Primitive Δακτύλιοι:

R δακτύλιος, M R-πρότυπο.

$\rho: R \to \mathrm{End}(M,+)$

<u>Ορσ</u>: $\mathrm{ann}_R(M) = \ker\rho = \{r \in R \mid rx = 0 \ \forall M \ni x\}$.

(ιδεώδες του R.)

Το M λέγεται <u>πιστό</u> αν $\mathrm{ann}_R M = 0$.

<u>Ορσ</u>: Αν I αρ. ιδεωδ. $\subseteq R$, M ένα R-πρότυπο τότε $IM = \{\sum r_i m_i \mid r_i \in I, m_i \in M\}$.

$\leq M$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\mathrm{rad}(R) = 0 \Leftarrow$ υπάρχει πιστό ημιαπλό R-πρότυπο.

($\Leftarrow$) Θεωρώ ένα σύνολο αντιπροσώπων όλων των απλών R-προτύπων $(M_\lambda)_\lambda$ και θέτω $M = \bigoplus_\lambda M_\lambda$.

(ημιαπλό) Αν $r \in R$: $rM = 0 \Rightarrow$

$r M_\lambda = 0 \ \forall \lambda \Rightarrow r \in \mathrm{ann}_R N_\lambda \ \forall \lambda$. ②

για κάθε απλό R-πρότυπο

Άρα, $r \in \mathrm{rad}(R) = 0$.

($\Leftarrow$) Έστω M ημιαπλό πιστό R-

$\bigcap \mathrm{ann}_R M = 0$.

πρ., $r \in \mathrm{rad}(R) = \bigcap\limits_{\substack{M \text{ ημιαπλό} \\ R\text{-πρ.}}}$

<u>Ορσ</u>: Ο δακτύλιος R καλείται <u>αριστερά primitive</u> αν υπάρχει ένα πιστό απλό R-πρότυπο M.

- Το ιδ. $I \subseteq R$ καλείται <u>αριστερά primitive</u> αν R/I είναι αριστερά primitive.

<u>Παρατηρήσεις</u>: (1) Το ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι αρ. primitive αν $I = \mathrm{ann}_R(M)$ για κάποιο απλό R-πρ. M.

<u>αποδ</u> $(\Rightarrow)$ $\frac{R}{I}$ αρ. primitive. $\Rightarrow$

υπαρχει ενα πιστό απλό $\frac{R}{I}$-πρ. M

$\Rightarrow$ $\rho : \frac{R}{I} \longrightarrow \mathrm{End}(M,+)$ και ομομ.

η σύνθεση $R \xrightarrow{\pi} R/I \hookrightarrow \mathrm{End}(M,+)$

δίνει στο M δομή R-προτύπου.

και $\mathrm{ann}_R(M) = I$.

$(\Leftarrow)$. αν $I = \mathrm{ann}_R(M)$ για κάποιο

απλό R-προτ. M. $\ker \xi_1$ $\ker e$

$R \xrightarrow{e} \mathrm{End}_R(M)$ (1ο θεωρ. ισομ.)

$\downarrow$ $\bar{e}$ $\Rightarrow \ker \bar{e} = 0$.

R/I

(ii) $\mathrm{rad}(R) = \bigcap \{ \mathrm{ann}_R M \mid M$ απλό R-πρ. $\}$.

$= \bigcap \{ I \mid I \subseteq R$ είναι ένα ιδεώδ. που είναι αρ. primitive $\}$.

(i)

<u>Παραδείγματα:</u>

$\{$αρ. primitive δακτ.$\} \neq \{$δεξιά primitive δακτ.$\}$.

(ii) Οι μεταθετικοί primitive δακτύλιοι είναι ακριβώς τα σώματα.

Πράγματι, αν ο R είναι μεταθ. και primitive, θεωρ. ένα πιστό R-πρ. M. $M \simeq R/m$, m μεγιστικό ιδεώδες. m

$\operatorname{ann}_R M = \operatorname{ann}_R (R/m) = m = 0$.

$\Rightarrow R$ είναι σώμα.

(iii) Αν ο R είναι αρ. primitive

$\Rightarrow \operatorname{rad}(R) = 0$.

(iv) Θεωρώ σώμα F και F-δχ V.

$\Rightarrow \operatorname{End}_F V = R$ είναι αριστερά primitive.

Πράγματι, η αβελιανή $(V,+)$ είναι με το φυσιολογικό τρόπο ένα R-πρ. $(\varphi . v = \varphi(v))$ το οποίο είναι πιστό και απλό.

(v) R είναι απλός, τότε R αρ. primitive.

M απλό R-πρ. Η κανονική απεικ. $e: R \to End(M, +)$ έχει επιπλέον $\ker e = 0 \Rightarrow M$ πιστό.

<u>Σχόλιος:</u> R αρ. Artin, αρ. primitive $\Rightarrow R$ απλός.

<u>Πρόταση:</u> Έστω R αρ. primitive αριστερά δακτύλιος και $I \subseteq R$ ελαχιστικά αρ. ιδεώδες. Τότε:

(i) $Re = I$, e κάποιο ταυτοδύναμο (και άρα επιδέχεται $R = I \oplus I'$ για κάποιο $I' \subseteq R$ αρ. ιδ.).

(ii) Το I είναι πιστό αρ. και κάθε απλό και πιστό R-πρ. M είναι ισόμορφο με το I.

(iii) υπάρχει ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες $J \subseteq R$.

(iv) R είναι δεξιά primitive. ⑥

<u>απόδειξη</u>: M απλό, πιστό R-πρ.

(i) υπάρχει $a \in I$: $Ia \neq 0$.

Πραγματι, αν $I^2 = 0$, τότε $I^2 M = 0$

$= I(\underbrace{IM}_{=M}) = IM = M$. $\boxed{\text{άτοπο}}$

αφού M πιστό και I ελαχιστό

Ia αρ. ιδεωδ. του R $\subseteq I$

$\neq 0$

$\Rightarrow Ia = I \Rightarrow$ υπάρχει $e \in I$:

$ea = a$. Παρατηρώ ότι

$ea = e^2 a \Rightarrow a = e^2 a \Rightarrow (e^2 - e)a = 0$

Έστω $J = \{x \in I \mid xa = 0\} \subseteq R$

αρ. ιδεωδ. $R \Rightarrow J = 0$ ή $J = I$

Όμως, $e \in I \setminus J \Rightarrow J = 0$.

Όμως $e^2 - e \in J \Rightarrow \boxed{e^2 = e}$

Από τον ελαχιστικό χαρακτήρα

του I: $I = Re$.

Είναι ευκολο $R = Re \oplus R(1-e)$ ⊕ $\underbrace{\ }_{I}$.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $r \in R$ και $r I = 0 \Rightarrow r I M = 0 = r(\underbrace{IM}_{M}) = rM$.

$\Rightarrow \mathrm{ann}_R(M) = 0 \ni r$ άτοπο.

Συνεπώς, I είναι πιστό απλό R-πρ.

Εστω M' ένα πιστό απλό R-πρ.

και άρα υπάρχει $x \in M'$

$I M' = M' \neq 0$

με $I x \neq 0 \subseteq M'$

$\varphi : I \to M'$, $\varphi(r) = r x \in M'$

για κάθε $r \in I$ είναι R-ομ.

$\mathrm{Im}\,\varphi = I x \neq 0 \xrightarrow[\text{Schur}]{\text{απλότητα}} \varphi$ ισομορφ.

(iii) Θεωρώ $a \in I$, $a \neq 0 \Rightarrow$

$I = Ra$. Ο.δ.ο. $J = aR$ είναι

ελαχιστικό ~~δεξιό~~ ιδεώδες.

δεξιό

Δηλ. $\forall r \in R$: $a_n r \neq 0 \Rightarrow J = a_n R$ (⊗)

$J \overset{⊗}{=} a_n R$. Για την ⊗, αρκεί νδο.

$a \in a_n R$.

Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει $s \in R$:

$a_n s a_n \neq 0$. (αν $a_n R a_n = 0$.

$\Rightarrow 0 = 0\mathcal{M} = (a_n R a_n)\mathcal{M}$

$= a_n[(R a_n)\mathcal{M}] = a_n \mathcal{M}$ $\boxed{\text{άτοπο}}$)

Θεωρώ την $g: Ra \to Ra$ με

$g(x) = rsa$. Η g είναι R-γραμμ.

και $g(a) \neq 0$. Από το Λήμμα

του Schur είναι η g ισομορφισμός

Υπολογίζω: $a = g^{-1}(g(a)) =$

$= g^{-1}(a_n s a) = a_n s\, g^{-1}(a) \in a_n R$.

□.