{C} \}$, προκύπτει ότι

η $\mathcal{P}$ είναι <u>οικογένεια ημινορμών</u> στον X, και ότι

η $\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in X : p_i(x) < \varepsilon \} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$

είναι <u>βάση περιοχών του 0</u>. Πράγματι, $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in X : p_{A_i}(x) < \varepsilon \} = \bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot \underbrace{\{ x \in X : p_{A_i}(x) < 1 \}}_{\| \; A_i}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} (\varepsilon A_i) \in \mathcal{T}, \quad \text{και ειδικότερα } A_i \text{ και } \xrightarrow{\in \mathcal{T}, \text{ αφού}}$$

$A \in \mathcal{C}$, δηλ. τα $\{x \in X : p_A(x) < 1\}$, ανήκουν στη $\mathcal{B}_0$ και αποτελούν βάση περιοχών του 0.

Τέλος, η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει σημεία:

Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τχ, και άρα Hausdorff.

Επομένως, $\forall x \neq y$, υπάρχουν $U_x \in \mathcal{N}_x$, $U_y \in \mathcal{N}_y$ ώστε $U_x \cap U_y = \emptyset$. Λόγω του ότι τα ανοιχτά, κυρτά και ισορροπημένα $\subseteq X$ αποτελούν βάση περιοχών του 0, και $\mathcal{N}_x = x + \mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_y = y + \mathcal{N}_0$ (αφού $(X, \mathcal{T})$ τ.τ.χ.), υπάρχουν ανοιχτά, κυρτά και ισορροπημένα $A, B \in \mathcal{N}_0$

ώστε $x+A \subseteq \mathcal{U}_x$, $y+B \subseteq \mathcal{U}_y$

$\Longrightarrow$ $(x+A) \cap (y+B) = \phi$.

Επίσης, $A = \{z \in X : p_A(z) < 1\} \Longrightarrow x+A = \{z \in X : p_A(z-x) < 1\}$.

Παρόμοια, $B = \{z \in X : p_B(z-x) < 1\}$.

Το $y \notin x+A \Longrightarrow p_A(z-x) \geq 1 \Longrightarrow p_A(x-y) \neq 0$. Άρα, η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει σημεία. ∎

→ **Χαρακτηρισμοί συνέχειας γραμμικών συναρτησοειδών**

Πρώτα θα δούμε χαρακτηρισμούς σε εξχ γενικώς, και μετά ειδικότερα σε τοπικά κυρτούς χώρους. Σε εξχ, οι χαρακτηρισμοί είναι ανάλογοι αυτών που ισχύουν σε χώρους με νόρμα.

→ Ορισμός: Έστω (X,τ) τ.χ. Συμβολίζουμε

$$(X,\tau)^* := \{ f : (X,\tau) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \text{ γραμμική και συνεχής} \}.$$

→ Πρόταση: Έστω (X,τ) τ.χ., και $f : (X,\tau) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ γραμμική, $f \neq 0$.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) f συνεχής (δηλ., $f \in (X,\tau)^*$).

(β) $\ker f$ κλειστός

(γ) $\ker f$ όχι πυκνός στον (X,τ).

(δ) f φραγμένη σε μια περιοχή του 0.

(ε) f συνεχής στο 0.

Απδ.: (α) $\Longrightarrow$ (β) : $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ κλειστός, ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης.

(β) $\Longrightarrow$ (γ): $\ker f$ κλειστός στον $(X,\mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\ker f}^{\mathcal{T}} = \ker f \neq X$, αφού $f \neq 0$.

Άρα, $\ker f$ δεν πυκνός στον $(X,\mathcal{T})$.

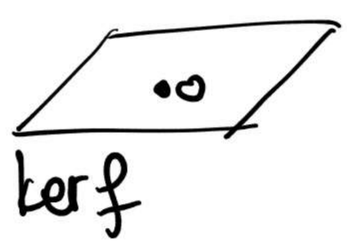
(γ) $\Longrightarrow$ (δ): $\overline{\ker f}^{\mathcal{T}} \neq X \Longrightarrow \exists\, x \in X$ τέτοιο $x \notin \overline{\ker f}^{\mathcal{T}}$.

Άρα, $\exists\, \mathcal{U}_x \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο $\mathcal{U}_x \cap \ker f = \emptyset$.

$\mathcal{N}_x = x + \mathcal{N}_0 \Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{N}_0$ τέτοιο $\mathcal{U}_x = x + V$.

Επομένως, $(x+V) \cap \ker f = \emptyset$.





Αφού το V είναι περιοχή του 0 και ο (X,Υ) είναι τχ, υπάρχει ισορροπημένη περιοχή V_0 του 0 ώστε $V_0 \subseteq V$.

Άρα, $\boxed{(x+V_0)\cap \ker f = \phi}$ (*) για αυτό το ισορροπημένο V_0.

Ισχυρισμός: $\forall$ W ισορροπημένο $\subseteq X$, ή $f(W)=\mathbb{K}$ ή $f(W)$ φραγμένο.

Πράγματι, έστω ότι $f(W)$ άφραχτο. Τότε, $\forall a\in\mathbb{K}$, $\exists\, y\in W$ με $|f(y)|>|a|$. Επίσης, λόγω γραμμικότητας,

$$\left|f\left(\frac{a}{f(y)}\cdot y\right)\right| = |a|$$

μέτρο $<1 \Longrightarrow$ $\frac{a}{f(y)}\cdot y \in W$ (W ισορροπημένο) $\because y_0$

Άρα, $f(y_0) = \lambda a$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| = 1$

$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{\lambda} \cdot y_0\right) = a$, όπου $\left|\frac{1}{\lambda}\right| = 1$, $y_0 \in W \xrightarrow[\text{ισορρ.}]{W} \frac{1}{\lambda} y_0 \in W$.

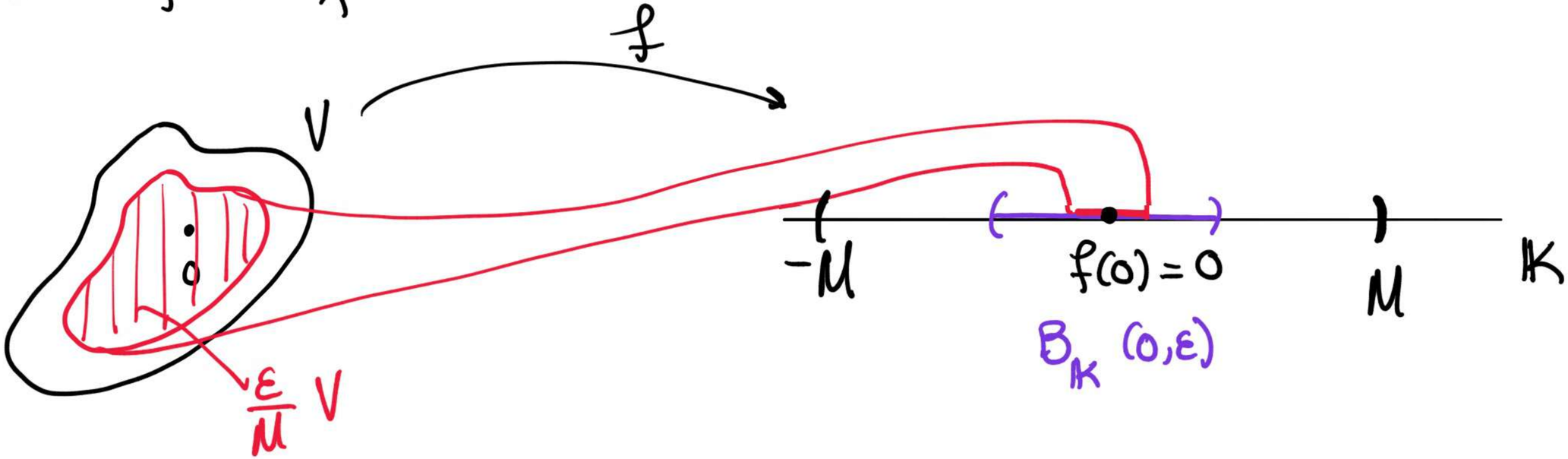
Αφού $(x + V_0) \cap \ker f = \phi$ (*), είναι αδύνατον να ισχύει ότι

$f(V_0) = \mathbb{K}$ (γιατί τότε θα είχαμε και $f(x+V_0) = f(x) + f(V_0) = \mathbb{K}$).

Άρα, $f(V_0)$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

(δ) $\Longrightarrow$ (ε): Υπάρχει $V \in \mathcal{N}_0$ ώστε $f(V)$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Θ.Δ.Ο f συνεχής στο $0 \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$.



$\exists\ M > \varepsilon : \quad f(V) \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, M)$

$$\longrightarrow \quad f\left(\frac{\varepsilon}{M} \cdot V\right) = \frac{\varepsilon}{M} \cdot f(V) \subseteq \frac{\varepsilon}{M} \cdot B_{\mathbb{K}}(0, M) = B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) .$$

Τέλος :

- $\frac{\varepsilon}{M} < 1$, V ισορροπημένο $\Longrightarrow$ $\frac{\varepsilon}{M} \cdot V \subseteq V$.
- V περιοχή του 0 $\Longrightarrow$ $\frac{\varepsilon}{M} \cdot V$ περιοχή του 0 (X τχ).

(ε) $\Longrightarrow$ (α): Έστω $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0:

Έστω $\varepsilon > 0$. Ψάχνουμε περιοχή U_{x_0} του x_0 ώστε:

$\forall\, x \in U_{x_0}$, να ισχύει ότι $|\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{f(x-x_0)''}| < \varepsilon$.

f συνεχής στο 0 $\Longrightarrow$ $\exists\, U \in \mathcal{N}_0$ ώστε:

$\forall\ y \in \mathcal{U}$, να ισχύει ότι $|f(y)| < \varepsilon$.

Τότε, η $\mathcal{U}_{x_0} := x_0 + \mathcal{U} \in \mathcal{N}_{x_0}$ και

$\forall\ x \in \mathcal{U}_{x_0}$, $x = x_0 + y$ για κάποιο $y \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \quad |\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\| \; f(x-x_0)}| = |f(y)| < \varepsilon.$

∎

→ **Πρόταση:** (Έξτρα χαρακτηρισμός συνέχειας σε τοπικά κυρτούς χώρους)

Έστω (X,τ) τοπικά κυρτός χώρος. Ξέρουμε ότι υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, που διαχωρίζει σημεία, ώστε, $\forall x_0 \in X$,

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N},\ p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0 \right\}$$

να αποτελεί βάση περιοχών του x_0.

Έστω $f: (X,\tau) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ γραμμική. Τότε, η f είναι συνεχής $\iff$ $\exists\, c>0$, $n \in \mathbb{N}$ και $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ ώστε:

$$|f(x)| \leq c \cdot (p_1(x) + \dots + p_n(x)) \quad \forall x \in X.$$

Απδ: ($\Leftarrow$) Αρκεί ΝΔΟ f συνεχής στο 0 (αφού $(X,\mathcal{T})$ τχ).

Έστω $\varepsilon>0$. $p_1,\dots,p_n$ συνεχείς στο 0 (όλες οι $p\in\mathcal{P}$ είναι συνεχείς $p:(X,\mathcal{T})\to(\mathbb{K},|\cdot|)$).

Άρα, $\exists\ U_1,\dots,U_n\in\mathcal{N}_0$ ώστε:

$$p_1(U_1)\subseteq B_{\mathbb{K}}\left(0,\frac{\varepsilon}{nc}\right),\ \dots,\ p_n(U_n)\subseteq B_{\mathbb{K}}\left(0,\frac{\varepsilon}{nc}\right).$$

Τότε, η $U:=\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\mathcal{N}_0$, και $\forall\ x\in U$ έχουμε:

$$|f(x)|\le c\cdot\left(p_1(x)+\dots+p_n(x)\right)<c\cdot\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{nc}+\dots+\frac{\varepsilon}{nc}\right)}_{n\ \text{φορές}}=\cancel{c}\,\frac{\varepsilon}{\cancel{c}}=\varepsilon.$$

$(\Longrightarrow)$ f συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής στο 0. Άρα, $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}_0$ ώστε:

$$f(\mathcal{U}) \subseteq B_{|\mathbb{K}}(0,1), \quad \text{δηλ. ώστε:}$$

$$\boxed{|f(x)| < 1, \quad \forall x \in \mathcal{U}.}$$

Ξέρουμε ότι $\exists\, n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}.$$

Επομένως, $\forall x \in X$ με $\begin{cases} p_1(x) < \varepsilon \\ \vdots \\ p_n(x) < \varepsilon \end{cases}$ έχουμε: $|f(x)| < 1$.

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$(*) \quad |f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{p_1(x), \dots, p_n(x)\} \quad \left(\leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot (p_1(x) + \dots + p_n(x)) \right).$$

Πράγματι, έστω $x \in X$.

- Αν $f(x) = 0$, η $(*)$ ισχύει.
- Αν $f(x) \neq 0$, τότε $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \exists\ i \in \{1, \dots, n\} \text{ ώστε } p_i\left(\frac{x}{f(x)}\right) > \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |f(x)| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot p_i(x) \text{ για αυτό το } i \Longrightarrow (*). \quad \blacksquare$$

→ Διαχωριστικά θεωρήματα σε τχ και σε τοπικά κυρτούς χώρους.

Για απλότητα των εκφωνήσεων, θεωρούμε μόνο διανυσματικούς χώρους επί του $\mathbb{R}$.

→ Ορισμός: Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ επί του $\mathbb{R}$, και $A, B \subseteq X$.

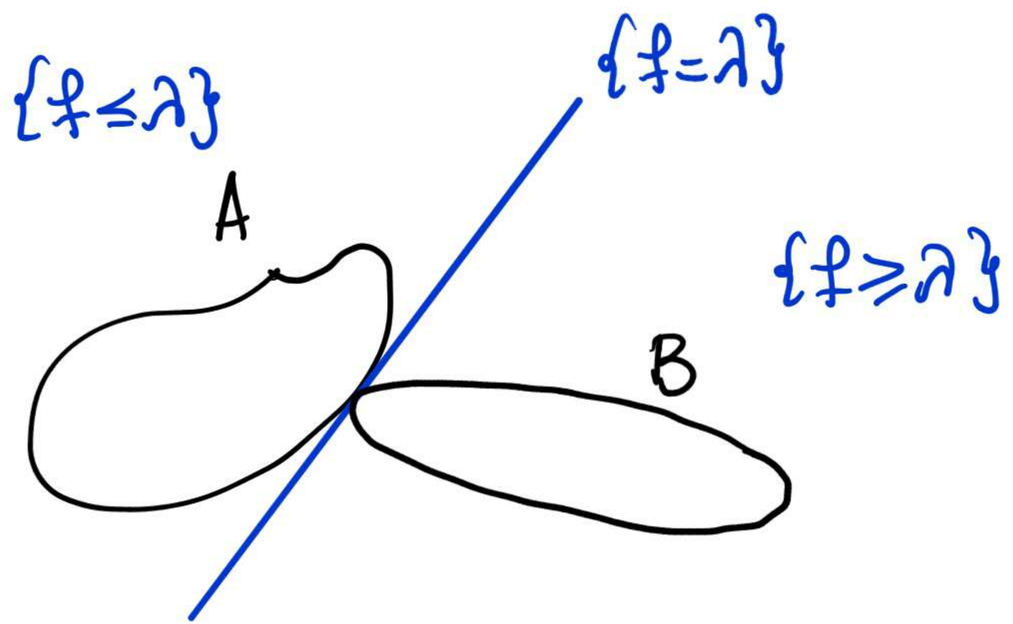
Λέμε ότι ο $(X,\mathcal{T})^*$:

- διαχωρίζει τα A, B αν

  $\exists\ f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

  $A \subseteq \{f \leq \lambda\}$,

  $B \subseteq \{f \geq \lambda\}$.

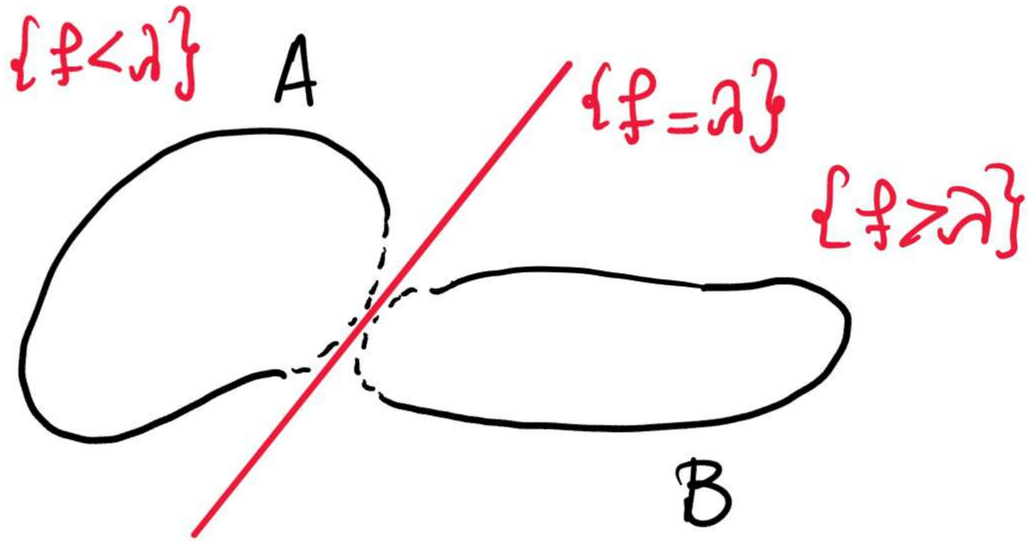


- Διαχωρίζει γνήσια τα A, B αν

  $\exists\ f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

  $A \subseteq \{f < \lambda\}$,

  $B \subseteq \{f > \lambda\}$.

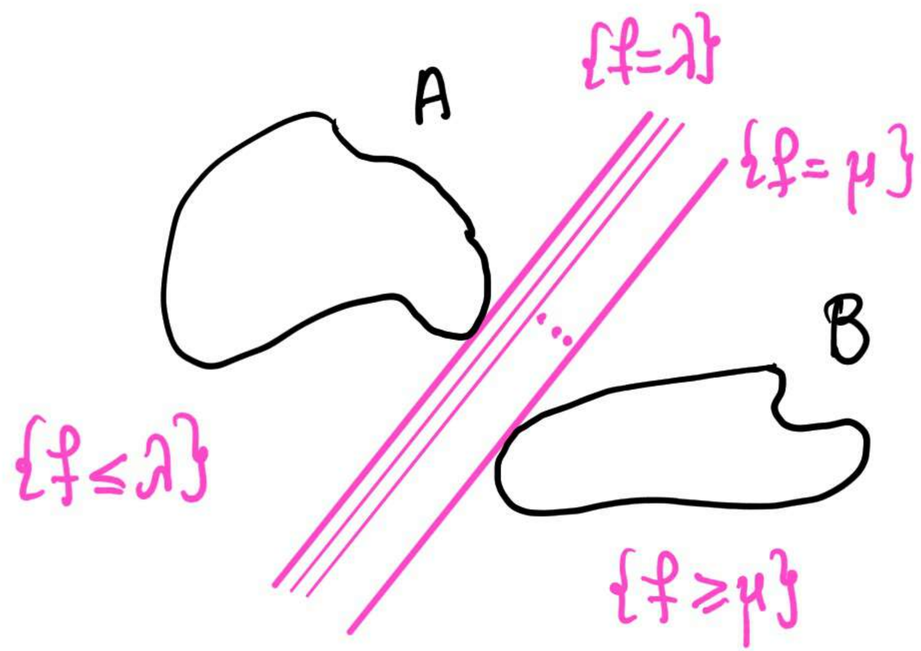


- Διαχωρίζει αυστηρά τα A, B αν

  $\exists\ f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$ ώστε:

  $A \subseteq \{f \leq \lambda\}$,

  $B \supseteq \{f \geq \mu\}$.



→ Λήμμα: Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ και $A \subseteq X$ ανοιχτό, κυρτό, που περιέχει το 0. Τότε, το συναρτησοειδές του Minkowski

$$p_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

με $p_A(x) := \inf \{ t \geq 0 : x \in tA \}$

είναι καλά ορισμένο, μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Απδ: Άσκηση. Ακολουθεί σε μεγάλο βαθμό την απόδειξη του ότι, αν το A έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι είναι ισορροπημένο, τότε το p_A είναι ημινόρμα. ∎

Υπενθύμιση:

→ Ορισμός (υπογραμμικά συναρτησοειδές): Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Μια $p: X \to \mathbb{R}$ λέγεται υπογραμμικά συναρτησοειδές αν:

(i) $\forall x, y \in X$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, και

(ii) $\forall x \in X$ και $\forall \lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. (δηλ., p θετικά ομογενής).

⚠ Κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές $p: X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί:

- $p(0) = 0$
- p κυρτή $\left(p\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\, p(x+y) \leq \frac{1}{2}\, p(x) + \frac{1}{2}\, p(y) \right)$.

Όμως:

- Ίσως $p(x) \neq p(-x)$ για κάποια $x \in X$.
- Ίσως η p να παίρνει και αρνητικές τιμές.

Πχ., κάθε νόρμα $p: X \to \mathbb{R}$ και κάθε γραμμική $p: X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

→ Θεώρημα επέκτασης του Hahn: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, και $Y \leq X$. Έστω:

(i) $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικά συναρτησοειδές, και

(ii) $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική, με $f(y) \leq p(y)$ $\forall y \in Y$.

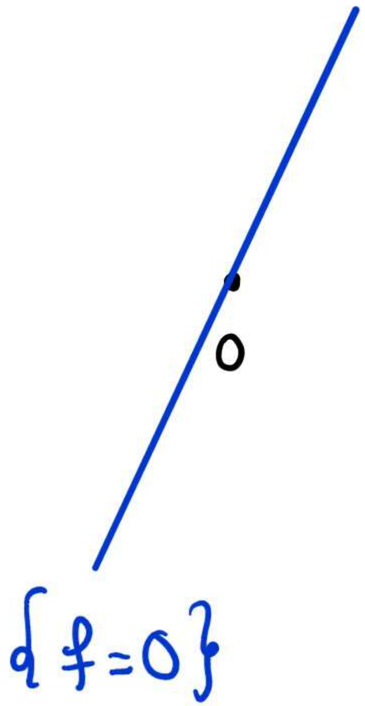
Τότε, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ της f, με

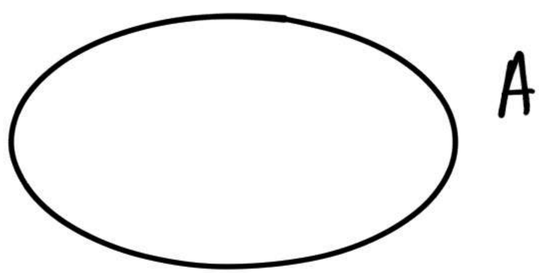
$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

→ **Πρόταση:** (0 $(X,\mathcal{T})^*$ διαχωρίζει το 0 από ανοιχτά κυρτά):

Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ ενι του $\mathbb{R}$. Έστω A ανοιχτό, κυρτό $\subseteq X$, με $0 \notin A$. Τότε, $\exists\, f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\exists \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A.$$





Απδ: Σταθεροποιούμε κάποιο $x_0 \in A$. Τότε, $0 \in x_0 - A \in \mathcal{T}$.

Άρα, το $A' := x_0 - A$ είναι ανοιχτή, κυρτή περιοχή του 0

$\Longrightarrow$ $A' = \{x \in X : p_{A'}(x) < 1\}$, όπου το

$$p_{A'} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

με $p_{A'}(x) := \inf\{t \geq 0 : x \in tA\}$ $\forall x \in X$

είναι υπογραμμικά συναρτησοειδές.

Ιδέα: Θα βρούμε γραμμική $f : X \to \mathbb{R}$, με $f \leq p_{A'}$. Τότε, αφού $p_{A'}$ μικρή στο $A' \Longrightarrow f$ μικρή στο $A' = x_0 - A \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f$ μεγάλη στο A.

$0 \notin A \Rightarrow x_0 \notin A' \Longrightarrow p_A(x_0) \geq 1$.

Ορίζουμε $Y := \operatorname{span}\{x_0\}$, και $f_0 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ τη γραμμική απεικόνιση με $f_0(\lambda x_0) := \lambda \cdot p_{A'}(x_0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $Y \leq X$
- $f_0(y) \leq p_{A'}(y) \quad \forall y \in Y$:

  $\rightsquigarrow$ Αν $\lambda < 0 \Longrightarrow f_0(\lambda x_0) = \lambda \underbrace{p_{A'}(x_0)}_{>0} < 0 \leq p_{A'}(\lambda x_0)$.
  ($\lambda < 0$)

  $\rightsquigarrow$ Αν $\lambda \geq 0 \Longrightarrow f_0(\lambda x_0) = \lambda p_{A'}(x_0) = p_{A'}(\lambda x_0)$.

Αφού το $p_{A'}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, από το Θ. επέκτασης του Hahn υπάρχει $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με

① $f_{|Y} = f_0 \Longrightarrow f(x_0) = f_0(x_0) = p_{A'}(x_0) \geq 1.$

② $f(x) \leq p_{A'}(x) \quad \forall x \in X.$

Άρα:

⊙ $f(x) > 0 \quad \forall x \in A$:

$\forall x \in A$, το $x_0 - x \in A' \Longrightarrow \underbrace{f(x_0 - x)}_{= f(x_0) - f(x)} \leq p_{A'}(\underbrace{x_0 - x}_{\in A'}) < 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $f(x) > f(x_0) - 1 > 1 - 1 = 0$.

⊙ $f \in (X,\mathcal{T})^*$: Αρκεί ΝΔΟ υπάρχει περιοχή του $0 \in X$ όπου η f είναι φραγμένη.

$\forall\ x \in X$, έχουμε:

$$\left.\begin{cases} f(x) \le p_{A'}(x), \\ f(-x) \le p_{A'}(-x) \Longrightarrow f(x) \ge -p_{A'}(-x) \\ \quad\ \| \\ \quad -f(x) \end{cases}\right\} \Longrightarrow -p_{A'}(-x) \le f(x) \le p_{A'}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x)| \le \max\left\{ p_{A'}(x),\ p_{A'}(-x) \right\}.$$

Άρα, αρκεί να βρεθεί περιοχή του 0 όπου οι $p_{A'}$, $p_{A'}(-\cdot)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

Η $p_{A'}$ είναι φραγμένη στο $A' \in \mathcal{N}_0$ (καθώς $p_{A'}(x) < 1 \ \forall x \in A'$), άρα η $p_{A'}(-\cdot)$ είναι φραγμένη στο $-A' \in \mathcal{N}_0$.

Επομένως, η f είναι φραγμένη στο $\tilde{A} := A' \cap (-A') \in \mathcal{N}_0$.

Άρα, η f είναι συνεχής.

■

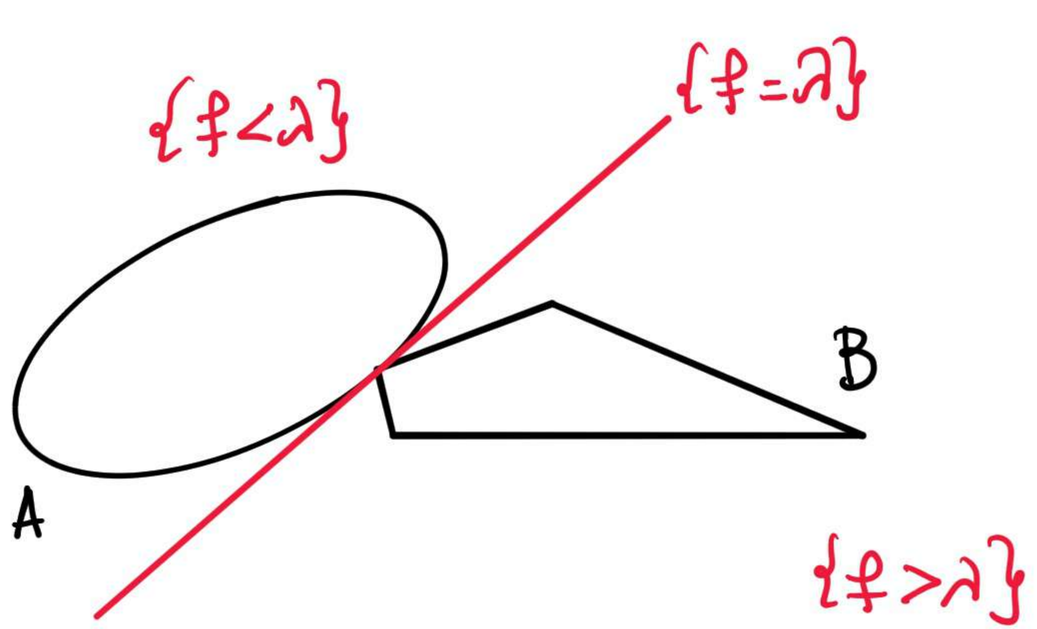
Τα υπόλοιπα διαχωριστικά θεωρήματα είναι πορίσματα του παραπάνω.

→ Πρόταση: (ο $(X,\mathcal{T})^*$ διαχωρίζει μηδενικά ζένα ανοιχτά κυρτά):

Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ επί του $\mathbb{R}$. Έστω $A, B \subseteq X$ ζένα, ανοιχτά, κυρτά.

Τότε, $\exists\, f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} A \subseteq \{f < \lambda\}, \\ B \subseteq \{f > \lambda\}. \end{cases}$$



Απόδ: Το $0 \notin \underbrace{B-A}_{\text{ανοιχτό, κυρτό } \subseteq X}$.

Άρα, από την προηγούμενη πρόταση, $\exists\, f \in (X,Y)^*$ ώστε

$$\underbrace{f(b-a)}_{f(b)-f(a)} > 0 \qquad \forall\, a \in A,\ b \in B$$

$$\Longrightarrow \qquad f(a) < f(b) \qquad \forall a \in A,\ b \in B$$

$$\Longrightarrow \qquad \sup\{f(a) : a \in A\} \leq \inf\{f(b) : b \in B\}.$$

- A ανοιχτό $\longrightarrow$ $f(a) \leq \sup\{f(a) : a \in A\}$ $\forall a \in A$

(δηλ., το $f(A)$ δεν έχει μέγιστο).

Πράγματι, $\forall\, a \in A$, υπάρχει $\tilde{a} \in A$ με $f(\tilde{a}) \geq f(a)$:

Έστω $a \in A$. Το A είναι ανοιχτό $\longrightarrow$ είναι απορροφών στο a $\longrightarrow$ $\forall\, y \in X$ υπάρχει $\varepsilon_y > 0$ ώστε $a + ty \in A$ $\forall\, t \in [0, \varepsilon_y)$

$\longrightarrow$ $f(a) + t f(y) \in f(A)$, $\forall\, t \in [0, \varepsilon_y)$.

Επιλέγοντας $y \in X$ με $f(y) > 0$ (υπάρχει τέτοιο y, αφού $f \neq 0$),

βλέπουμε ότι $f(a) + \underbrace{\frac{\varepsilon_y}{2}}_{>0} \underbrace{f(y)}_{>0} > f(a)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\in f(A)}$

Δηλ., το $\tilde{a} := a + \frac{\varepsilon_y}{2} y \in A$ και $f(\tilde{a}) > f(a)$.

- Παρόμοια, $f(b) \gneq \inf\{f(b) : b \in B\}$, $\forall b \in B$

(δηλ. το $f(B)$ δεν έχει ελάχιστο).

Έτσι, επιλέγοντας κάποιο $\lambda \in [\sup\{f(a) : a \in A\}, \inf\{f(b) : b \in B\}]$,

έχουμε ότι $f(a) < \lambda \quad \forall a \in A,$
$f(b) > \lambda \quad \forall b \in B.$ ∎

→ Πρόταση (έξοχα διαχωριστικό θεώρημα σε τοπικά κυρτούς χώρους:
ο $(X,\mathcal{T})^*$ διαχωρίζει αυστηρά συμπαγή κυρτά από κλειστά κυρτά):

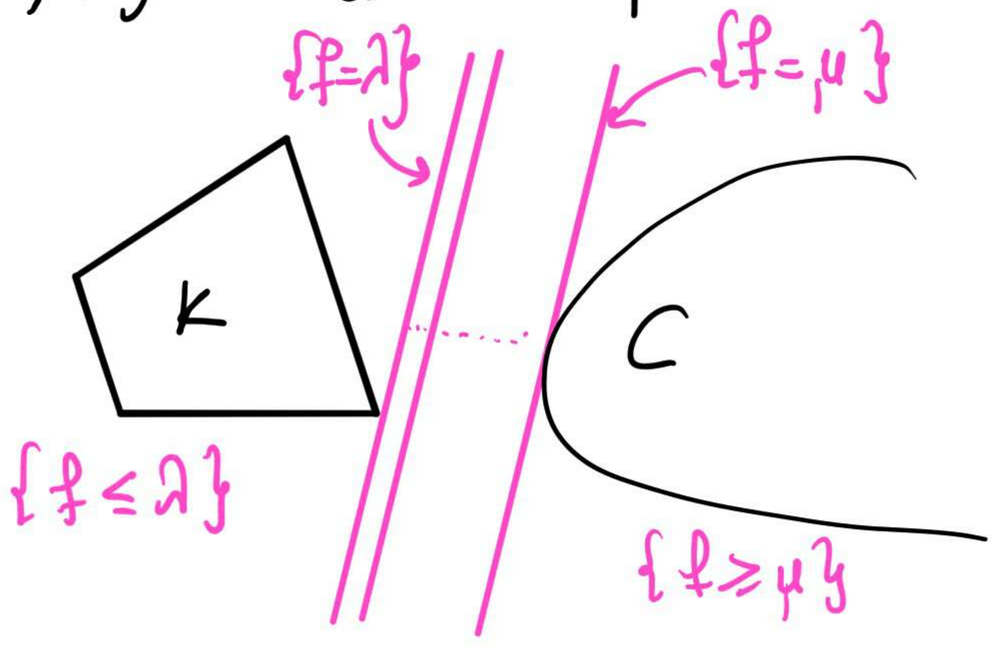
Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπικά κυρτός χώρος (διανυσματικός επί του $\mathbb{R}$).

Έστω K συμπαγές κυρτό $\subseteq X$ και C κλειστό κυρτό $\subseteq X$,

με $K \cap C = \emptyset$. Τότε, $\exists\, f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$

ώστε:

$$\begin{cases} K \subseteq \{f \leq \lambda\}, \\ C \subseteq \{f \geq \mu\} \end{cases}$$



Αποδ: $(X,\mathcal{T})$ τχ $\Rightarrow$ $\exists$ $W \in \mathcal{N}_0$ ώστε

$$(K+W) \cap (C+W) = \phi.$$

Αφού ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τοπικά κυρτός, υπάρχει V κυρτή περιοχή του 0 ώστε $V \subseteq W$. Άρα,

$$(K+V) \cap (C+W) = \phi$$

ανοιχτά, κυρτά

Από την παραπάνω πρόταση, $\exists$ $f \in (X,\mathcal{T})^*$ και $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} K+V \subseteq \{f<\mu\}, \\ C+V \subseteq \{f>\mu\} \ \left(\subseteq \{f\geq\mu\}\right). \end{cases}$$

$0\in V \Longrightarrow \quad K = K+0 \subseteq K+V \subseteq \{x\in X : f(x)<\mu\}.$

Το K είναι συμπαγές $\subseteq (X,\mathcal{T})$ και η $f:(X,\mathcal{T})\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι συνεχής. Άρα, η f παίρνει μέγιστη τιμή στο K, δηλαδή $\exists\, x_0\in K$ ώστε $f(x)\leq f(x_0)\ \forall x\in K$.

Επιλέγοντας $\lambda := f(x_0) < \mu$ (αφού $x_0\in K$), έχουμε:

$f(x)\leq\lambda \ \forall x\in K$, δηλαδή $K\subseteq\{f\leq\lambda\}$. ■

→ **Ασθενείς τοπολογίες : οι (X,w), (X^*,w^*).**

Επανερχόμαστε σε αυτούς τους χώρους για να τους καταλάβουμε καλύτερα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία που αναπτύξαμε για τοπικά κυρτούς χώρους γενικότερα.

Υπενθύμιση: Σύγκλιση δικτύων σε τυχαίο τοπολογικό χώρο $(X,\mathcal{T})$:

→ Ορισμός: Έστω ένα σύνολο (δεικτών) I, και $\leq$ μερική διάταξη στο I, δηλ: $\begin{cases} \alpha \leq \alpha \quad \forall \alpha \in I, \\ \text{αν } \alpha \leq b \text{ και } b \leq \alpha, \text{ τότε } \alpha = b, \\ \text{αν } \alpha \leq b \text{ και } b \leq c, \text{ τότε } \alpha \leq c \end{cases}$

⊙ Λέμε ότι το $(I, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο αν:

$$\forall\, i,j \in I,\ \exists\, k \in I \text{ με } k \geq i \text{ και } k \geq j.$$

π.χ.: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$, $\forall$ σύνολο $X \neq \emptyset$.

⊙ Κάθε συνάρτηση $x : (I, \leq) \longrightarrow X$, όπου το $(I, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο και $X \neq \emptyset$, λέγεται δίκτυο στον X.

Συμβολίζουμε: $x_i := x(i)$, $\forall i \in I$

$(x_i)_{i \in I} := x$.

⊙ Έστω (X,τ) τχ. και $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X.

Λέμε ότι το $(x_i)_{i\in I}$ συγκλίνει στο $x_0 \in X$ ως προς την τ,

και γράφουμε $x_i \longrightarrow x_0$ ή $x_i \xrightarrow{\tau} x_0$, αν:

$\forall\ \mathcal{U}$ περιοχή (στην τ δηλαδή) του x_0, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε: $x_i \in \mathcal{U}\ \forall\ i \geq i_0$ στο I.

⚠ Αν ο (X,τ) είναι Hausdorff, δηλ. η τ διαχωρίζει σημεία του X, τότε κάθε συγκλίνον δίκτυο στον X έχει μοναδικό όριο.

Τέλος, υπενθυμίζουμε την αρχή της μεταφοράς σε ανοικτούς σ.χ. :

→ Πρόταση: Έστω $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$, όπου $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Έστω $x_0\in X$. Τότε:

f συνεχής στο x_0

$\Longleftrightarrow$

Η δικτυο $(x_i)_{i\in I}$ στον X με $x_i \xrightarrow{\mathcal{T}_X} x_0$, ισχύει ότι $f(x_i)\xrightarrow{\mathcal{T}_Y} f(x_0)$.



(X,w) : Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

⊙ Ορίσαμε τη w-τοπολογία στον X ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε κάθε $x^* \in X^*$ να είναι συνεχής απεικόνιση : $(X,\mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{K},|\cdot|)$ (δηλ., ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X που περιέχει τις $(x^*)^{-1}(U)$, $\forall U$ ανοιχτό $\subseteq (\mathbb{K},|\cdot|)$, $\forall x^* \in X^*$). Άρα:

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$: Αν A w-ανοιχτό, τότε A $\|\cdot\|$-ανοιχτό (αφού η $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ περιέχει τις παραπάνω αντίστροφες εικόνες).

$\rightsquigarrow$ $X^* \subseteq (X,w)^*$: Κάθε $x^* \in X^*$ είναι συνεχής: $(X,w) \to (\mathbb{K},|\cdot|)$.

⊙ Έχουμε δει ότι, $\forall x_0 \in X$, $\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0$, και ότι η

$$\mathcal{B}_0 := \{ \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\}}_{=: B(x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon)} : n \in \mathbb{N}, x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0 \}$$

αποτελεί βάση περιοχών του 0. Άρα, η

$$\mathcal{B}_{x_0} := \{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : \underbrace{|x_i^*(x-x_0)|}_{x_i^*(x)-x_i^*(x_0)} < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0 \}$$

αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

Άρα, ο (X,w) είναι τοπικά κυρτός χώρος, με τοπολογία την ασθενή τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια

$$\mathcal{P} := \{ |x^*| : x^* \in X^* \}$$

ημινορμών στον X.

⊙ $\boxed{(X,w)^* = X^*}$: Ήδη εξηγήσαμε ότι $X^* \subseteq (X,w)^*$: αυτό πιάνω μέρος του ορισμού της w-τοπολογίας. Όμως, $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, άρα δεν μπορεί να αυξήθηκαν τα συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή περνώντας από την $\tau_{\|\cdot\|}$ στη μικρότερη τ_w. Πράγματι,

$(X,w)^* \subseteq X^*$, καθώς, $\forall$ γραμμική, συνεχή $f:(X,w)\to(\mathbb{K},|\cdot|)$

έχουμε ότι $f^{-1}(U)\in \tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, $\forall U\subseteq(\mathbb{K},|\cdot|)$ ανοιχτό,

και άρα $f:(X,\|\cdot\|)\to(\mathbb{K},|\cdot|)$ επίσης συνεχής.

⊙ Τι σημαίνει ασθενής σύγκλιση; Έστω $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X,

και $x_0\in X$. Τότε:



$$x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff x^*(x_i)\xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0),\quad \forall x^*\in X^*.$$

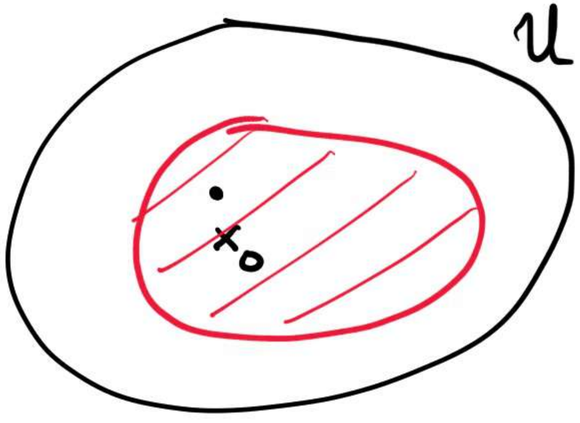
Απόδ: ($\Longrightarrow$) Έστω $x^* \in X^*$. Τότε, $x^* : (X, w) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχής.

Άρα, $x_i \xrightarrow{w} x_0 \Longrightarrow x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)$.

($\Longleftarrow$) Ξέρουμε ότι, $\forall x^* \in X^*$, $x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)$.

Θ.Δ.Ο $x_i \xrightarrow{w} x_0$. Έστω $U \in \mathcal{N}_{x_0}$. Τότε, $\exists n \in \mathbb{N}$,

$x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ ώστε:



Δηλ: $\forall x \in X$ με $\begin{cases} |x_1^*(x) - x_1^*(x_0)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_n^*(x) - x_n^*(x_0)| < \varepsilon \end{cases}$, ισχύει: $x \in U$.

η $V := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_j^*(x) - x_j^*(x_0)| < \varepsilon\}$

να είναι περιοχή του 0 μέσα στον U.

$\forall\ j=1,\dots,n,\quad x_j^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x_j^*(x_0)$. Άρα, $\exists\ i_j \in I$ ώστε:

$\forall\ \kappa \in I$ με $\kappa \geq i_j$, να ισχύει ότι $|x_j^*(x_i) - x_j^*(x_0)| < \varepsilon$.

Επιλέγοντας $\kappa_0 \in I$ με $\kappa_0 \geq i_1, \kappa_0 \geq i_2, \dots, \kappa_0 \geq i_n$ (υπάρχει τέτοιο κ_0, αφού το I είναι κατευθυνόμενο), έχουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} |x_1^*(x_i) - x_1^*(x_0)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_n^*(x_i) - x_n^*(x_0)| < \varepsilon \end{array} \right\}, \quad \forall\ i \in I \text{ με } i \geq \kappa_0.$$

Άρα, $x_i \in \mathcal{U}\ \ \forall\ i \geq \kappa_0$.

■

→ Άσκηση: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $L^p(\mathbb{R})$, για κάποιο $1\le p < +\infty$. Τι σημαίνει ότι $f_n \xrightarrow{w} f$, για κάποια $f\in L^p(\mathbb{R})$;

Λύση: Σημαίνει ότι $x^*(f_n) \xrightarrow{1.1} x^*(f)$, $\forall x^*\in (L^p(\mathbb{R}))^*$.

Ξέρουμε ότι $(L^p(\mathbb{R}))^* \simeq L^q(\mathbb{R})$, όπου $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, και μάλιστα ότι τα $x^*\in (L^p(\mathbb{R}))^*$ είναι ακριβώς οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} T_g : L^p(\mathbb{R}) &\to \mathbb{C} \\ f &\to \int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda, \end{aligned}$$

πάνω σε όλες τις $g\in L^q(\mathbb{R})$. Επομένως,

$$f_n \xrightarrow{w} f \iff \boxed{\int f_n g \, d\lambda \longrightarrow \int f g \, d\lambda \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}).}$$

$\blacksquare$

$\rightarrow$ Άσκηση: ΝΔΟ $\chi_{[n,n+1]} \xrightarrow{w} 0$ στον $L^p(\mathbb{R})$, $\forall\, 1 < p < +\infty$.

⊙ Πώς σχετίζονται η ασθενής κλειστότητα και η $\|\cdot\|$-κλειστότητα;

Έστω $A \subseteq X$. Ξέρουμε ότι:

$$\bar{A}^{w} := \bigcap_{\substack{F \text{ w-κλειστό}, \\ F \supseteq A}} F \quad , \quad \text{και}$$

$$\bar{A}^{\|\cdot\|} := \bigcap_{\substack{F \text{ } \|\cdot\|\text{-κλειστό}, \\ F \supseteq A}} F .$$

Αφού $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, υπάρχουν λιγότερα w-κλειστά από ότι $\|\cdot\|$-κλειστά, και άρα $\bar{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \bar{A}^{w}$, $\forall A \subseteq X$. Όμως, έχουμε ισότητα αν A κυρτό!

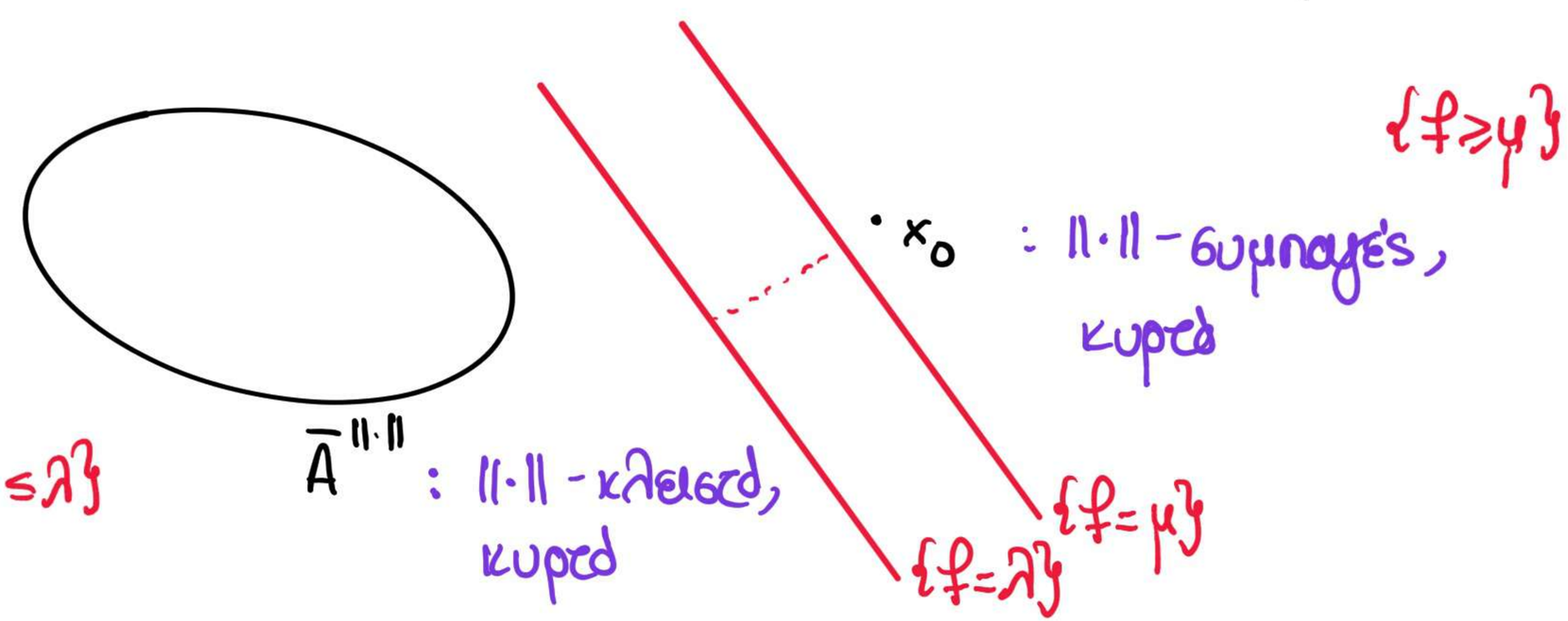
→ Θεώρημα (Mazur): Αν A κυρτό $\subseteq X$, τότε

$$\bar{A}^{w} = \bar{A}^{\|\cdot\|}.$$

(π.χ. : $\overline{B_X(0,1)}^{w} = \overline{B_X(0,1)}^{\|\cdot\|} = \tilde{B}_X(0,1)$).

Απόδ.: Ξέρουμε ότι $\bar{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \bar{A}^{w}$. Έστω ότι $\exists\, x_0 \in \bar{A}^{w}$ με $x_0 \notin \bar{A}^{\|\cdot\|}$.

$(X, \|\cdot\|)$ τοπικά κυρτός



Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι τοπικά κυρτός χώρος, καθώς η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι πμνδρμα που διαχωρίζει σημεία του x, και η

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \underbrace{\{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}}_{\| \\ B_{\|\cdot\|}(x_0, \varepsilon)} : \varepsilon > 0 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

Αφού το $\{x_0\}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, κυρτό $\subseteq X$,

και το $\bar{A}^{\|\cdot\|}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, κυρτό $\subseteq X$, υπάρχουν

κάθως
Α κυρτό

$x^* \in X^*$ και $\lambda < \psi$ στο $\mathbb{R}$ ώστε:

$$x^*(x_0) \geq \psi \quad \text{και} \quad x^*(x) \leq \lambda \quad \forall x \in \bar{A}^{\|\cdot\|}.$$

Όμως, $x_0 \in \bar{A}^w \Rightarrow$ $\exists$ δίκτυο $(x_i)_{i \in I}$ στο A με $x_i \xrightarrow{w} x_0$

$$\Longrightarrow x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)$$

$$\Longrightarrow x^*(x_0) = \lim_i x^*(x_i) \leq \sup_{i \in I} x^*(x_i) \leq \lambda < \psi \leq x^*(x_0),$$

άτοπο!

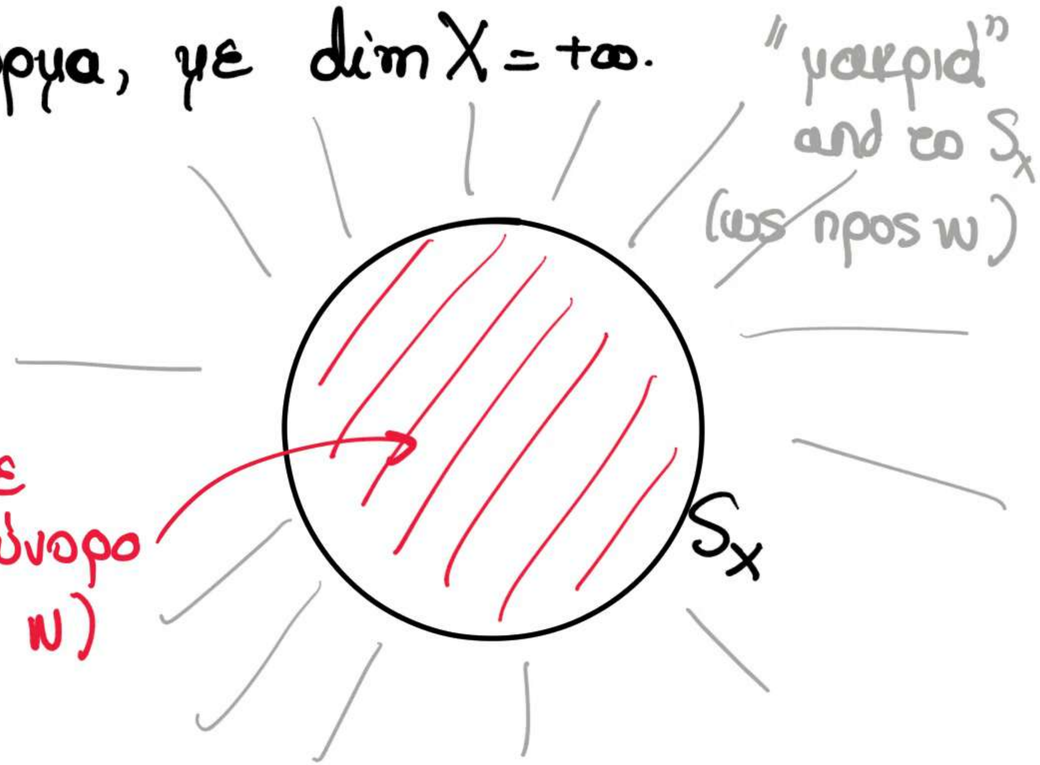
Άρα, $\bar{A}^{\|\cdot\|} = \bar{A}^w$. ■

→ Συμβ.: Για απλότητα, στο εξής συμβολίζουμε:

$$B_X := B_X(0,1),$$
$$\widetilde{B}_X := \widetilde{B}_X(0,1),$$
$$S_X := S_X(0,1).$$

→ Άσκηση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$.

Τότε, $\overline{S_X}^{w} = \widetilde{B}_X$.



Λύση: • $S_X \subseteq \widetilde{B}_X \Longrightarrow \overline{S_X}^{w} \subseteq \overline{\widetilde{B}_X}^{w} = \overline{\widetilde{B}_X}^{\|\cdot\|} = \widetilde{B}_X$.

$\widetilde{B}_X$ κυρτό, Mazur

Δηλαδή, $\overline{S_X}^{w} \subseteq \widetilde{B}_X$.

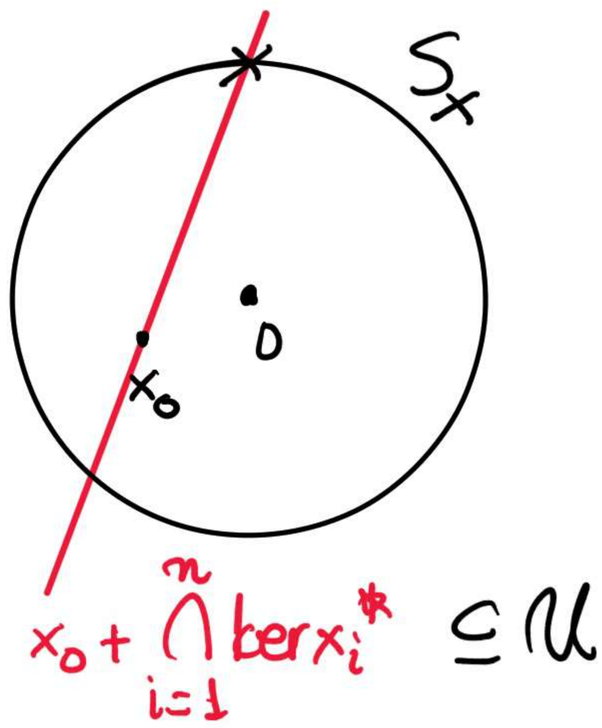
• Τώρα ΘΔΟ $\widetilde{B}_X \subseteq \overline{S_X}^{w}$. Έστω $x_0 \in \widetilde{B}_X$.

Έστω $\mathcal{U}$ w-περιοχή του x_0. Πρέπει ΝΔΟ

η $\mathcal{U}$ τέμνει την S_X. Αυτό ισχύει

επειδή η $\mathcal{U}$ περιέχει αφφινικό υπόχωρο.

Πράγματι, $\exists\, n \in \mathbb{N}, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0$



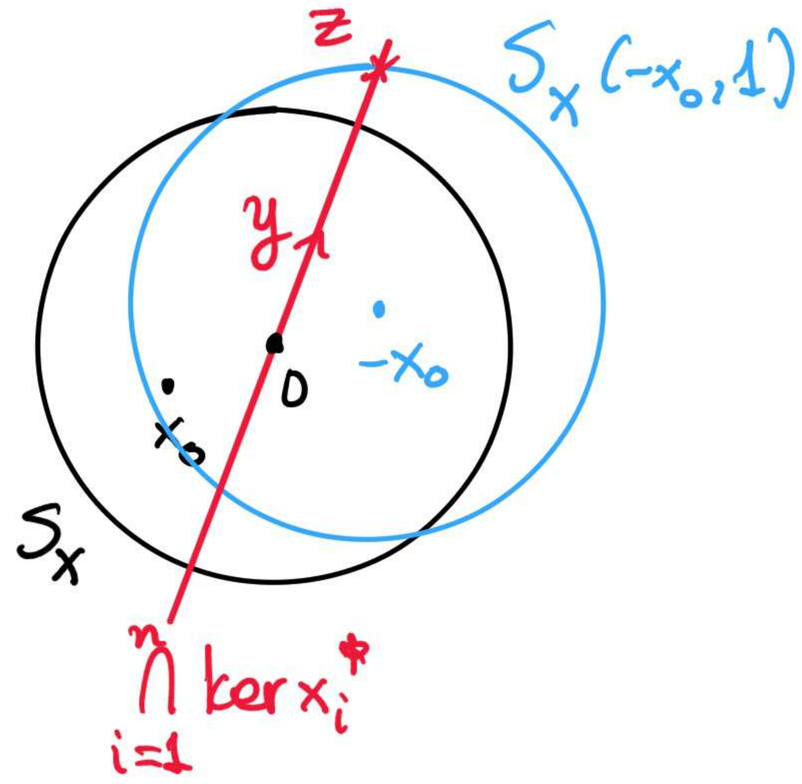
ώστε $x_0 + \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\}}_{\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*} \subseteq U$

$\Longrightarrow$ $x_0 + \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* \subseteq U.$

Θέλω $\exists\ x \in x_0 + \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$ με $x \in S_X$. (Αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη). Ισοδύναμα, ψάχνουμε

$z \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$ ώστε $x_0 + z \in S_X(0,1) \Leftrightarrow z \in S_X(-x_0, 1)$.

Χρησιμοποιούμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό διάνυσμα μέσα στον $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$, και άρα κάποιο πολλαπλάσιό του θα τέμνει την $S_X(-x_0, 1)$ (καθώς $\|0-(-x_0)\| \leq 1$).



Πράγματι: $\forall i = 1, \dots, n$, ο $\ker x_i^*$ έχει συνδιάσταση $1 \Longrightarrow$ η $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$ έχει

συνδιάσταση $\leq n \Longrightarrow$ η $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$ έχει άπειρη διάσταση, $\dim X = +\infty$

άρα $\boxed{\exists\ y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* \quad \text{με} \quad y \neq 0}$.

Επομένως, $\operatorname{span}\{y\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$.

Και $\exists\ t \in \mathbb{R}$ ώστε $ty \in S_X(-x_0, 1)$:

Η $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, με:

με $f(t) = \|ty + x_0\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- $f(0) = \|x_0\| \leq 1 \quad$ (αφού $x_0 \in \widetilde{B}_X$),
- $f(t) \geqslant \|ty\| - \|x_0\| = |t| \cdot \|y\| - \|x_0\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Άρα, $\exists\ t_0 \in [0, +\infty)$ με $f(t_0) = 1$, δηλ. με $t_0 y \in S_X(-x_0, 1)$. ∎

→ Πορίσματα του Θ. Mazur: Έστω $(X, \|\cdot\|)$. Τότε:

① Αν $Y \leq X$, τότε: $\overline{Y}^{w} = \overline{Y}^{\|\cdot\|}$.

Απδ: Κάθε υπόχωρος του X είναι κυρτό σύνολο.

② Έστω $(x_i)_{i \in I}$ δίκτυο στον X. Τότε:

$$\overline{\{x_i : i \in I\}}^{w} \subseteq \overline{\operatorname{conv}\{x_i : i \in I\}}^{w} \underset{\text{Mazur}}{=\!=} \overline{\operatorname{conv}\{x_i : i \in I\}}^{\|\cdot\|}.$$

Άρα: αν $x_i \xrightarrow{w} x_0$, τότε υπάρχει ακολουθία! $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ κυρτών συνδυασμών των x_i, με $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$.

→ Πχ: Αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^\infty(\mathbb{R})$ με $f_n \xrightarrow{w} 0$, τότε υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυρτών συνδυασμών των f_n με $\|g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

→ Άσκηση: Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυρτών συνδυασμών των $\chi_{[n,n+1]}$, $n\in\mathbb{N}$, με $\|g_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Στη συνέχεια, βρείτε μια τέτοια ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⊙ Οι w-τοπολογίες εέβονται εν συνέχεια όλων των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ χώρων Banach (όχι μόνο των χρ. συναρτησοειδών):

→ Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι Banach, και $T: X \longrightarrow Y$ γραμμική. Τότε,

$$T: (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y) \text{ συνεχής}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$T: (X, w) \longrightarrow (Y, w) \text{ συνεχής.}$$

Απδ.: ($\Longleftarrow$) Έστω ότι η T είναι w- συνεχής.

Αφού οι $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι χώροι Banach,
για ΝΔΟ η $T: (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι συνεχής
αρκεί ΝΔΟ η T έχει κλειστό γράφημα (ως προς τις $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$).

Επομένως, έστω $(x_n, Tx_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, y)$, με την έννοια

ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$

και $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$

. ΘΔΟ $y = Tx$.

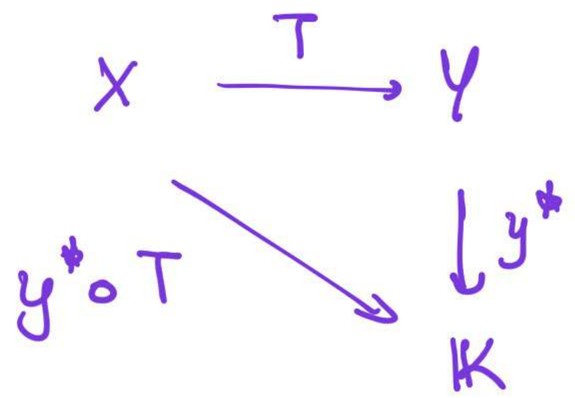
Ξέρουμε ότι $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \Longrightarrow Tx_n \xrightarrow{w} y$ (αφού $\forall y^* \in Y^*$
η y^* είναι $\|\cdot\|_Y$ - συνεχής, και άρα $y^*(Tx_n) \to y^*(y)$).

Άρα, αρκεί να δείχθεί <u>και</u> ότι $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

(Τότε, αφού ο (X,w) είναι Hausdorff (ως τοπικά κυρτός), από μοναδικότητα του ορίου θα έχουμε ότι $y = Tx$.)

Έστω λοιπόν $y^* \in Y^*$. Πρέπει ΝΔΟ $y^*(Tx_n) \xrightarrow{|\cdot|} y^*(Tx)$,

δηλ. ότι $(y^* \circ T)(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} (y^* \circ T)(x)$.



Αυτό ισχύει, καθώς $y^* \circ T \in X^*$:

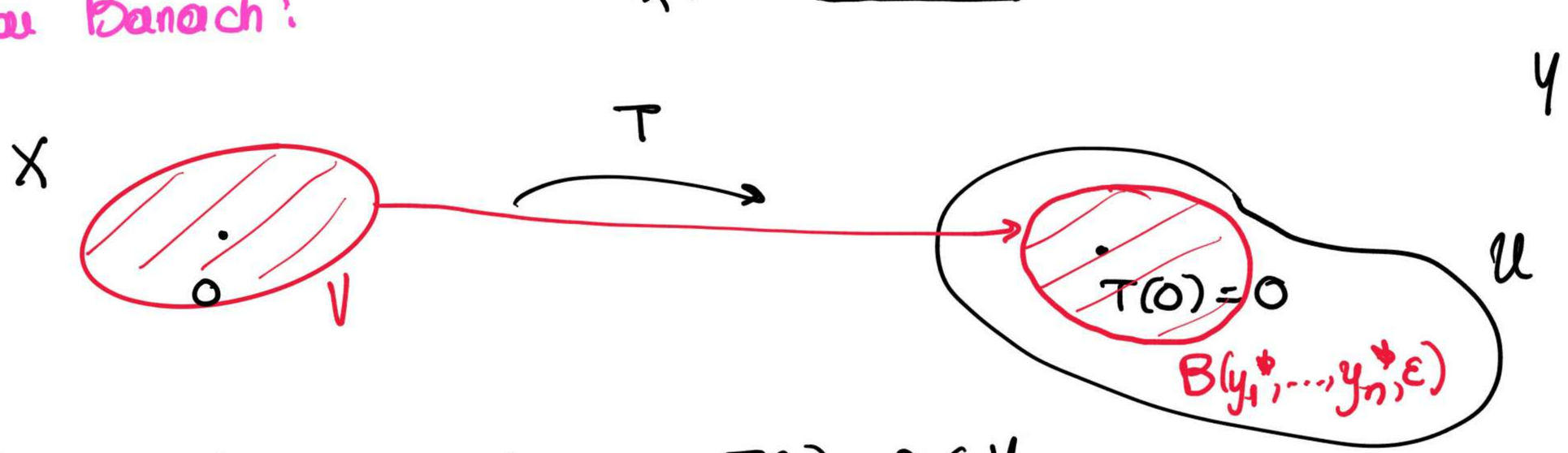
$T: (X,w) \to (Y,w)$ συνεχής,
$y^*: (Y,w) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχής
$\Big\} \to y^* \circ T \in (X,w)^* = X^*$.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ συνεχής.

Τότε, $T: (X, w) \to (Y, w)$ συνεχής:

Σε χρησιμοποιεί ότι οι χώροι είναι Banach!

Αρκεί, λόγω γραμμικότητας, ΝΔΟ η T είναι συνεχής στο $\underline{0 \in X}$.



Έστω $\mathcal{U}$ w-περιοχή του $T(0) = 0 \in Y$.

$\exists\ n \in \mathbb{N},\ y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$ ώστε:

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{ y \in Y : |y_i^*(y)| < \varepsilon \}}_{\| \; B(y_1^*, \dots, y_n^*, \varepsilon)} \subseteq U.$$

Ψάχνουμε V w-περιοχή του $0 \in X$ ώστε: $T(V) \subseteq B(y_1^*, \dots, y_n^*, \varepsilon)$

Άρα, ψάχνουμε $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$, $\varepsilon' > 0$ ώστε:

$$T\left(B(x_1^*, \dots, x_n^*, \varepsilon') \right) \subseteq B(y_1^*, \dots, y_n^*, \varepsilon), \text{ δηλ. ώστε:}$$

$\forall x \in X$ με $\left\{ \begin{array}{l} |x_1^*(x)| < \varepsilon' \\ \vdots \\ |x_n^*(x)| < \varepsilon' \end{array} \right\}$ να έχουμε ότι $Tx \in \Big\}$, δηλ. $\left\{ \begin{array}{l} |y_1^*(Tx)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |y_n^*(Tx)| < \varepsilon \end{array} \right\}$,

δηλ. δτι $\left\{ \begin{array}{l} |(y_1^* \circ T)(x)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |(y_n^* \circ T)(x)| < \varepsilon \end{array} \right\}$.

Επιλέγοντας $m := n$, $\varepsilon' := \varepsilon$, $x_i^* := y_i^* \circ T$ $(\in X^*)$ $\forall i = 1, \dots, n$,

έχουμε το ζητούμενο. ∎

(X^*, w^*) : Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Έχουμε δει ότι η $\tau : X \hookrightarrow X^{**}$,

με $\tau(x) : X^* \to \mathbb{K}$

$$\tau(x)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*,$$

είναι ισομετρική εμφύτευση του X μέσα στον X^{**}.

Δηλ., $\forall x \in X$, η χρ. $\tau(x) : (X^*, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι συνεχής

(νόρμες τελεστών)

(δηλ. $\tau(x) \in X^{**}$) και $\|\tau(x)\| = \|x\|$.

↳ νόρμα στον X.

Υπενθυμίζουμε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **ανακλαστικός** αν η ε είναι επί (δηλ. $\varepsilon(X) = X^{**}$), δηλ. αν κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : (X^*, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι υπολογισμός κάθε $x^* \in X^*$ σε κάποιο σημείο του X.

- Ορίσαμε την w^*-τοπολογία στον X^* ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X^* ώστε κάθε $\varepsilon(x) : (X^*, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ να είναι συνεχής, $\forall x \in X$

  (δηλ., ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X^* που περιέχει τα $(\varepsilon(x))^{-1}(U)$, $\forall U \subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$ ανοιχτό, $\forall x \in X$). Άρα:

$\rightsquigarrow \tau_{w^*} \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$: Αν A w^*-ανοιχτό $\subseteq X^*$,

τότε A $\|\cdot\|$-ανοιχτό, αφού κάθε

μία από τις παραπάνω ανισότητες

ειδικά είναι $\|\cdot\|$-ανοιχτή στον X^*

(αφού κάθε $\tau(x): (X^*, \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι συνεχής, $\forall x \in X$).

↳ νόρμα τελεστών

$\rightsquigarrow \tau(X) \subseteq (X^*, w^*)^*$.

• Έχουμε δει ότι, $\forall x_0^* \in X^*$, $\mathcal{N}_{x_0^*} = x_0^* + \mathcal{N}_0$, και ότι η

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : \underbrace{|x^*(x_i)|}_{\| \tau(x_i)(x^*) |} < \varepsilon \} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του $0 \in X^*$. Άρα, η

$$\mathcal{B}_{x_0^*} := x_0^* + \mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : \underbrace{|x^*(x_i) - x_0^*(x_i)|}_{\| \; |x(x_i)(x^* - x_0^*)|} < \varepsilon \} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του x_0^*, $\forall x_0^* \in X^*$.

Άρα, ο (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός, με τοπολογία την ασθενή τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $P := \{|x(\cdot)| : x \in X\}$ ημινορμών στον X^*.

- $\tau(X) = (X^*, w^*)^*$:

$\subseteq$: Έχει εξηγηθεί, προκύπτει από τον ορισμό της w^*-τοπολογίας.

$\supseteq$: Έστω $f \in (X^*, w^*)^*$, δηλ. $f: (X^*, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχής. Αφού ο (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός, και η w^*-τοπολογία παράγεται από την οικογένεια $P = \{|\tau(x)| : x \in X\}$ ημινορμών στον X^*, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ και $c > 0$ ώστε:

$$|f| \leq c \cdot \left(|\tau(x_1)| + \dots + |\tau(x_n)|\right),$$

δηλ. ώστε: $|f(x^*)| \leq c \cdot \left(|\tau(x_1)(x^*)| + \dots + |\tau(x_n)(x^*)|\right)$, $\forall x^* \in X^*$.

Άρα, $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \tau(x_i) \subseteq \ker f$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$\exists \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ με $\boxed{f = \lambda_1 \tau(x_1) + \dots + \lambda_n \tau(x_n)}$

$= \tau(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \in \tau(X)$.

■

⚠ Στο παραπάνω χρησιμοποιήθηκε το εξής Λήμμα, το οποίο έχουμε προς το παρόν δείξει για $n=1$:

→ Λήμμα: Έστω $g, f_1, \dots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμικές, με $\ker g \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$. Τότε,

f $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε: $g = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$.

<u>Απδ</u>: 1ος τρόπος: Με καταλληλη επαγωγή (το γνωρίζουμε για $n=1$).

2ος τρόπος: Απόδειξη στη σελ. 99 των σημειώσεων του Α. Γιαννόπουλου. ∎

⊙ Τι σημαίνει w^*-σύγκλιση; Έστω $(x_i^*)_{i\in I}$ δίκτυο στον X^*, και $x_0^* \in X^*$. Τότε:

$$x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^* \iff \underbrace{x_i^*(x)}_{\tau(x)(x_i^*)} \xrightarrow{1\text{-}1} \underbrace{x_0^*(x)}_{\tau(x)(x_0^*)}, \quad \forall x \in X.$$

Δηλ.: $a\delta\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma^*$ σύγκλιση σημαίνει **σύγκλιση κατά σημείο.** ❗

⚠ Αυτό δείχνει και πόσο πιο "αδύναμη" είναι η $a\delta\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma^*$ σύγκλιση σε σχέση με τη $\|\cdot\|$-σύγκλιση στον X^*.

<u>Απόδ.</u>: ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$. $\forall x \in X$,

η $\tau(x) : (X^*, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι συνεχής,

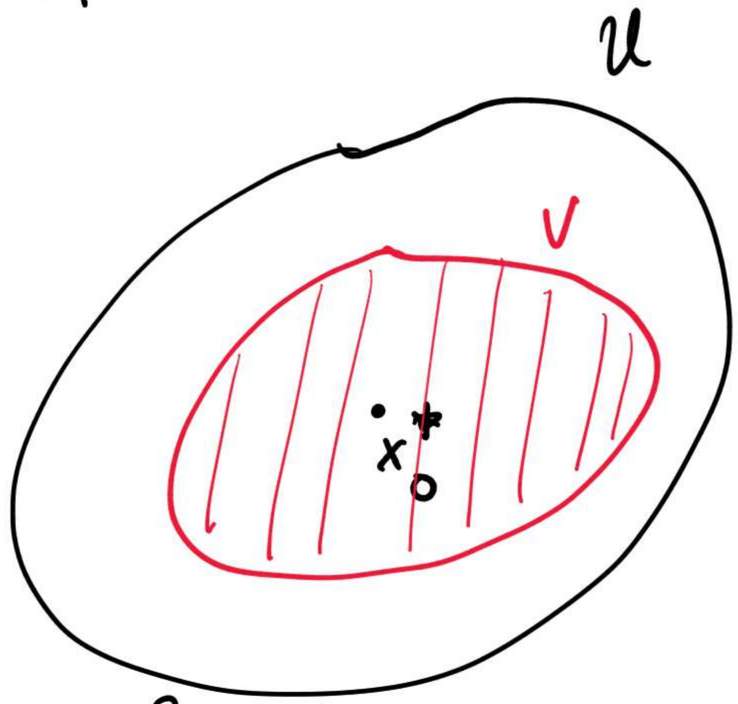
άρα $\underbrace{\tau(x)\,(x_i^*)}_{\| \; x_i^*(x)} \longrightarrow \underbrace{\tau(x)\,(x_0^*)}_{\| \; x_0^*(x)}$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $x_i^*(x) \xrightarrow{1\text{-}1} x_0^*(x)$, $\forall x \in X$.

Θ.Δ.Ο. $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

Έστω $\mathcal{U}$ w^*-περιοχή του x_0^* στον X^*.

Θ.Δ.Ο. για μεγάλα $i \in I$, $x_i^* \in \mathcal{U}$:



Ξ $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\text{να } V := \bigwedge_{j=1}^{n} \left\{ x^* \in X^* : |x^*(x_j) - x_0^*(x_j)| < \varepsilon \right\} \subseteq \mathcal{U}.$$

$\forall\, j = 1, \dots, n$, $x_i^*(x_j) \xrightarrow{1\text{-}1} x_0^*(x_j) \Longrightarrow \exists\, \kappa_j \in I$ ώστε,

$$\forall\, \kappa \geq \kappa_j \ , \quad |x_\kappa^*(x_j) - x_0^*(x_j)| < \varepsilon.$$

Επιλέγουμε $k_0 \in I$ ώστε $k_0 \geq k_1, \dots, k_0 \geq k_n$

(υπάρχει τέτοιο k_0, καθώς το $(I, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο).

Τότε, $\forall k \geq k_0$, έχουμε ότι $\left\{ \begin{array}{l} |x_k^*(x_1) - x_0^*(x_1)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_k^*(x_n) - x_0^*(x_n)| < \varepsilon \end{array} \right\}$,

άρα ότι $x_k^* \in V \subseteq \mathcal{U}$.

■

⊙ Η w^*-τοπολογία αποδίδει συμπάγεια σε σημαντικά $\subseteq X^*$.

! → Θεώρημα (Alaoglu): Η $(\widetilde{B}_{X^*}, w^*)$ είναι συμπαγής.

⚠ Σε οποιοδήποτε $(Y, \|\cdot\|)$ χώρο με νόρμα,

η $\widetilde{B}_Y$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής $\iff$ $\dim Y < +\infty$.

Επίσης, $\dim X^* < +\infty \iff \dim X < +\infty$. Άρα, οποτεδήποτε $\dim X = +\infty$, η $\widetilde{B}_{X^*}$ δεν είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής. Είναι όμως w^*-συμπαγής. Άρα, κάθε δίκτυο έχει w^*-συγκλίνον υποδίκτυο, κλπ.

⇝ Υπενθυμίζουμε πρώτα κάτι που θα χρειαστεί στην απόδειξη:

Η τοπολογία γινόμενο: Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)$ τ.χ. $\forall i \in I$, όπου το I είναι κάποιο σύνολο δεικτών.

Ορίζουμε την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_{prod}$ στον $X := \prod_{i \in I} X_i$ ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε κάθε προβολή $\pi_i : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ να είναι συνεχής. Δηλ.,

$\mathcal{T}_{prod} :=$ η μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει τα $\pi_i^{-1}(U_i)$, $\forall i \in I$, $\forall U_i \in \mathcal{T}_i$.

Η $\mathcal{T}_{prod}$ ονομάζεται και η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον X, καθώς ένα δίκτυο συγκλίνει στον $(X, \mathcal{T}_{prod})$ $\Leftrightarrow$ συγκλίνει κατά σύνεσχημένη.

→ Απδ. (του Θ. Alaoglu): Θεωρούμε την απεικόνιση

$$G : (\widetilde{B}_{X^*}, w^*) \longrightarrow \left(\prod_{x \in X} \widetilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|), \mathcal{T}_{prod}\right),$$

$$x^* \longrightarrow (x^*(x))_{x \in X}.$$

το σύνολο τιμών του x^*, διαστασμένο.

• Η G είναι καλά ορισμένη:

$$\forall x^* \in \widetilde{B}_{X^*}, \text{ ισχύει ότι } G(x^*) \in \prod_{x\in X} \widetilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|),$$

καθώς, $\forall x \in X$, $|x^*(x)| \leq \underbrace{\|x^*\|}_{\leq 1} \cdot \|x\| \leq \|x\|$, και άρα $x^*(x) \in \widetilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)$.

• Η G είναι 1-1:

Για $x_1^*, x_2^* \in \widetilde{B}_{X^*}$, $G(x_1^*) = G(x_2^*) \Rightarrow (x_1^*(x))_{x\in X} = (x_2^*(x))_{x\in X}$

$\Rightarrow x_1^*(x) = x_2^*(x)\ \forall x \in X$

$\Rightarrow x_1^* = x_2^*$.

- Η G είναι αμφιουνεχής, δηλ. $\underbrace{x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*}_{\text{στον } \widetilde{B}_{x^*}} \iff \underbrace{G(x_i^*) \xrightarrow{\tau_{prod}} G(x_0^*)}_{\text{στον } \prod_{x\in X} \widetilde{B}_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)}$:

Έστω $(x_i^*)_{i\in I}$ δίκτυο στον $\widetilde{B}_{x^*}$, και έστω $x_0^* \in \widetilde{B}_{x^*}$. Τότε:

$$x_i^* \xrightarrow{w} x_0^* \iff x_i^*(x) \to x_0^*(x) \quad \forall x\in X$$
$$\iff G(x_i^*) \xrightarrow{\tau_{prod}} G(x_0^*).$$

- Από Θ. Tychonoff, ο $Y := \left(\prod_{x\in X} \widetilde{B}_{\mathbb{K}}(0,\|x\|), \tau_{prod}\right)$ είναι συμπαγής.

Άρα, αρκεί ΝΔΟ $G(\widetilde{B}_{x^*})$ κλειστό στον Y. (Πραίμαρι, τότε

Θα ισχύει και ότι $G(\tilde{B}_{X^*})$ συμπαγές στον Y,

και άρα η $\tilde{B}_{X^*} = \underbrace{G^{-1}}\left(\underbrace{G(\tilde{B}_{X^*})}_{\text{συμπαγές στον } Y}\right)$ θα είναι w^*-συμπαγής.

συνεχής : $Y \to (B_{X^*}, w^*)$

Έστω λοιπόν $(x_i^*)_{i\in I}$ δίκτυο στον $G(\tilde{B}_{X^*})$, με $G(x_i^*) \xrightarrow{\tau_{prod}} (\lambda_x)_{x\in X}$,

για κάποιο $(\lambda_x)_{x\in X} \in Y = \prod_{x\in X} \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)$. ΘΔΟ $(\lambda_x)_{x\in X} \in G(\tilde{B}_{X^*})$.

Πράγματι: $\underset{(x_i^*(x))_{x\in X}}{G(x_i^*)} \xrightarrow{\tau_{prod}} (\lambda_x)_{x\in X} \Longrightarrow \forall x\in X,\ x_i^*(x) \xrightarrow{|\cdot|} \lambda_x$.

Ορίζουμε $x^{**} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ με

$$x^{**}(x) := \lambda_x, \quad \forall x \in X.$$

Τότε:

- x^{**} γραμμική, ως κατά σημείο όριο γραμμικών απεικονίσεων.
- $x^{**} \in \widetilde{B}_{X^{**}}$: $\forall x \in X$, $|x^{**}(x)| = |\lambda_x| = |\lim x_i^{**}(x)|$

$$\leq \sup_{i \in I} \underbrace{|x_i^{**}(x)|}_{\leq} \leq \|x\|.$$

$$\underbrace{\|x_i^{**}\|}_{\leq \Delta} \cdot \|x\| \leq \|x\|$$

Άρα, $x^{**} \in \widetilde{B}_{X^{**}}$.

Επομένως, $(\partial_x)_{x\in X} = (x^{**}(x))_{x\in X} = G(x^{**}) \in G(\widetilde{B}_{X^*})$. ■

⟶ Άσκηση: Έστω $1<p<+\infty$ και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. Να δειχθεί ότι $\exists$ $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ τέτοιες: $\forall$ κύβο Q στον $\mathbb{R}^n$ και $\forall g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ (όπου $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$), να ισχύει ότι:

$$\frac{1}{\lambda(Q)}\int_Q f_{k_n} g\,d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \frac{1}{\lambda(Q)}\cdot\int_Q f\cdot g\,d\lambda.$$

Λίση: Θυμόμαστε ότι η $T: \left(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p\right) \longrightarrow \left(\left(L^q(\mathbb{R}^n)\right)^*, \|\cdot\|\right)$

$f \longrightarrow T_f$, όπου

$T_f(g) = \int fg\,d\lambda \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, είναι ισομετρία και επί.

Άρα, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη στον $\left(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p\right)$

$\Rightarrow$ $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη στον $\left(\left(L^q(\mathbb{R}^n)\right)^*, \|\cdot\|\right)$

$\Rightarrow$ $\exists\, M>0 : T_{f_n} \in \underbrace{\widetilde{B}_{\left(L^q(\mathbb{R}^n)\right)^*}(0, M)}_{w^*\text{-συμπαγής}}$

$\Rightarrow$ $\exists$ υπακολουθία $(T_{f_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$T_{f_{k_n}} \xrightarrow{w^*} x^*$, για κάποιο $x^* \in \left(L^q(\mathbb{R}^n)\right)^*$.

Ξέρουμε ότι $x^* = T_f$, για κάποια $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Άρα, $T_{f_{k_n}} \xrightarrow{w^*} T_f \Longrightarrow T_{f_{k_n}}(h) \longrightarrow T_f(h)$, $\forall h \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

δηλ. $\int f_{k_n} h \, d\lambda \longrightarrow \int f h \, d\lambda$, $\forall h \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Αφού $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και Q κύβο στον $\mathbb{R}^n$ η $\frac{1}{\lambda(Q)} g \chi_Q \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

προκύπτει ότι $\int f_{k_n} \frac{1}{\lambda(Q)} g \chi_Q \, d\lambda \xrightarrow{1.1} \int f \frac{1}{\lambda(Q)} g \chi_Q \, d\lambda$. ∎

⊙ Φραγμένα σύνολα στον $(X^*, \|\cdot\|)$:

→ Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, και $A \subseteq X^*$. Τότε:

Το A είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο $\iff$ $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$, $\forall x \in X$.

↓ νόρμα τελεστών

→ Απόδ: ($\Longrightarrow$) A $\|\cdot\|$ φραγμένο $\Rightarrow$ $\exists M > 0 : \|x^*\| \leq M \ \forall x^* \in A$.

Άρα, $\forall x \in X$: $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\| \ \forall x^* \in A$

$\Longrightarrow$ $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο.

($\Longleftarrow$) $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο $\forall x \in X$, δηλ.

$\forall x \in X$, ισχύει ότι $\sup\{|x^*(x)| : x^* \in A\} < +\infty$

$\Longrightarrow$ $\sup\{\|x^*\| : x^* \in A\} < +\infty$, δηλ. A $\|\cdot\|$-φραγμένο. ■

Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος
($(X, \|\cdot\|)$ Banach)

→ Πορίσματα του Θ. Alaoglu:

① Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, και $A \subseteq X^*$.
Τότε, το A είναι w^*-συμπαγές $\iff$ A w^*-κλειστό και $\|\cdot\|$-φραγμένο.

Απδ.: ($\Longrightarrow$) Έστω $A \subseteq X^*$ w^*-συμπαγές. Τότε, A w^*-κλειστό.

Επίσης, $\forall x \in X$, το $\{ x^*(x) : x^* \in A \}$ είναι φραγμένο.

Σχόλιο 1: $\{ \underbrace{x^*(x)}_{\| \; \tau(x)(x^*)} : x^* \in A \} = \tau(A)$ συμπαγές $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$, άρα φραγμένο.

τ: συνεχής: $(X^*, w^*) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$

w^*-συμπαγές $\subseteq X^*$

Σχόλιο 2: Έστω ότι το $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ είναι αφράγκτο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$

$\Longrightarrow \exists (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $|x_n^*(x)| \longrightarrow +\infty$.

Το A είναι w^*-συμπαγές $\Longrightarrow \exists (x_{k_n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_{k_n}^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$,

για κάποιο $x_0^* \in A \longrightarrow x_{k_n}^*(x) \longrightarrow x_0^*(x)$

$\longrightarrow |x_{k_n}^*(x)| \longrightarrow |x_0^*(x)| \neq +\infty$, άτοπο.

Άρα, το A είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο (καθώς $(X, \|\cdot\|)$ Banach).

($\Leftarrow$) Έστω ότι το A είναι w^*-κλειστό και $\|\cdot\|$-φραγμένο.

Τότε, $\exists\ M>0$: $A \subseteq \widetilde{B}_{X^*}(0,M) \longrightarrow A$ w^*-συμπαγές.

w^*-κλειστό

w^*-συμπαγής (Alaoglu)

■

(2) Κάθε χώρος Banach $(X, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν κλειστό υπόχωρο κάποιου $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, όπου

$$C(K) = \{ f : (K,\tau) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \text{ συνεχής} \},$$

για κάποιον (K,τ) συμπαγή χώρο Hausdorff. Συγκεκριμένα, μπορούμε να επιλέξουμε $(K,\tau) = (\widetilde{B}_{X^*}, w^*)$.

Απδ.: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ Banach. Ορίζουμε

$$T : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow \left(C(\widetilde{B}_{X^*}), \|\cdot\|_\infty \right), \text{ με}$$

$C(\widetilde{B}_{X^*})$: συνεχείς $f : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$

$$x \longrightarrow f_x := \tau(x)|_{\widetilde{B}_{X^*}}$$

$$\left(f_x(x^*) = x^*(x),\ \forall x^* \in \widetilde{B}_{X^*}\right).$$

- Η T είναι γραμμική (→ από) ισομετρία:

$$\forall x \in X,\quad \|f_x\|_\infty = \sup\left\{|f_x(x^*)| : x^* \in \widetilde{B}_{X^*}\right\}$$

$$= \sup\left\{|x^*(x)| :\ x^* \in \widetilde{B}_{X^*}\right\}$$

$$= \|x\|.$$

- $\forall x \in X$, η $f_x : \widetilde{B}_{X^*} \to \mathbb{K}$ είναι w^*-συνεχής (δηλ., πράγματι

η T είναι καλά ορισμένη, με σύνολο αφίξεως το $C(\tilde{B}_{X^*})$:

$\forall\ x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$ στην $\tilde{B}_{X^*}$, ισχύει ότι $\underbrace{x_i^*(x)}_{\| \; f_x(x_i^*)} \xrightarrow{1.1} \underbrace{x_0^*(x)}_{\| \; f_x(x_0^*)}$,

δηλ. $f_x(x_i^*) \xrightarrow{1.1} f_x(x_0^*)$. ∎

- Ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\left(C(\tilde{B}_{X^*}), \|\cdot\|_\infty\right)$:

Έστω $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, για κάποια $g: (\tilde{B}_{X^*}, w^*) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχή.

Τότε , $g \in T(X)$:

Η $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $\left(C(\widetilde{B}_{X^*}), \|\cdot\|_\infty\right)$

$\xrightarrow[\text{ισομετρία}]{T}$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(X, \|\cdot\|)$

$\xrightarrow[\text{Banach}]{(X,\|\cdot\|)}$ $\exists\ x_0 \in X$ ώστε $\underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\|\cdot\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\|Tx_n - Tx_0\|_\infty$$

δηλ. ώστε $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} Tx_0$. Ο (X^*, w^*) είναι χώρος Hausdorff,

άρα $y = Tx_0$. Άρα, $y \in T(X)$. ■

→ (X^{**}, w^*) : Υπενθυμίζουμε ότι, $\forall\ (Y, \|\cdot\|)$, η w^* είναι η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον Y^* ώστε κάθε $\tau(x) : (Y^*, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ να είναι συνεχής. Άρα, η w^*-τοπολογία στον X^{**} είναι η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X^{**} ώστε κάθε $\tau(x^*) : (X^{**}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$, με $\tau(x^*)(x^{**}) = x^{**}(x^*)\ \forall x^{**} \in X^{**}$, να είναι συνεχής. Κάθε $\tau(x^*) \in X^{***}$, και $\|\tau(x^*)\| = \|x^*\|$.

Σχηματικά:

$$(X, w) \dashrightarrow (X^*, w^*) \dashrightarrow (X^{**}, w^*) \dashrightarrow X^{***}$$

οι $\tau(x): X^* \to \mathbb{K}$,

$\tau(x)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$,

συνεχείς.

οι $\tau(x^*): X^{**} \to \mathbb{K}$,

$\tau(x^*)(x^{**}) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^{**} \in X^{**}$,

συνεχείς.

Ξέρουμε πως ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής $\iff$ η $\tau : X \hookrightarrow X^{**}$ είναι επί, δηλ. $\iff \tau(\widetilde{B_X}) = \widetilde{B_{X^{**}}}$. Το παρακάτω θεώρημα μάς λέει ότι αυτά τα σύνολα "δε διαφέρουν πολύ".

Θεώρημα Goldstine : Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Τότε, $\overline{\tau(\widetilde{B_X})}^{w^*} = \widetilde{B_{X^{**}}}$.

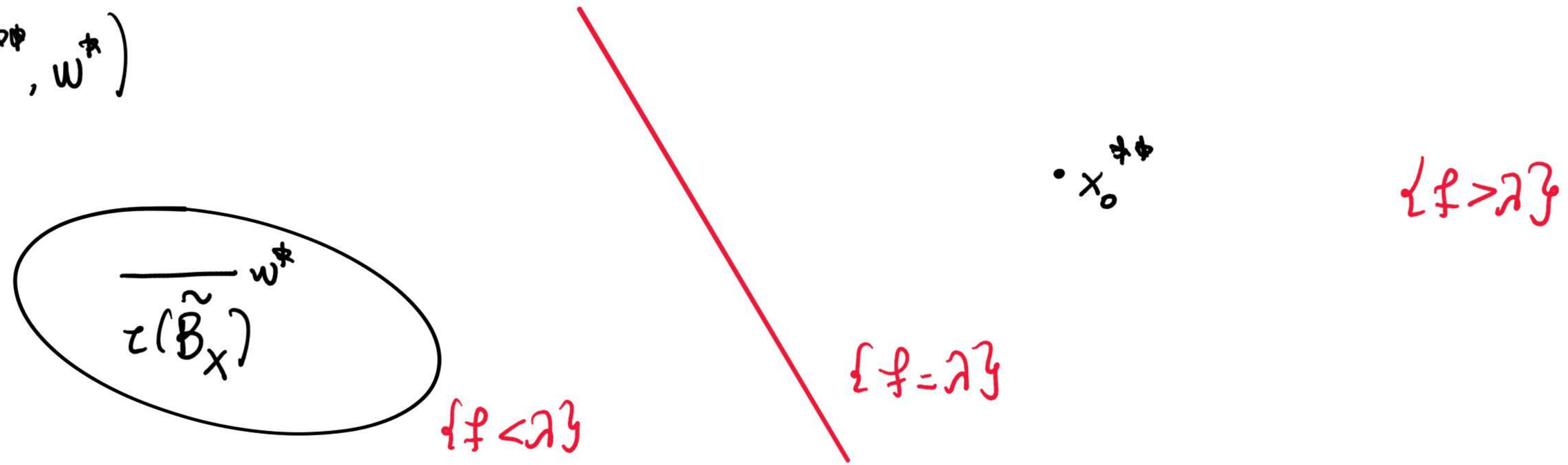
Απδδ: Η $\tau : X \to X^{**}$ είναι ισομετρία. Άρα,

$$\tau(\widetilde{B_X}) \subseteq \widetilde{B_{X^{**}}} \longrightarrow \overline{\tau(\widetilde{B_X})}^{w^*} \subseteq \widetilde{B_{X^{**}}}.$$

w^*-συμπ. (Alaoglu), άρα w^*-κλειστό

Έστω ότι $\exists\, x_0^{**} \in \widetilde{B}_{X^{**}}$ ώστε $x_0^{**} \notin \overline{\tau(\widetilde{B}_X)}^{w^*}$.

(X^{**}, w^*)



Το $\{x_0^{**}\}$ είναι w^*-συμπαγές κυρτό, και ο

∞ $\overline{\tau(\widetilde{B}_X)}^{w^*}$ είναι w^*-κλειστό κυρτό (άσκηση)

(X^{**}, w^*) είναι τοπικά κυρτός. Άρα, $\mathcal{F}$ $f \in (X^{**}, w^*)^* = \tau(X^*)$

και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{y \in \overline{\tau(B_X)}^{w^*}} f(y) < \lambda < f(x_0^{**})$$

οι συνεχείς $f:(X^{**}, w^*) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι οι υπολογισμοί σε στοιχεία του X^*.

(δηλ., ώστε η f να διαχωρίζει αυστηρά τα $\{x_0^{**}\}$, $\overline{\tau(B_X)}^{w^*}$).

Ή $x_1^* \in X^*$ ώστε $f = \tau(x_1^*)$. Επομένως, το παραπάνω $\Longrightarrow$

$$\sup_{y \in B_X} \underbrace{\tau(y)(x_1^*)}_{x_1^{**}(y)} < \lambda < x_0^{**}(x_1^*). \quad (*)$$

• Το αριστερό μέλος της (*) ισούται με $\sup_{y \in \widetilde{B}_X} x_1^{**}(y) = \|x_1^*\|$.

• Το $x_0^{**} \in \widetilde{B}_{X^{**}} \Rightarrow \|x_0^{**}\| \leq 1$.

Άρα, το δεξί μέλος της (*) είναι $\leq |x_0^{**}(x_1^*)| \leq \|x_0^{**}\| \cdot \|x_1^*\| \leq \|x_1^*\|$.

Επομένως, (ψ) $\Rightarrow \|x_1^*\| < \lambda < \|x_1^*\|$, άτοπο.

Άρα, $\overline{\tau(\widetilde{B}_X)}^{w^*} = \widetilde{B}_{X^{**}}$.

■

→ Πόρισμα: $\overline{\tau(X)}^{w^*} = X^{**}$.

Απδ.: Από Θ. Goldstine, $\overline{\tau(\tilde{B}_X(0,1))}^{w^*} = \tilde{B}_{X^{**}}(0,1)$

$\Longrightarrow \forall r>0, \quad \overline{\tau\left(\tilde{B}_X(0,r)\right)}^{w^*} = \tilde{B}_{X^{**}}(0,r)$

$$\Rightarrow \overline{\tau(X)}^{w^*} = \overline{\tau\left(\bigcup_{r>0} \tilde{B}_X(0,r)\right)}^{w^*} \supseteq \bigcup_{r>0} \overline{\tau\left(\tilde{B}_X(0,r)\right)}^{w^*}$$

$$= \bigcup_{r>0} B_{X^{**}}(0,r) = X^{**}.$$

Αφού $\overline{\tau(X)}^{w^*} \subseteq X^{**}$, έχουμε ισότητα. ∎

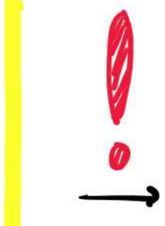
→ **Αυτοναδείς χώροι**: Με τη βοήθεια των Θ. Alaoglu και Goldstine, παίρνουμε έναν πολύ όμορφο χαρακτηρισμό των αυτοναδών χώρων. Θα μας είναι χρήσιμο το εξής:

→ Παρατήρηση: Η $\tau: (\tilde{B}_X, w) \longrightarrow (\tau(\tilde{B}_X), w^*)$ είναι ομοιομορφισμός:

Πράγματι, η τ είναι 1-1 και επί, και είναι αμφιμονοσήμαντα καθώς: $x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff \tau(x_i) \xrightarrow{w^*} \tau(x_0)$:

$$x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff \underbrace{x^*(x_i)}_{\| \; x(x_i)(x^*)} \xrightarrow{1.1} \underbrace{x^*(x_0)}_{\| \; x(x_0)(x^*)} \quad \forall x^* \in X^* \; .$$

■



→ <u>Θεώρημα</u>: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής $\iff$ η $(\tilde{B}_X, w)$ είναι συμπαγής.

<u>Απδ.:</u> Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής $\iff x(\tilde{B}_X) = \tilde{B}_{X^{**}}$. Άρα:

($\Longrightarrow$) Αν $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής, τότε $x(\tilde{B}_X) = \tilde{B}_{X^{**}}$, w^*-συμπαγής (Alaoglu)

$\Longrightarrow$ $(\tau(\widetilde{B}_X), w^*)$ συμπαγής $\xrightarrow[\text{ομοιομορφισμός}]{\tau:(X,w)\to(X^*,w^*)}$ $(\widetilde{B}_X, w)$ συμπαγής.

$(\Longleftarrow)$ Αν $(\widetilde{B}_X, w)$ συμπαγής $\xrightarrow[\text{ομοιομορφισμός}]{\tau:(X,w)\to(X^*,w^*)}$ $(\tau(\widetilde{B}_X), w^*)$ συμπαγής

$\Longrightarrow$ $\tau(\widetilde{B}_X)$ w^*-κλειστό $\Longrightarrow$ $\tau(\widetilde{B}_X) = \overline{\tau(\widetilde{B}_X)}^{w^*} \underset{\text{Goldstine}}{=\!=} \widetilde{B}_{X^{**}}$

$\Longrightarrow$ $(X, \|\cdot\|)$ ανακλαστικός.

■

→ Πορίσματα :

(1) Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής και ο $Y \leq X$ είναι κλειστός, τότε και ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής.

Απδδ: Ξέρουμε : $\widetilde{B}_X$ w-συμπαγής.

Θέλουμε : $\widetilde{B}_Y$ w-συμπαγής.

Αρκεί ΝΔΟ η $\widetilde{B}_Y$ είναι w-κλειστή στον X. Και όντως είναι:

$$\overline{\widetilde{B}_Y}^{w} \overset{\text{Mazur}}{=\!=} \overline{\widetilde{B}_Y}^{\|\cdot\|} = \widetilde{B}_Y \text{ κυρτή}$$

$$= \widetilde{B}_Y .$$

■

② Αν $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής και $x^* \in X^*$, τότε $\|x^*\| = \max\limits_{x \in S_X} |x^*(x)|$

<u>Δηλ:</u> $\left[\forall\, x^* \in X^*,\ \exists\, x_0 \in X \setminus \{0\}$ τέτοιο $|x^*(x_0)| = \|x^*\| \cdot \|x_0\| . \right]$

<u>Απδ:</u> $\|x^*\| = \sup\limits_{x \in \widetilde{B}_X} |x^*(x)|$. Η x^* είναι w-συνεχής, και η $\widetilde{B}_X$ είναι w-συμπαγής $\Big\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ το $x^*(\widetilde{B}_X)$ είναι συμπαγές $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$

$\Longrightarrow$ το $|x^*|(\widetilde{B}_X)$ είναι συμπαγές $\subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$, άρα έχει maximum.

Άρα,

$$\|x^*\| = \max_{x \in \tilde{B}_X} |x^*(x)| \overset{\substack{x^* \text{ γραμμική,} \\ \tilde{B}_X = \bigcup_{r=0}^{1} r S_X}}{=\!=\!=} \max_{x \in S_X} |x^*(x)|.$$

■

→ <u>Άσκηση</u>: Ο $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι ανακλαστικός.

<u>Λύση</u>: Θα βρούμε κάποιο $\phi \in C([0,1])^*$ με $\|\phi\| = 1$,

με την ιδιότητα ότι:

$\forall\ f \in C([0,1])$ με $\|f\|_\infty = 1$, έχουμε $\phi(f) \neq \|\phi\|$.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε $\phi : \underbrace{C([0,1])}_{\downarrow} \longrightarrow \mathbb{R}$

χβγ, υποθέτουμε ότι είναι διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$.

με $$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt.$$

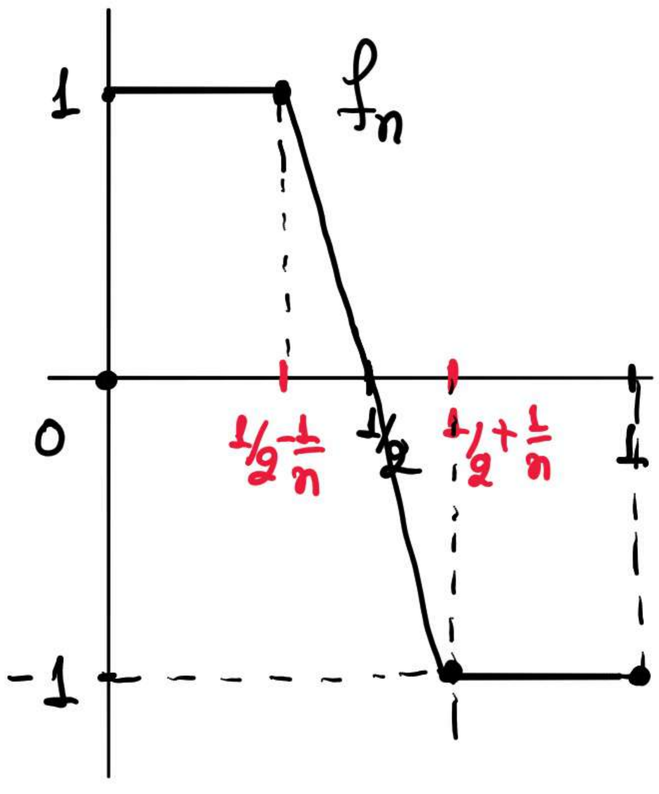
Τότε

- $\phi \in C([0,1])^*$ και $\|\phi\| = 1$: Πράγματι, η ϕ είναι γραμμική, και

$\forall\, f \in C([0,1])$ έχουμε: $$|\phi(f)| \le \int_0^{1/2} \underbrace{|f(t)|}_{\le \|f\|_\infty} dt + \int_{1/2}^{1} \underbrace{|f(t)|}_{\le \|f\|_\infty} dt \le \|f\|_\infty,$$

άρα $\|\phi\| \leq 1$. Και $\|\phi\| \geq 1$:

$\forall n \geq 2$, θεωρούμε την $f_n \in C([0,1])$ με τον εξής γράφημα:



Έχουμε ότι $\|f\|_\infty = 1$, και

$$\phi(f_n) = 1 - \frac{1}{2n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Άρα, $\|\phi\| \left(= \sup_{\substack{f \in C([0,1]) \\ \|f\|_\infty = 1}} |\phi(f)|\right)$

$$\geq |\phi(f_n)| = 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\phi\| \geq 1.$$

⊙ $\forall\ f \in C([0,1])$ με $\|f\|_\infty = 1$, έχουμε: $|\phi(f)| \leq 1$

(δηλ. $|\phi(f)| \leq \|\phi\|$).

Πράγματι, έστω $f \in C([0,1])$ με $\|f\|_\infty = 1$ ώστε $|\phi(f)| = 1$.

Θέλω $f_{|[0,1/2)} = 1$ και $f_{|(1/2,1]} = -1$, το οποίο είναι άτοπο επειδή η f είναι συνεχής.

- $f_{|[0,1/2)} = 1$: Έστω ότι $\exists\ x_0 \in [0,1/2)$ με $f(x_0) \neq 1$.

Τότε, $\exists\ c \neq 1$ και ανοιχτό διάστημα $I \subseteq [0,1/2)$ ώστε $f_{|I} \leq c$ (επειδή f συνεχής). Άρα,

$$\int_0^{1/2} f(t)dt = \int_I \underbrace{f(t)}_{\leq C} dt + \int_{[0,1/2]\setminus I} \underbrace{f(t)}_{\leq 1} dt$$

$$\leq \underbrace{C}_{\leq 1} \cdot |I| + 1 \cdot |[0,1/2]\setminus I| \leq |[0,1/2]| = 1/2.$$

Επίσης, $\int_{1/2}^1 \underbrace{f(t)}_{\geq -1} dt \geq -1/2$. Άρα,

$$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt \leq \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \text{ άτοπο.}$$

Άρα, $f_{|[0,1/2)} = 1$.

- Παράδειγμα, $f_{1\,[1/2,1]} = 1$.

■

→ **Μετρικοποιησιμότητα** : Το ερώτημα εδώ είναι αν υπάρχουν υποσύνολα ενός $(X, \|\cdot\|)$ πάνω στα οποία η w-τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη.

→ Πρόταση: Αν $\dim X = +\infty$, τότε η w-τοπολογία στον X δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

Απόδ: Έστω ότι ο (X, w) είναι μετρικοποιήσιμος.

Τότε, $\exists$ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη βάση w-περιοχών του $0 \in X$,

όπου, $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

$$U_n = \{ x\in X : |x^*(x)| < \varepsilon_n \quad \forall x^*\in D_n^* \},$$

για κάποιο $\varepsilon_n > 0$ και κάποιο <u>πεπερασμένο</u> $D_n^* \subseteq X^*$.

Περναίμε από βάση w-περ. του $0\in X$ στον X^*

Θέλω τώρα $X^* = \operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^*$, και άρα $\dim X^*$ αριθμήσιμη. Αυτό θα είναι άτοπο

$$\Big(\dim X = +\infty \Longrightarrow \dim X^* = +\infty \xrightarrow[X^* \text{ Banach}]{} \dim X^* \text{ υπεραριθμήσιμη} \Big),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Δείχνουμε λοιπόν ότι $X^* = \operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^*$:

Έστω $x_0^* \in X^*$.

Το $U := \{ x\in X : |x_0^*(x)| < 1 \}$ είναι w-περιοχή του $0\in X$

$\Longrightarrow$ $\exists\ n\in\mathbb{N}$ ώστε $U_n \subseteq X$. Δηλαδή, $\forall x\in X$,

αν $|x^*(x)| < \varepsilon_n \ \ \forall x^* \in D_n^*$, τότε $|x_0^*(x)| < 1$. Τότε:

⊙ $\forall x\in X$, $\boxed{|x_0^*(x)| \le \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \max\{|x^*(x)| : x^*\in D_n^*\}}$

$\le \boxed{\frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \sum_{x^*\in D_n^*} |x^*(x)|}$.

Πρόταση: Έστω $x \in X$.

- Αν $x_0^*(x) = 0$, είμαστε ΟΚ.
- Αν $x_0^*(x) \neq 0$, τότε $x_0^*\left(\frac{x}{x_0^*(x)}\right) = 1$, άρα $\frac{x}{x_0^*(x)} \notin V$,

άρα $\exists\, x^* \in D_n^*$ ώστε

$$\left| x^*\left(\frac{x}{x_0^*(x)}\right) \right| \geq \varepsilon_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad |x_0^*(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot |x^*(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \max\left\{ |x^*(x)| : x^* \in D_n^* \right\}.$$

⊙ Άρα, $\boxed{\bigcap_{x^* \in D_n^*} \ker x^* \subseteq \ker x_0^*}$.

Χρησιμοποιείται "υπόχεια" διότι ο χώρος είναι άφραγτος

Επομένως, $x_0^* \in \operatorname{span} D_n^*$ για αυτό το n.

Άρα, $x_0^* \in \operatorname{span} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^*$. Αφού το $x_0^* \in X^*$ ήταν τυχαίο,

$$X^* = \operatorname{span} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^* .$$

■

Άσκηση: Αν $\dim X = +\infty$ και ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι Banach, τότε ο (X^*, w^*) δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

Αν ωστόσο περιορίσουμε την προσοχή μας σε φραγμένα υποσύνολα των X, X^*, τα πράγματα αλλάζουν τελείως:

Θεώρημα 1: $(\widetilde{B}_{X^*}, w^*)$ μετρικοποιήσιμη $\iff$ $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος.

Θεώρημα 2: $(\widetilde{B}_X, w)$ μετρικοποιήσιμη $\iff$ $(X^*, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος.

Ασδ. Θ1 : ($\Longleftarrow$) Έστω ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος.

Αυτό σημαίνει ότι $\exists\ D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό $\subseteq (X, \|\cdot\|)$.

Ορίζουμε $d : \tilde{B}_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$

με $$d(x^*, y^*) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{1 + |x^*(x_n) - y^*(x_n)|}.$$

Η d είναι μετρική (άσκηση). Τονίζουμε εδώ ότι πράγματι

$d(x^*, y^*) = 0 \Longrightarrow x^* = y^*$: $d(x^*, y^*) = 0 \Longrightarrow x^*(x_n) = y^*(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{x^*, y^* \text{ συνεχείς}}$ $x^* = y^*$.

D πυκνό

Η τοπολογία στην $\tilde{B}_{X^*}$ που επάγεται από την d είναι ακριβώς αυτή που επάγεται από την w^*. Πράγματι, πρέπει ΝΔΟ,

$\forall\, U \subseteq \tilde{B}_{X^*}$, το U είναι w^*-ανοιχτό στην $\tilde{B}_{X^*}$

$\Longleftrightarrow$ είναι d-ανοιχτό.

Άρα, πρέπει ΝΔΟ η ταυτοτική απεικόνιση

$$I : (\tilde{B}_{X^*}, w^*) \longrightarrow (\tilde{B}_{X^*}, d)$$

είναι ομοιομορφισμός. Η I είναι 1-1, επί, και το πεδίο ορισμού $(\tilde{B}_{X^*}, w^*)$ είναι συμπαγές (Alaoglu). Άρα,

αρκεί ΝΔΟ η I είναι συνεχής (το ότι η I^{-1} είναι συνεχής προκύπτει αυτόματα).

Έστω λοιπόν δίκτυο $(x_i^*)_{i\in I}$ στην $\tilde{B}_{X^*}$ με

$$x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^* \text{ , για κάποιο } x_0^* \in \tilde{B}_{X^*}.$$

ΘΔΟ $x_i^* \xrightarrow{d} x_0^*$, δηλ. ότι $d(x_i^*, x_0^*) \longrightarrow 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι, για μεγάλα $i \in I$,

$$d(x_i^*, x_0^*) < \varepsilon.$$

Αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\frac{|x_i^*(x_n) - x_0^*(x_n)|}{1 + |x_i^*(x_n) - x_0^*(x_n)|}}_{\leq 1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, θέλουμε, για μεγάλα $i \in I$, να ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_i^*(x_n) - x_0^*(x_n)|}{1 + |x_i^*(x_n) - x_0^*(x_n)|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$, έχουμε ότι, $\forall n = 1, \dots, N$,

$$x_i^*(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} x_o^*(x_n)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|x_i^*(x_n) - x_o^*(x_n)|}{1 + |x_i^*(x_n) - x_o^*(x_n)|} \longrightarrow \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_i^*(x_n) - x_o^*(x_n)|}{1 + |x_i^*(x_n) - x_o^*(x_n)|} \longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot 0 = 0,$$

καθώς το
i μεγαλώνει

άρα $\exists\, i_0 \in I : \forall i \geq i_0,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_i^*(x_n) - x_0^*(x_n)|}{1 + |x_i^*(x_n) - x_0^*(x_n)|} < \frac{\varepsilon}{2}.$

($\Longrightarrow$) Έστω ότι η $(\widetilde{B}_{X^*}, w^*)$ είναι μετρικοποιήσιμη.

Τότε, $\exists\ (U_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη βάση w^*-περιοχών του $0 \in X^*$, δηλαδή, $\forall n \in \mathbb{N}$,

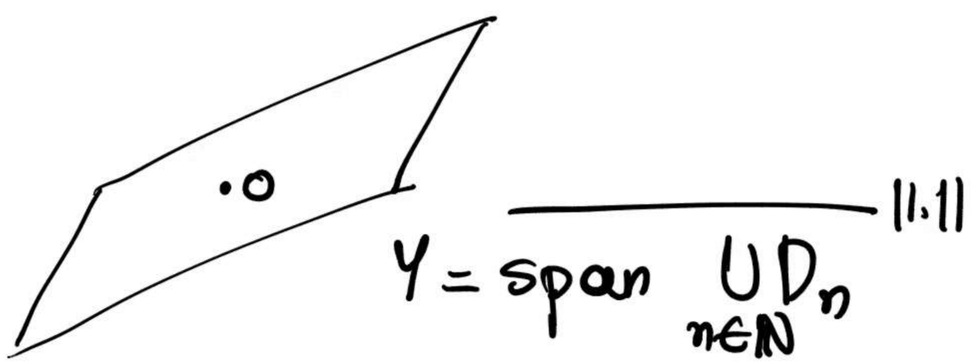
$$U_n^* = \{ x^* \in X^* : |\underbrace{x^*(x)}_{\tau(x)(x^*)}| < \varepsilon_n \quad \forall x \in D_n \},$$

για κάποιο $\varepsilon_n > 0$ και κάποιο D_n <u>πεπερασμένο</u> $\subseteq X$.

Τότε, $X = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}^{\|\cdot\|}$ (και άρα, χρησιμοποιώντας ρητούς συντελεστές στη γραμμική θήκη, παίρνουμε αριθμήσιμο, πυκνό $\subseteq (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος).

Πράγματι, ο $Y := \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}^{\|\cdot\|}$ είναι κλειστός $\leq X$.

Έστω ότι $Y \lneq X \longrightarrow \exists\, x_0 \in X \setminus Y \xrightarrow[\text{Banach}]{\text{Hahn-}}$



$\exists\ x^* \in X^*$ με:

- $\|x^*\| = 1$, άρα $x^* \neq 0$,
- $x^*|_Y = 0$, άρα $x^*|_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n} = 0$
- $x^*(x_0) = \text{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y)$.

} χρειάζομαι μόνο αυτά.

Άρα, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{ x^*(x) = 0 \quad \forall x \in D_n \} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad \{ x^*(x) < \varepsilon_n \quad \forall x \in D_n \} \Longrightarrow x^* \in U_n^*$.

Επομένως, $x^* \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n^* = \{0\}$, δηλ. $x^* = 0$.

$\{0\} \in X^*$

Άρα είναι όντως $(\|x^*\| = 1)$.

Απδ. Θ2 : $(\Longleftarrow)$ Έστω ότι ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος

$\xrightarrow{\Theta 1}$ $(\tilde{B}_{X^{**}}, w^*)$ μετρικοποιήσιμη

$\Longrightarrow$ $\left(\tau(\tilde{B}_X), w^*\right)$ μετρικοποιήσιμη

$\tau(\tilde{B}_X) \subseteq \tilde{B}_{X^{***}}$

$\tau : (\tilde{B}_X, w) \to (\tilde{B}_{X^{***}}, w^*)$

$\Longrightarrow$ $(\tilde{B}_X, w)$ μετρικοποιήσιμη.

ομοιομορφισμός

$(\Longrightarrow)$ $(\tilde{B}_X, w)$ μετρικοποιήσιμη $\Longrightarrow$ $\exists$ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη

βάση w-περιοχών του $0 \in X$, δηλ., $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \{x \in X : \underbrace{|x^*(x)|}_{\| \tau(x)(x^*) \|} < \varepsilon_n \quad \forall x^* \in D_n^* \},$$

για κάποιο $\varepsilon_n > 0$ και κάποιο D_n^* πεπερασμένο $\subseteq X^*$.

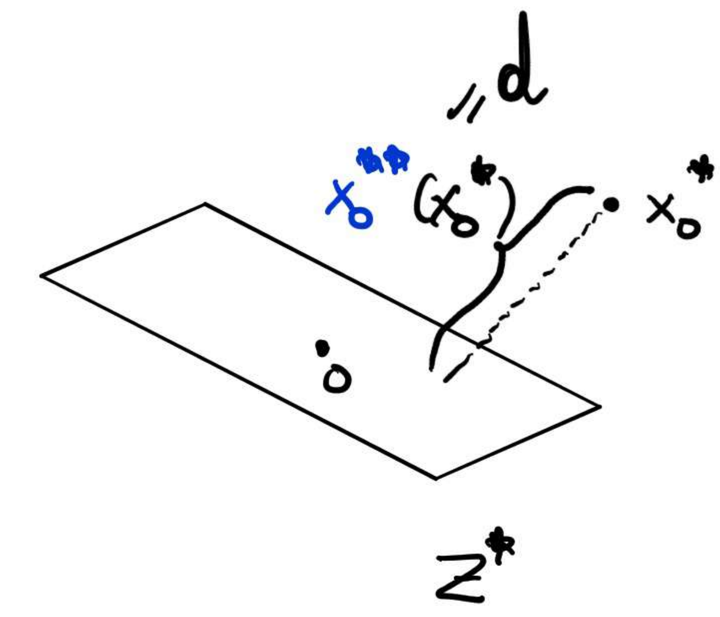
ΘΔΟ $X^* = \overline{\operatorname{span} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^*}_{=: Z^*}}^{\|\cdot\|}$ $\left(\Longrightarrow (X^*, \|\cdot\|) \text{ διαχωρίσιμος} \right)$.

Ο Z^* είναι κλειστός $\leq X^*$. Έστω ότι $Z^* \subsetneq X^*$. Τότε,

$\exists\, x_0^* \in X^*$ με $x_0^* \notin Z^*$ $\xrightarrow[\text{Banach}]{\text{Hahn-}}$

$\Longrightarrow$ $\exists\ x_0^{***} \in X^{***}$ where:

- $\|x_0^{***}\| = 1$,
- $x_0^{***}|_{Z^*} = 0$,
- $x_0^{***}(x_0^*) = d := \mathrm{dist}_{\|\cdot\|}(x_0^*, Z^*)$ (>0).



Το $x_0^{***} \in X^{***}$ $\overline{\text{Goldstine}}$ $\overline{\tau(X)}^{w^*}$.

Άρα, κάθε w^*-περιοχή του x_0^{***} περιέχει κάποιο $\tau(x)$, για κάποιο $x \in X$.

(Για άτοπο, θα δημιουργήσουμε κάποια w^*-περιοχή του x_0^{**} που δεν έχει αυτή την ιδιότητα.)

Ορίζουμε

$$W^{**} := \{ x^{**} \in X^{**} : |x^{**}(x_0^*) - \underbrace{x_0^{**}(x_0^*)}_{=d}| < \frac{d}{2} \}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^{**}(x_0^*) \in \left(\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right)$$

↓

τα x^{**} που βλέπουν το x_0^* στο περίπου όπως το βλέπει το x_0^{**}

μία w^*-περιοχή του x_0^{**} .

και, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n^{**} := \left\{ x^{**} \in X^{**} : \underbrace{|x^{**}(x^*)|}_{= |x^{**}(x^*) - x_0^{**}(x^*)|} < \varepsilon_n \ , \ \forall x^* \in D_n^* \right\},$$

$= 0$

↓

και x^{**} που βλέπουν το D_n^* περίπου όπως το βλέπει το x_0^{**}

επίσης w^*-περιοχή του x_0^{**}. Από τα παραπάνω, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\exists\, x_n \in X \text{ ώστε: } \tau(x_n) \in W^{**} \cap U_n^{**},$$

δηλ. ώστε: $\tau(x_n)(x_0^*) \in \left(\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right)$

και $|\tau(x_n)(x^*)| < \varepsilon_n, \forall x^* \in D_n^*$ }.

Ισοδύναμα: $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$x_0^*(x_n) \in \left(\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right)$

και $|x^*(x_n)| < \varepsilon_n \quad \forall\, x^* \in D_n^*$ }.

Όμως, δεν μπορεί αυτό να ισχύει $\underline{\forall}\, n \in \mathbb{N}$:

Η $W := \{ x \in X : |x_0^*(x)| < \frac{d}{2} \}$ είναι w-περιοχή του $0 \in X$,

άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $U_{n_0} \subseteq W$, δηλ. ώστε :

$\forall\, x \in X$ με $\{ |x^*(x)| < \varepsilon_{n_0} \ \forall x^* \in D_{n_0}^* \}$, έχουμε ότι

$$|x_0^*(x)| < \frac{d}{2} \Longrightarrow x_0^*(x) \notin \left(\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right).$$

Επομένως, $\nexists\, x \in X$ ώστε $\begin{cases} x_0^*(x) \in \left(\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right), \\ |x^*(x)| < \varepsilon_{n_0} \ \forall\, x^* \in D_{n_0}^* \end{cases}$ ∎

Οδηγηθήκαμε σε άτοπο (η w^* - περιοχή $U_{\eta_0}^{**} \cap W^{**}$ του x_0^{**} δεν περιέχει στοιχείο του $\varepsilon(X)$, ενώ $\overline{\varepsilon(X)}^{w^*} = X^{**}$).

Άρα, $X^* = Z^*$.

■

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο εξηγώντας ποιοί χώροι L^p είναι ανακλαστικοί.

→ Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 < p < +\infty$.
Ο $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ανακλαστικός.

Απδ.: Συμβολίζουμε $L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Πρέπει ΝΔΟ η ισομετρία

$$\tau : L^p \hookrightarrow (L^p)^{**}$$

είναι επί. Έστω $x^{**} \in (L^p)^{**}$, δηλ. $x^{**} : (L^p)^* \to \mathbb{K}$ γραμμική και συνεχής. ΘΔΟ $\exists f \in L^p$ ώστε

$$x^{**} = \tau(f),$$

δηλαδή:

$$x^{**}(x^*) = \tau(f)(x^*), \quad \forall x^* \in (L^p)^* \simeq L^q. \quad (1<p<+\infty)$$

Ξέρουμε δτ κάθε $x^* \in (L^p)^*$ είναι της μορφής T_g για κάποια $g \in L^q$ (όπου $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$), όπου $T: L^q \to (L^p)^*$

$$g \to T_g, \text{ με}$$
$$T_g(f) = \int fg\,d\mu \quad \forall f \in L^p.$$

Άρα, ψάχνουμε $f \in L^p$ ώστε $x^{**}(T_g) = \tau(f)(T_g) \quad \forall g \in L^q$,

δηλ. $x^{**} \circ T(g) = T_g(f) = \int fg\,d\mu, \forall g \in L^q$.

$L^q \xrightarrow{T} (L^p)^* \xrightarrow{x^{**}} \mathbb{K}$, άρα $x^{**} \circ T \in (L^q)^* \simeq L^p$. Επομένως,

(T: συνεχείς, γρ.) ($1<q<+\infty$)

πράγματι $\exists\, f \in L^p$ που αναπαρίσταί το $x^{**} \circ T \in (L^q)^*$, δηλ.

με $$x^{**} \circ T(g) = \int g f \, d\mu \quad \forall g \in L^q.$$

■

Τώρα συνεχίζουμε με κάποια αρνητικά αποτελέσματα, που θα στηριχτούν σε κάποιες βασικές προτάσεις.

→ Παρατήρηση: Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, τότε είναι Banach.

Απδ.: $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής ⟹ ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(X^{**}, \|\cdot\|)$, ο οποίος είναι Banach

(Ξέρουμε ότι ο $\mathcal{B}(X,Y) := \{ f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y) : f$ γραμμική και φραγμένη$\}$

είναι Banach αν ο $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι Banach. Άρα, ο

$X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{K})$ είναι Banach).

↓ Banach

Άρα, είναι Banach και ο $(X, \|\cdot\|)$. ■

→ Άσκηση: Ο $c_{00} := \{$ ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ με μόνο πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους $\}$

δεν είναι αυτοπαθής, με οποιαδήποτε νόρμα και αν εφοδιαστεί.

Λύση: $c_{00} = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$e_n := (0, \dots, 0, \underset{\text{θέση } n}{1}, 0, 0, \dots) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα, η $\dim c_{00}$ είναι άπειρη αριθμήσιμη.

Από το Θ. Baire, ο $(c_{00}, \|\cdot\|)$ δεν είναι Banach, για καμία νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00}. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|)$ δεν είναι αυτοπαθής. ■

→ Πρόταση: Αν ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος, τότε ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος.

Απδ.: Έστω $\bar{D}^*$ αριθμήσιμο και πυκνό $\subseteq (X^*, \|\cdot\|)$.

Τότε, το $D^* := \left\{ \frac{x^*}{\|x^*\|} : x^* \in \bar{D}^* \right\}$ είναι αριθμήσιμο

και πυκνό υποσύνολο της S_{X^*}.

Γράφουμε $D^* := \{ x_n^* : n \in \mathbb{N} \}$.

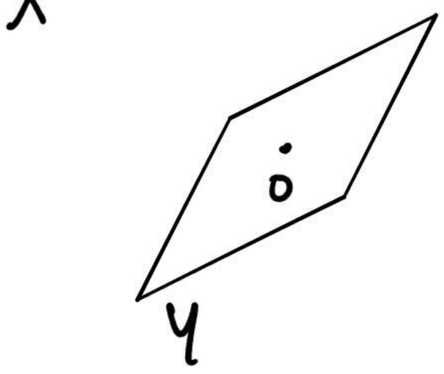
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n^*\| = 1 \longrightarrow$ $\exists\, x_n \in S_X$ ώστε $|x_n^*(x_n)| > \frac{1}{2}$.

έτσι περνάμε από τον X^* στον X

ΘΔΟ $X = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$ (και άρα ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος).

Πράγματι, έστω ότι $\exists\, x_0 \in X$ με $x_0 \notin Y := \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$.

Ο Y είναι κλειστός $\subseteq X$, άρα, από Hahn-Banach, $\exists x_0^* \in X^*$ με:



αυτά χρειάζόμαστε {
- $\|x_0^*\| = 1$, δηλ. $x_0^* \in S_{X^*}$,
- $x_0^*|_Y = 0$, άρα $x_0^*(x_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $x_0^*(x_0) = \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y)$

Το άτοπο θα προκύψει από το ότι το x_0^* βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποιο $x_n^* \in D^*$, άρα τα $\underbrace{x_0^*(x_n)}_{=0}$, $\underbrace{x_n^*(x_n)}_{>1/2}$ θα έπρεπε να είναι περίπου ίσα.

Πράγματι, αφού το D^* είναι πυκνό στην S_{X^*}, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|x_0^* - x_{n_0}^*\| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \ |\underbrace{x_0^*(x_{n_0})}_{\| \\ 0} - x_{n_0}^*(x_{n_0})| < \frac{1}{3} \Rightarrow |x_{n_0}^*(x_{n_0})| < \frac{1}{3}, \text{ άτοπο}$$

$$(\text{είναι} > \tfrac{1}{2}).$$

Άρα, $X \simeq Y$. ∎

→ Άσκηση: Ο $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ δεν είναι αυτοπαθής.

Λύση: Έστω ότι είναι. Τότε, $L^1(\mathbb{R}) \underset{\text{ισομετρικά ισόμορφος}}{\simeq} (L^1(\mathbb{R}))^{**} \simeq (L^\infty(\mathbb{R}))^*$.

Άρα, αφού ο $L^1(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος, είναι διαχωρίσιμος και ο $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$ $\xrightarrow[\text{Πρόταση}]{}$ ο $L^\infty(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο. ■

→ <u>Άσκηση:</u> Οι $L^1([a,b])$, ℓ^1 (εφοδιασμένοι με την 1-νόρμα του ο καθένας)

<u>δεν</u> είναι αυτοπαθείς.

→ <u>Πρόταση:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε:

$(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής $\iff$ $(X^*, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής.

Απδ. : ($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής

$\Longrightarrow \quad \tau(X) = X^{**}$.

Θέλουμε : $(X^*, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής, δηλαδή $\tau(X^*) = X^{***}$.

Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$, δηλ. $x_0^{***} : X^{**} \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμική και συνεχής.

Ψάχνουμε $x_0^* \in X^*$ ώστε $x_0^{***} = \tau(x_0^*)$,

δηλ. $x_0^{***}(x^{**}) = \tau(x_0^*)(x^{**}) = x^{**}(x_0^*) \quad \forall x^{**} \in X^{**} = \tau(X)$,

ισοδύναμα : $x_0^{***}(\tau(x)) = \tau(x)(x_0^*) \quad \forall x \in X$,

δηλ. : $\boxed{x_0^{***} \circ \tau(x) = x_0^*(x), \quad \forall x \in X.}$

Το x_0^{***} που ψάχνουμε είναι ακριβώς το $x_0^{***} \circ \tau$:

$$X \xrightarrow{\tau} X^{**} \xrightarrow{x_0^{***}} \mathbb{K}, \quad \text{άρα όντως } x_0^{***} \circ \tau \in X^*.$$

συνεχείς, γραμμικές

($\Longleftarrow$) Έστω ότι ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, δηλ.

$$\tau(X^*) = X^{***}.$$

Θ.Δ.Ο. ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, δηλ. ότι

$$\tau(X) = X^{**}.$$

Ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι Banach και η $\tau:(X,\|\cdot\|)\longrightarrow(X^{**},\|\cdot\|)$ είναι γραμμική ισομετρία. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι κλειστός $\leq X^{**}$:

Έστω $\tau(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0^{**}\in X^{**}$, για κάποια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X.

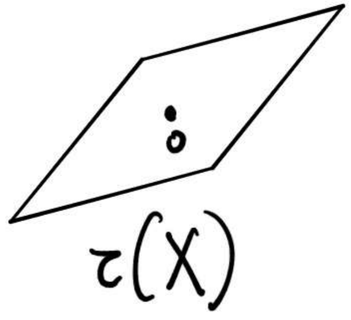
Τότε, $(\tau(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy στον $(X^{**},\|\cdot\|)$

$\xrightarrow{\tau\text{ ισομετρία}}$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy στον $(X,\|\cdot\|)$

$\xrightarrow{(X,\|\cdot\|)\text{ Banach}}$ $\exists\, x_0\in X : x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$

$\xrightarrow{\tau\text{ ισομετρία}}$ $\tau(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}\tau(x_0)$. Άρα, $x_0^{**}=\tau(x_0)\in\tau(X)$. ∎

Άρα, έστω ότι $\exists\, x_0^{**} \in X^{**}$ με $x_0^{**} \notin \underbrace{\tau(X)}_{\text{κλειστός}} \subseteq X^{**}$.



And Hahn-Banach, $\exists\, \underbrace{x_0^{***}}_{\| \cdot \|^*\text{-συνεχές, για κάποιο } x_0^* \in X^*} \in X^{***} = \tau(X^*)$, ώστε:

X^{**}

$\cdot x_0^{**}$

- $\|\tau(x_0^*)\| = 1$, δηλ. $\|x_0^*\| = 1$
- $\tau(x_0^*)|_{\tau(X)} = 0$, δηλ. $\underbrace{\tau(x_0^*)(\tau(x))}_{\tau(x)''(x_0^*) = x_0^*(x)} = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow x_0^* = 0$!
- $\tau(x_0^*)\left(x_0^{**}\right) > 0$.

Αυτό είναι άτοπο, καθώς είναι αδύνατον να ισχύει ότι

$$x_0^{\Phi} = 0 \quad \text{και} \quad \|x_0^{\Phi}\| = 1.$$

Άρα, $X^{\Phi\Phi} = \tau(X^*)$. ∎

⟶ Άσκηση: Ο $\left(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ δεν είναι αυτοπαθής.

Λύση: $L^\infty(\mathbb{R}) \simeq \left(L^1(\mathbb{R})\right)^*$. Άρα, αν ο $\left(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ ήταν αυτοπαθής, τότε θα ήταν αυτοπαθής και ο $\left(\left(L^1(\mathbb{R})\right)^*, \|\cdot\|\right)$

⟶ Πρόταση θα ήταν αυτοπαθής και ο $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$, που δεν ισχύει (τελευταία άσκηση). ∎

→ **Krein - Milman** :

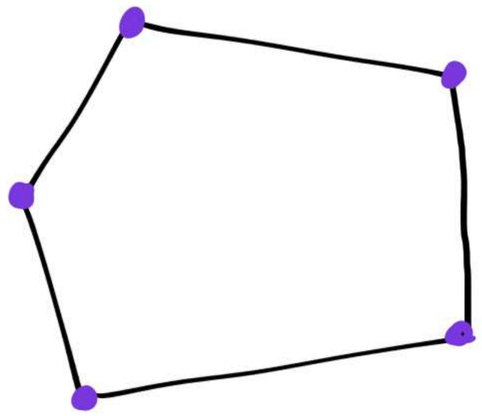
→ Ορισμός : Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, και K κυρτό $\subseteq X$.

(α) Ένα $x \in K$ λέγεται ακραίο σημείο του K αν δεν είναι εσωτερικό σημείο ευθύγραμμου τμήματος μέσα στο K (δηλ. αν δεν υλοποιείται ως κυρτός συνδυασμός σημείων του $K \setminus \{x\}$). Δηλ. αν:

$$\forall\ y, z \in K \text{ και } \lambda \in (0,1) \text{ με } x = \lambda y + (1-\lambda) z, \text{ έχουμε : } y = z = x.$$

Συμβολίζουμε: $ex(K) := \{\text{ακραία σημεία του } K\}$.

π.χ.

$K =$ 

Αν το K είναι κυρτό πολύγωνο, τότε $ex(K) =$ το σύνολο των κορυφών του K.

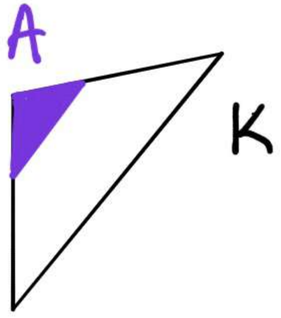
(β) Έστω $A \subseteq K$. Το A λέγεται ακραίο υποσύνολο του K αν:

$\forall\, x \in A$ και $\forall\, y, z \in K$ και $\lambda \in (0,1)$ με $x = \lambda y + (1-\lambda) z$,

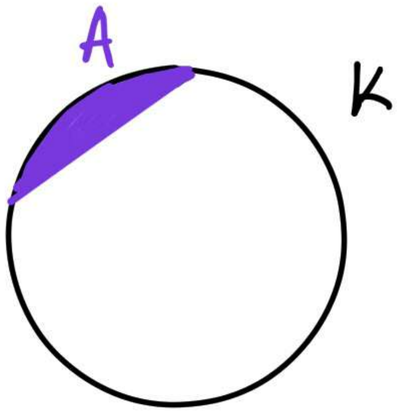
έχουμε : $y, z \in A$.

⚠ x ακραίο σημείο του $K \iff \{x\}$ ακραίο υποσύνολο του K.

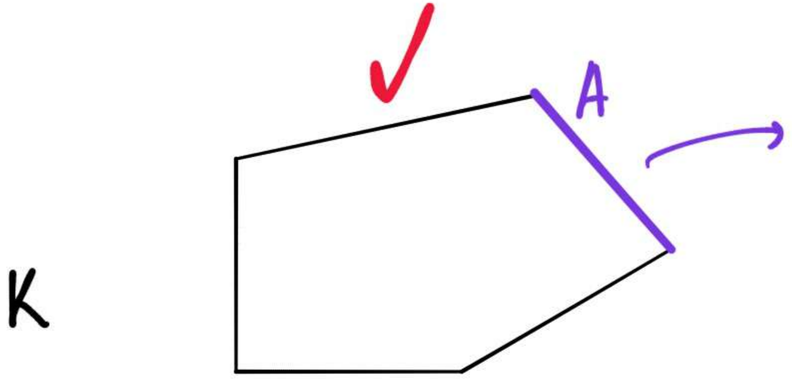
π.χ. :



όχι ακραίο $\subseteq K$



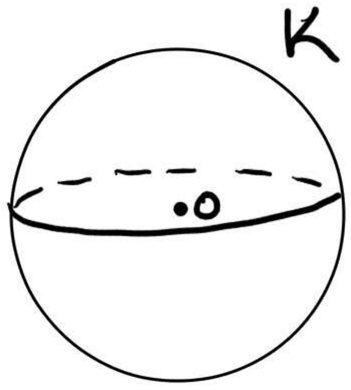
όχι ακραίο $\subseteq K$.



κάθε ακμή ενός κυρτού πολυγώνου K είναι ακραίο $\subseteq K$.

→ Παρατηρήσεις:

⊙ Στον $\mathbb{R}^n$, για $K := \widetilde{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$ έχουμε: $ex(K) = S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$.



⊙ Η $(X, \|\cdot\|)$, η S_X είναι ακραίο υποσύνολο της $\widetilde{B}_X$:

Έστω $x \in S_X$ και $y, z \in \widetilde{B}_X$, $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda) z$.

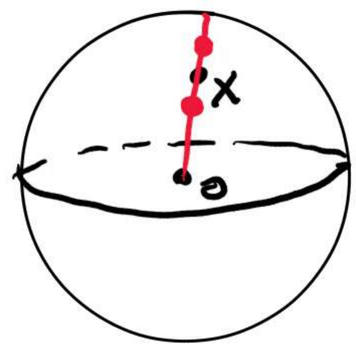
Τότε, $1 = \|x\| \leq \lambda \underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + (1-\lambda) \underbrace{\|z\|}_{\leq 1} \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$,

άρα έχουμε ισότητα παντού: $\|y\| = \|z\| = 1$, δηλ. $y, z \in S_X$.

⊙ $\forall\ (X, \|\cdot\|)$, $\mathrm{ex}(\tilde{B}_X) \subseteq S_X$:

Έστω $x \in \tilde{B}_X \setminus S_X$, δηλ. $\|x\| < 1$. Τότε, το x δεν είναι ακραίο σημείο της $\tilde{B}_X$: Για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$, $\|(1-\varepsilon)x\| = (1-\varepsilon)\|x\| < 1$

και $\|(1+\varepsilon)x\| = (1+\varepsilon)\|x\| < 1$,



δηλ. $(1-\varepsilon)x,\ (1+\varepsilon)x \in \tilde{B}_X \setminus S_X$, και $x = \dfrac{(1-\varepsilon)x + (1+\varepsilon)x}{2}$,

κυρτός συνδυασμός των $(1-\varepsilon)x$, $(1+\varepsilon)x$.

⊙ Υπάρχουν περιπτώσεις $(X, \|\cdot\|)$ όπου $ex(\tilde{B}_X) = \emptyset$:

⟶ Παράδειγμα 1 : Ο $(X, \|\cdot\|) = (L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ικανοποιεί :

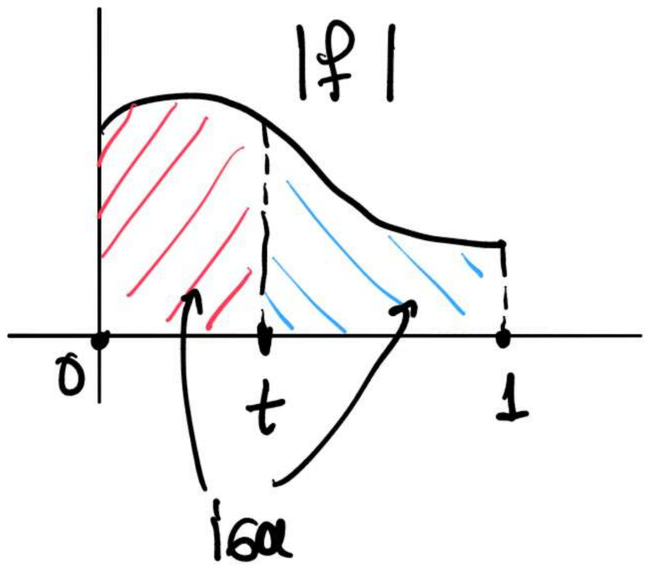
$$ex(\tilde{B}_X) = \emptyset.$$

Πράγματι: Ξέρουμε ότι $ex(\tilde{B}_X) \subseteq S_X$. Έστω λοιπόν $f \in S_X$,

δηλ. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| d\lambda(x) = 1$. Θα βρούμε $g, h \in S_X (\subseteq \tilde{B}_X)$, με

$g, h \neq f$, ώστε $f = \frac{g+h}{2}$:

Έστω $t \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\int_0^t |f(x)|\,d\lambda(x) = \int_t^1 |f(x)|\,d\lambda(x) = \frac{\|f\|_1}{2} = \frac{1}{2}$.



Ορίζουμε $g := 2 f_{|[0,t]}$ και $h := 2 f_{|[t,1]}$ έχουμε:

$$\|g\|_1 = \|h\|_1 = 1, \quad g, h \neq f \text{ και } f = \frac{g+h}{2}.$$

Δηλ., η f είναι κυρτός συνδυασμός δύο στοιχείων της $\widetilde{B}_X$ διαφορετικών από την f. Άρα, $f \notin ex(\widetilde{B}_X)$. Άρα, $ex(\widetilde{B}_X) = \emptyset$. ∎

→ Παράδειγμα 2 : Ορίζουμε $c_0 := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \}$.

Ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, όπου, $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$,

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Ισχύει ότι: $ex(\tilde{B}_{c_0}) = \emptyset$.

Λύση: Ξέρουμε ότι $ex(\tilde{B}_{c_0}) \subseteq S_{c_0}$. Έστω λοιπόν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{c_0}$. ΘΔΟ $x \notin ex(\tilde{B}_{c_0})$:

$\|x\|_\infty = 1$, άρα $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_0}| = 1$.

Επίσης, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, άρα $\exists\ n_1 > n_2$ ώστε $|x_{n_1}| < \frac{1}{2}$.

Ορίζουμε:

$$y = \left(x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} + \frac{1}{3}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\right),$$

$$z = \left(x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} - \frac{1}{3}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\right).$$

Τότε, $\|y\|_\infty = \|z\|_\infty = |x_{n_0}| = 1$, άρα $y, z \in \tilde{B}_{C_0}$, $y, z \neq x$,

και $x = \frac{y+z}{2}$. Άρα, $x \notin \tilde{B}_{C_0}$. Άρα, $\mathrm{ex}(\tilde{B}_{C_0}) = \emptyset$. ∎