Άλγεβρα ΙΙ

R Von-Neumann κανονικός :

- $\forall \alpha \in R, \exists \beta \in R: \alpha = \alpha\beta\alpha$.
- $\forall$ π.π αριστερό ιδ: $\exists\, e = e^2 \in R$:

$I = Re$.

Πρόταση: Αν ο R είναι v.N καν. $\Rightarrow rad(R) = 0$.

Απόδ: Αν $x \in rad(R) \Rightarrow \exists\, y \in R$: $1 - yx$ αντ.

$x = xyx \Rightarrow x(1-yx) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Πρόταση: Ο R είναι ημιαπλός $\Leftrightarrow$ R v.N κανονικός, αρ. Noether.

απόδ $(\Rightarrow)$ κάθε ημιαπλός είναι της Noether

Αν $I \subseteq R$ π.π είναι αριστερό ιδ $\Rightarrow$ $R = I \oplus J$. Γράφω

$\exists\, J \subseteq R$ αρ. ιδ :

$1 = e + f$, $e \in I$, $f \in J$. και θ.δ.ο. $e = e^2$

και $I = Re$.

- $e - e^2 = e(1-e) = ef \in I \cap J = 0$.

καθώς, $e \in I \Rightarrow Re \subseteq I$. ②

Αν $r \in I \to r \cdot 1 = r \cdot 1 = re + rf$.

$\Rightarrow r - re = rf \in I \cap J = 0 \Rightarrow r = re$.

$(\Leftarrow)$. Εστω I ενα. αρ. ιδ. $\xrightarrow{R \text{ Noether}}$.

I π.π $\xrightarrow{\text{υ.Ν καν.}}$ $I = Re$, $e = e^2 \in R$.

<u>Ισχ</u>: $R = Re \oplus R(1-e)$

$\forall r \in R$: $r = re + r(1-e)$.

<u>αποδ. ισχ.</u>:

αρα $R = Re + R(1-e)$.

Αν $x \in Re \cap R(1-e) \to x = \alpha e = \beta(1-e)$.

$\alpha, \beta \in R \Rightarrow x = \alpha e = \alpha e \cdot e = \beta(1-e)e = 0$.

$\square$.

R ημιαπλός $\Leftrightarrow$ R αρ. Artin $\not\Leftrightarrow$ R αρ. Noeth. υΝ καν.

$+$

$\mathrm{rad}(R) = 0$

<u>Παραδείγματα</u>: (i) Ο $C[0,1]$ είναι

J- ~~καν~~ ημιαπλός αλλά <u>όχι</u> υΝ καν.

• Για κάθε $\alpha \in [0,1]$. Θεωρώ την

$ev_\alpha : C[0,1] \to \mathbb{C}$, $ev_\alpha(f) = f(\alpha)$

③ Ο οποίος είναι ότι $\operatorname{Im} m_\alpha = \ker e v_\alpha$

$\Rightarrow \exists$ ισομορφ: $\dfrac{C[0,1]}{m_\alpha} \cong \mathbb{C}$

$\Rightarrow m_\alpha$ μεγιστικό. Συνεπώς,

$$\operatorname{rad} C[0,1] = \bigcap_{\substack{m \leq C[0,1] \\ m \text{ μεγιστικό}}} m \subseteq \bigcap_{\alpha \in [0,1]} m_\alpha = 0.$$

$\Rightarrow C[0,1]$ είναι J-ημιαπλός.

- Ο $C[0,1]$ δεν είναι vN κανονικός

Αν $f \in C[0,1]$ είναι η $f(t) = t, \forall t$ και υπάρχει $g \in C[0,1]$: $f = fgf \Rightarrow$

$\forall t \in (0,1]$: $t = f(t) = t^2 g(t) \Rightarrow$

$g(t) = \dfrac{1}{t}$ #

(6). M αρ. ημιαπλό R-πρτ.

$S = \operatorname{End}_R M \Rightarrow S$ v.N κανονικός, (αλλά όχι πάντα ημιαπλός). Εστω $f \in S$. Θεωρώ $\ker f \in M$ και βρίσκω

N: $M = \ker f \oplus N$

Θεωρώ $\mathrm{Im}f \leq M \to K \leq M$:
$M = \mathrm{Im}f \oplus K$.

<u>Ισχ:</u> $f|_N : N \to \mathrm{Im}f$ είναι ισομορφ.

<u>απόδ:</u> Έστω $x \in N$: $f|_N(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f \cap N = 0 \Rightarrow x = 0$.

Αν $y \in \mathrm{Im}f \Rightarrow y = f(z)$, $z \in M$.

Όμως, $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in \ker f$, $z_2 \in N$.

$\Rightarrow y = f(z) = f(z_2)$.

Θεωρώ την αντίστροφη $\gamma : \mathrm{Im}f \to N$
και ορίζω $g : M \to M$ ως σύνθεση.

$M = \mathrm{Im}f \oplus K \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Im}f \xrightarrow{\gamma} N \xhookrightarrow{i_2} M$

Θ.δ.ο. $f = f \circ g \circ f$.

- $f(x) = f \circ g \circ f(x)$, $\forall x \in \ker f$
- $f(y) = f \circ g \circ f(y)$, $\forall y \in N$

αν $y \in N$: $f \circ g \circ (f(y)) = f \circ \gamma \circ f|_N(y)$

$= f(y)$.

(γ) Για κάθε ομάδα G ο δακτ. (5)

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g \;\middle|\; \lambda_g \in \mathbb{C} \right\}$$ είναι

J-ημιαπλός.

~~Στρατηγική~~: Θ.δ.ο ~~ισχύουν τα εξής~~:

Ορσ: η απεικόνιση $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$

$$\alpha \mapsto \alpha^*, \quad \left(\sum \lambda_g g \right)^* = \sum_{g \in G} \overline{\lambda_g}\, g^{-1}$$

καλείται ενέλιξη. (involution)

Ιδιότητες: (α) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}G$: $(\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$

$(\lambda\alpha)^* = \bar{\lambda}\alpha^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\alpha^* \cdot \beta^* = (\beta\alpha)^*$,

Πράγματι, $\alpha = \sum_g \lambda_g \cdot g$, $\beta = \sum_g \mu_g \cdot g$. Συνεπώς,

$$\alpha\beta = \sum_g \left(\sum_{xy=g} \lambda_x \mu_y \right) g.$$

$$(\alpha\beta)^* = \sum_g \overline{\left(\sum_{xy=g} \lambda_x \mu_y \right)}\, g^{-1} =$$

$$\sum_g \sum_{xy=g} \overline{\lambda_x} \cdot \overline{\mu_y} \cdot g^{-1} = \beta^* \cdot \alpha^*.$$

(β) $1^* = 1$.

Ορσ: Η γρ. απεικόνιση $\tau: \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ (6)

$\tau\left(\sum_g \lambda_g \cdot g\right) = \lambda_e$. καλείται το κανονικό ίχνος.

Ιδιότητες: ① τ είναι γραμμική.

$\tau(\alpha\beta) = \tau(\beta\alpha)$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}G$

② Αν $\alpha \in \mathbb{C}G$: $\tau(\alpha^*\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

αποδ: $\alpha = \sum \lambda_g \cdot g$, $\alpha^* = \sum_g \bar{\lambda}_g\, g^{-1}$.

$$= \sum_g \bar{\lambda}_{g^{-1}} \cdot g.$$

$$\alpha^*\alpha = \sum_g \left(\sum_{xy=g} \lambda_x \bar{\lambda}_{y^{-1}}\right) g$$

$$\Rightarrow \tau(\alpha^*\alpha) = \sum_{xy=e} \lambda_x \bar{\lambda}_{y^{-1}} = \sum_x |\lambda_x|^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_x = 0$, $\forall x \in G$. ◻.