Μάθημα 15ο 24/04/2023

Αναπαραστάσεις Ομάδων.

k μεταθετικός, G ομάδα.

kG δακτύλιος της G με συντ. από το k.

$k \subseteq kG$ υποδακτύλιος

$G \subseteq U(kG)$.

Παρατήρηση: Αν R δακτύλιος και $\varphi : kG \to R$ ομομορφισμός, τότε ορίζονται τα εξής:

① $\varphi|_k : k \to R$ (ομομορφισμός δακτ.)

② $\varphi|_G : G \to U(R)$ ομομορφ. ομάδων.

Καθώς $\lambda \cdot g = g \cdot \lambda$, $\forall \lambda \in k, \forall g \in G$ οι εικόνες $\varphi(k) \subseteq R$, $\varphi(G) \subseteq R$ μετατίθενται κατά σημείο

Αντίστροφα, $\varphi_1 : k \to R$ ομομορφ. δ. και $\varphi_2 : G \to U(R)$ ομομορφ. ομ. έτσι ώστε $\varphi_1(\lambda) \cdot \varphi_2(g) = \varphi_2(g)\varphi_1(\lambda)$.

$\forall \lambda \in k, \forall g \in G$, ορίζεται η απ.

$\varphi : kG \to R$ με $\varphi\left(\sum_g \lambda_g \cdot g\right) = \sum_g \varphi_1(\lambda_g)\varphi_2(g)$, η οποία είναι ομομορφ. δ.

②

<u>Ειδική περίπτωση</u>: Ένα kG-πρότυπο είναι ακριβώς ένα k-πρότυπο M, το οποίο είναι εφοδιασμένο μ' ένα ομομ. ομάδων $G \to \mathrm{Aut}_k M$.

<u>Ειδική περίπτωση</u>: ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο είναι ακριβώς ένας $\mathbb{C}$-δ.χ. V εφοδιασμένος με έναν ομομορφ. ομάδων $\rho: G \to GL(V)$.

<u>Παράδειγμα</u>: αν $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ είναι ομομορφ. ομάδων, τότε επάγεται στον δ.χ. $\mathbb{C}^n$ η δομή $\mathbb{C}G$-προτύπου

$$\left(\left(\sum_g \lambda_g g\right) v = \sum_g \lambda_g \rho_g(v)\right).$$

<u>Παραδείγματα</u>:

(i) Το τετρ. kG-πρότυπο λαμβάνεται $M = k$ με τα στοιχεία της G να δρουν τετριμμένα (δηλ. ο ομομ. $G \to \mathrm{Aut}_k(k) = \mathcal{U}(k)$ είναι ο τετρ.)

Πιο συγκεκριμένα:

$$\left(\sum_g \lambda_g g\right) \lambda = \sum_g \lambda_g \rho_g(\lambda)$$

$$= \sum_g \lambda_g \lambda \in kG, \ \forall \lambda \in k$$

Ο αντίστοιχος ομομορφ. δακτυλίων $kG \xrightarrow{\varepsilon} k$ καλείται ομομορφ. επαύξησης (augmentation map).

Είναι $\varepsilon\left(\sum_g \lambda_g g\right) = \sum_g \lambda_g \in k$

Ορσ: Το ιδεώδες επαύξησης $I_G(k) = \ker\left(kG \xrightarrow{\varepsilon} k\right)$.

Άσκηση: Το $I_G(k)$ παράγεται ως k-πρότ. από τα στοιχεία $g-1$, $g \in G \setminus \{e\}$ τα οποία αποτελούν μια βάση του k-προτύπου $I_G(k)$.

(ii) Ο ομομορφ. πρόσημο $S_n \xrightarrow{sgn} \{\pm 1\}$ επάγει στο $U = k$ τη δομή ενός kS_n-προτύπου $\to U(k)$ ("αναπαράσταση πρόσημο")

Ισχύει: $\left(\sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma\right)\cdot\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \, sgn(\sigma) \cdot \lambda$

Π.χ. η αναπαράσταση πρόσημο της S_3 στο $\mathbb{C}$

$$\left[2 \cdot 1 + i(12) - \sqrt{3}(123)\right] \cdot z$$

$$= 2z - iz \cancel{+} - \sqrt{3} z$$

(4)

Μιγαδικές

<u>Γενικά</u>, οι 1-διάστατες αναπαρ. της G αντιστοιχούν σε ομομορφ. ομάδων $G \to \mathbb{C}^*$. Κάθε τέτοιος ομομορφ. απεικονίζει την παράγωγο υποομάδα $D(G) = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$, άρα παραγοντοποιείται μέσω της ομ. πηλίκο: $G/D(G) = G_{ab}$ (αβελιανοποίηση της G)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & G_{ab} \arrow[dl, dashed, "\bar{\rho}"] \\ \mathbb{C}^* & \end{tikzcd}$$

Είναι $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}_{Ab}(G_{ab}, \mathbb{C}^*)$

$$\rho = \bar{\rho} \circ \pi \leftarrow\!\shortmid \bar{\rho}$$

<u>Ειδική περίπτωση</u>: Αν $|G| < \infty$

τότε οι {1-διάστατες αναπ. της G}

$\simeq \{ \rho : G \to \mathbb{C}^* \mid \rho \text{ ομομ.} \}$

$\simeq \{ \bar{\rho} : G_{ab} \to \mathbb{C}^* \mid \bar{\rho} \text{ ομομορφ.} \}$

$\simeq \{ \bar{\rho} : G_{ab} \to S^1 \mid \bar{\rho} \text{ ομομ.} \}$

$=$ δυϊκή ομάδα $\widehat{G_{ab}}$ της G_{ab}.

⑤

(iii) Η $D_3 = \langle r, s \mid r^3, s^2, srsr \rangle$.

έχει την 2-διάστατη αναπαράσταση που ορίζεται μέσω της

$\rho : D_3 \to GL_2(\mathbb{C})$

$r \mapsto \begin{pmatrix} \cos(120) & -\sin(120) \\ \sin(120) & \cos(120) \end{pmatrix}$

$s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) Η S_n έχει μια n-διάστατη αναπαράσταση στον $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} e_n$, όπου

$\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}, \ \forall \sigma \in S_n, \ \forall i = 1, \ldots, n$

<u>π.χ</u> $(n = 3)$ $(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_1 \mapsto e_2, \ e_2 \mapsto e_1, \ e_3 \mapsto e_3$.

$(123) \mapsto e_1 \mapsto e_2, \ e_2 \mapsto e_3$

$e_3 \mapsto e_1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Η αναπαράσταση αυτή δεν είναι αναγώγιμη καθώς ο δ. υπόχωρος.

$U = \mathbb{C}(e_1 + \dots + e_n)$ είναι S_n-αναλλοίωτος (και άρα είναι ένα $\mathbb{C}S_n$-υποπρότυπο του $\mathbb{C}^n$)
(αναγωγή αν $\Leftarrow$ το αντ. kG πρότ. είναι απλό)

(ν) Κάθε ομάδα G δρα στο G μέσω αριστερών πολ/σμών, άρα η G δρα στον $\mathbb{C}G = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}g$ ως εξής: $\forall x \in G$ $x \cdot g = xg \in G$

$\forall g \in G$.

Έτσι, προκύπτει το $\mathbb{C}G$-πρότ. $\mathbb{C}G$, (η οποία ονομάζεται αριστερή κανονική αναπαράσταση της G).

<u>Θεώρημα</u>: Ο δακτ. kG είναι ημιαπλός $\Leftrightarrow$

(α) k ημιαπλός, G πεπερ. και

(β) $|G| \cdot 1 \in U(k)$

<u>Πόρισμα</u>: (Θεώρημα Maschke)

Αν G πεπερ. $\Rightarrow$ $\mathbb{C}G$ ημιαπλός

(7)

<u>απόδειξη:</u> $(\Rightarrow)$

Θεωρώ τον ομομορφ. $\varepsilon : kG \to k$ ο οποίος είναι επί και έχει πυρήνα $I_G(k)$. Άρα, υπάρχει ισ. δακτ.

$$k \simeq kG / I_G(k)$$

Καθώς, πηλίκα ημιαπλών είναι ημιαπλοί δακτ. $\Rightarrow$ k ημιαπλός.

• Έστω ότι η G είναι άπειρη. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει αρ. ιδ. $J \subseteq kG$ τ.ω. $kG = I_G \oplus J$.

Παρατηρώ ότι $\forall x \in J$ ισχύει:

$$(1-g).x \in \underset{\overset{\|}{0}}{I \cap J}, \ \forall g \in G \Rightarrow$$

$$x = gx, \ \forall x \in J, \ \forall g \in G.$$

Εξετάζοντας την συνιστώσα του $e \in G$ προκύπτει ότι $x_e = x_{g^{-1}}$ $\forall g \in G, \forall x \in J$. Άρα $(|G| = \infty) \Rightarrow$ $x = 0, \ \forall x \in J \Rightarrow J = 0$. <u>άτοπο</u>

<u>Λήμμα:</u> Έστω $g \in G$, $o(g) = n$. και $x \in kG$ με $(1-g)x = 0$.

$\Rightarrow \exists y \in kG : x = (1 + g + \dots + g^{n-1})y$

<u>απόδειξη</u>: Γράφω $x = \sum_{h \in G} x_h \cdot h$

και έχω ότι

$$x = gx = \sum_{h} x_h (gh) = \sum_{h'} x_{g^{-1}h'} h'$$

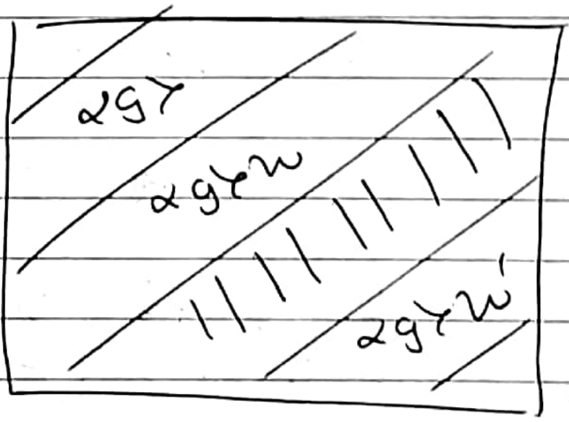
$$= \sum_{h} x_{g^{-1}h} h.$$ Άρα $x_h = x_{g^{-1}h}$

$\forall h \in G$, δηλ.

$$x_h = x_{g^{-1}h} = x_{g^{-2}h} = \dots = x_{g^{-(n-1)}h}$$

$\forall h \in G$, δηλ. $x_h = x_{h'}$ αν

$\langle g \rangle h = \langle g \rangle h'$



Συνεπώς,

$$x = \sum_{h \in G} x_h \cdot h =$$

$$= \sum_{\langle g \rangle h \in G/\langle g \rangle} \left(\sum_{h' \in \langle g \rangle h} x_{h'} h' \right) = \sum_{\langle g \rangle h \in G/\langle g \rangle} x_h \left(\sum_{h' \in \langle g \rangle h} h' \right)$$

$$= \sum_{\langle g \rangle h \in G/\langle g \rangle} x_h (1 + g + g^2 + \dots + g^{n-1}) \cdot h.$$

$$= (1 + g + g^2 + \dots + g^{n-1}) \overbrace{\left(\sum_{\langle g \rangle h \in G/\langle g \rangle} x_h \cdot h \right)}^{y}$$