Μάθημα 18. Άλγεβρα ΙΙ.

$|G| < \infty \Rightarrow$

$\{$κλάσεις ισομορφίας των 1-διάστατων $\mathbb{C}$-αναπαραστάσεων της $G\} \longleftrightarrow$

$\hat{G}_{ab} \simeq G_{ab}$.

<u>Παρατήρηση</u>. Κάθε μονοδιάστατη αναπαράσταση είναι ανάγωγη, δηλ. το αντίστοιχο $\mathbb{C}G$-πρότυπο είναι απλό.)

<u>Πρόταση</u>: Έστω G αβελιανή και V ένα απλό $\mathbb{C}G$-πρ. με $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$.

<u>απόδειξη</u>: Έστω $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$ μια ιδιοτιμή της $\mathbb{C}$-γρ. $\rho(g) : V \to V$.

Ο $V_\lambda = \{v \in V \mid \rho(g)(v) = \lambda v\} \neq 0$ G-αναλλοίωτος υπόχωρος του V,

—

Πράγματι, έστω $u \in G$, $v \in U_\lambda$, g

$\Rightarrow g\cdot(uv) = (gu)\cdot v \overset{G\ \alpha\beta\varepsilon\lambda}{=\!=\!=} u(g\cdot v)$

$= u(\lambda v) = \lambda(uv)$.

$\xRightarrow{U-\alpha\pi\lambda\acute{o}}$ $\underline{U_\lambda = U}$.

Άρα $\forall g \in G$, $\exists\, \lambda(g) \in \mathbb{C}$: $\boxed{g\cdot v = \lambda_g v}$ $\in U$

$\Rightarrow$ κάθε $\mathbb{C}$-δχ. $U \subseteq V$ είναι

G-αναλλοίωτος $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} U = 1$.

<u>Παράδειγμα</u>:

(α) ανάγωγες αναπαραστάσεις της

$G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$

Αναζητώ ομομορφισμούς ομάδων

$\rho: \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C}^*$, δηλαδή

ζεύγη ομομορφισμών $\rho_1: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$

$\rho_2: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C}^*$ $\left(\rho(x,y) = \rho_1(x)\cdot\rho_2(y)\right)$

Κατασκευάζω τον πίνακα των χαρακτήρων.

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
x_1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$
x_3	1							
x_4	1							
x_5	1							
x_6	1							
x_7	1							
x_8	1	$-i$	-1	i	-1	i	1	$-i$

3

$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto i$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto -1$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto -i$
$1 \mapsto -1$	$1 \mapsto 1$
$1 \mapsto -1$	$1 \mapsto i$
$1 \mapsto -1$	$1 \mapsto -1$
$1 \mapsto -1$	$1 \mapsto -i$

(8) $G = S_3$

$= \langle (12), (123) \rangle$

$= \langle a, b \mid a^2, b^2, abab \rangle$

1-διάστατες αναπαρ. της S_3:

$(S_3)_{ab} = \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^2 = aba^{-1}b^{-1} \rangle$

$= \langle a \mid a^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$.

[Πράγματι $(123) \in DS_3$ μιας και

$$= \underbrace{(12)(13)}_{(23)}(12)(13) = (123)$$

Συνεπώς υπάρχουν 2 ομομορφισμοί $e : S_3 \to \mathbb{C}^*$, $e(12) = 1$, $e(123) = 1$

$e(12) = -1$

$e(123) = 1$.

Πίνακες Χαρακτήρων

	1	(12)	(123)	(όσες τις κλάσεις συζυγίας)
χ_1	1	1	1	→ τετρ.
			1	→ αντιπροσωπο.
χ_2	1	-1		
χ	2	0	-1	

$$\mathbb{C}S_3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_n(D) \times \dots$$

$\chi_1 \quad \chi_2 \qquad M_n(D) \cong D^n$

$*$: $D = \mathbb{C}$.

$\dim_{\mathbb{C}} D^n = \dim_{\mathbb{C}} M_n(D) = n^2$

άρα λείπει μια 2-διάστατη ανάγωγη αναπαράσταση.

• Η S_3 δρα σιον $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$ (S)

με τον συνήθη τρόπο.

Ο δχ. $U = \mathbb{C}(e_1+e_2+e_3)$ είναι

S_3-αναλλοίωτος, οπότε μπορώ να

θεωρήσω το $\mathbb{C}S_3$-πρ. $V = \frac{\mathbb{C}^3}{U}$.

$V = \mathbb{C}\bar{e}_1 \oplus \mathbb{C}\bar{e}_2 \oplus \mathbb{C}\bar{e}_3 = \mathbb{C}\bar{e}_1 \oplus \mathbb{C}\bar{e}_2$

$(\bar{e}_3 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$. Ο ομομορφ:

$\varrho : G \longrightarrow GL_2(V) \simeq GL_2(\mathbb{C})$ είναι

$(12) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(123) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$: $\chi_V((12)) = 0$

$\chi_V((123)) = -1$

Ισχυρισμός: Το $\mathbb{C}S_3$-πρ. V

είναι απλό

απόδειξω: Είναι $\chi_V \neq 2\chi_1$

$\chi_V \neq 2\chi_2$, $\chi_V \neq \chi_1 + \chi_2$

Εναλλακτικός Ορισμός του χ. (6)

Είναι $S_3 \cong D_3$ όπου

$D_3 = \langle r, s \mid r^3, s^2, srsr \rangle$.

η φυσιολογική 2-αναπαρ. της D_3

$\sigma: S_3 \cong D_3 \to GL_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{C})$

$r \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(γ) $G = A_4 \quad (|G| = 12)$

$A_4 = \langle (12)(34), (123) \rangle = \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^3 \rangle$

$(A_4)_{ab} = \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$

$= \langle b \mid b^3 \rangle = \mathbb{Z}_3$.

Όπως αναφέραμε καθώς

$DA_4 = V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$= \langle a \rangle$, καθώς $(12)(34)$

$= (123)(124)(123)^{-1}(124)^{-1} \in DA_4$

Καθώς $(A_4)_{ab} \cong \mathbb{Z}_3$ υπάρχουν (7)

ακριβώς 3 1-αναπαραστάσεις

$\rho: A_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*$: $\rho_1\,(12)(34) = 1$

$\rho_1\,(123) = 1$

$\rho_2\,(12)(34) = 1$, $\rho_3\,(12)(34) = 1$

$\rho_2\,(123) = \omega$ $\rho_3\,(123) = \omega^2$.

Πίνακας Χαρακτήρων:

	1	$(12)(34)$	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω

Από το Θεώρημα Maschke

$$\mathbb{C}A_4 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_3(\mathbb{C}).$$

Άρα υπάρχει μία 3-ανάγωγη

αναπαράσταση.