① Άλγεβρα ΙΙ Μάθημα 23ο.

Συνέχεια αποδείξεως

(δ). Το δεξί R-πρότ. J είναι απλό. Θδο J είναι πιστό.

Έστω ότι $\exists\, r \in R \setminus \{0\} : Jr = 0$.

$\Rightarrow RJRr = 0$.

$$(RJRr)M = (RJ)(\underbrace{RrM}_{\text{απλό πιστό}}) = RJM = 0 \quad \text{άτοπο}$$

γιατί $RJ \neq 0$. □

Πόρισμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα δακτύλιο R:

(α) R είναι αριστ. primitive και έχει ελαχιστικό αρ. ιδ.

(β) R είναι δεξιά primitive και έχει ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες.

Παράδειγμα: Ο $R = End_F V$ είναι κάθε (2) δεξιά primitive. Αρκεί ν.δ.ο. έχει ελάχιστο ιδεώδες. (αριστ.) Αν $v \in V \setminus \{0\}$ θεωρούμε $\mathcal{U} \leq V$ δ. υπόχωρο τ.ω.

$$V = \langle v \rangle \oplus \mathcal{U}.$$

$\Rightarrow I = \{ \varphi \in R \mid \varphi|_{\mathcal{U}} = 0 \}$ είναι ελαχιστικό

Υπενθύμιση: (αρχική τοπολογία)

X σύνολο $\{X_i\}_{i \in I}$ τ.χ., $f_i : X \to X_i$

Ορσ.: Αρχική τοπολογία στο X για την $\{f_i\}_{i \in I}$ είναι η μικρότερη τοπολογία για την οποία όλες οι f_i είναι συνεχείς.

Ισχύει ότι: για ένα δίκτυο $x_\lambda \to x$

$\Leftrightarrow f_i(x_\lambda) \to f_i(x), \ \forall i \in I.$

Ειδικές Περιπτώσεις:

(α) Τοπολογία γινόμενο είναι η αρχική των προβολών.

(β) Η τοπολογία υπόχωρου $X \subseteq Y$ είναι η αρχική του.

εγκλεισμού $X \hookrightarrow I^{\cdot}$.

Παραδείγματα:

(α) F τοπολογικό σώμα και V τοπ.

F-δχ ms

$V^* = \{ f: V \to F \mid f$ συνεχής $\} \subseteq F^V$.

(ασθενής δυϊκός του V.)

(β) k δακτύλιος, M, N δύο k-mod

τότε, θεωρούμε το $Hom_k(M,N)$

και παρατηρούμε ότι

$$Hom_k(M,N) \subseteq N^M.$$

Εφοδιάζοντας το N με τη διακρι-

τή τοπολογία και το N^M με τη

τοπολογία. το $Hom_k(M,N)$ είναι

κλειστός υπόχωρος.

Πράγματι, έστω. $\{f_\lambda\}_\lambda$ δίκτυο

στο $Hom_k(M,N)$ και $f \in N^M$

ώστε $\lim_\lambda f_\lambda = f$. Θ.δ.ο.

Θ.δ.ο. (4)

$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(rx) = r f(x)$.

Σταθ. $x, y \in \mathcal{M}$, $r \in K$.

Είναι $\lim f_\lambda = f$ (και $\mathcal{N}$ εσωδ. (*)2 με την διακριτική τοπολογία)

$\Rightarrow f_\lambda(x) \longrightarrow f(x)$ στον $\mathcal{N}$

Από (*)1 υπάρχει:

$\lambda_1 \in \Lambda : f_\lambda(x) = f(x), \ \forall \lambda \succ \lambda_1$.

$\lambda_2 \in \Lambda : f_\lambda(y) = f(y), \ \forall \lambda \succ \lambda_2$.

$\lambda_3 \in \Lambda : f_\lambda(x+y) = f(x+y), \ \forall \lambda \succ \lambda_3$.

$\lambda_4 \in \Lambda : f_\lambda(rx) = f(rx)$

Αν $\lambda_0 \succ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ τότε:

- $f(x+y) = f_{\lambda_0}(x+y) = f_{\lambda_0}(x) + f_{\lambda_0}(y)$

$= f(x) + f(y)$

- $f(rx) = f_{\lambda_0}(rx) = r\, f_{\lambda_0}(x) = r f(x)$.

Παρατήρηση: Αν το K πρότυπο M είναι π.π. τότε η τοπολογία στο $Hom_K(M,N)$ είναι η διακριτή.

Θ.δ.ο. $\{\varphi\}$ ανοιχτό, $\forall\, \varphi \in Hom_K(M,N)$.

Έστω $M = \sum_{i=1}^{n} K m_i$. Τότε είναι

$$Hom_K(M,N) \cap \left[\{ g \in N^M \mid g(m_i) = \varphi(m_i)\ \forall i \} \right] = \{\varphi\}.$$

Παρατήρηση: Το $X \subseteq Hom_K(M,N)$ είναι πυκνό $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varphi \in Hom_K$ και για κάθε $m_1, \dots, m_n \in M$: $\exists\, g \in X$: $g(m_i) = \varphi(m_i)$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

Παράδειγμα: F σώμα και $V = \bigoplus_{\mathbb{N}} F$. $R = End_F(V)$ και I το ιδεώδες.

$$I = \{ \varphi \in R \mid rank(\varphi) < \infty \}.$$

Το $\mathcal{F}$ είναι πυκνό. ⑥

Πράγματι, $\forall u: V \to V$, $\{v_1 \ldots v_n\} \subseteq V$ υπάρχει $\varphi \in \mathcal{F}$: $\varphi(v_i) = u(v_i)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\overline{\mathbb{Q}}$ η αλγεβρική θήκη του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{C}$ και $G = \{\varphi: \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}} \mid \varphi \text{ ομομ. δακτυλίων}\}$

$= Hom_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}) = Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. □

<u>Στόχος</u>: R δακτύλιος, V ημιαπλό R-πρ. και $K = End_R V \subseteq End(V,+)$

άρα V είναι K-πρότυπο, άρα ορίζουμε $E = End_K(V) \subseteq End(V,+)$.

άρα V είναι E-πρότυπο.

<u>Τότε</u> $U \subseteq V$ R-υποπρ $\Leftrightarrow$ $U \subseteq V$ E-υποπρ

- Έστω ότι V πιστό R-πρ., $S = End(V,+)$

$e: R \to End(V,+) \Rightarrow K = (e(R))' = \{s \in S \mid e(r) \circ s = s \circ e(r)\ \forall r\}$

- $E = K' = R''$ (διμεταθέτης) $\Rightarrow R \subseteq R'' \subseteq E$