Άλγεβρα ΙΙ — Μάθημα 11ο

Πρόταση: Έστω $I \subseteq R$ αριστερό (δεξιό ή αμφ.) ιδεώδες.

(α) I μηδ/μο $\Rightarrow$ I nil.

(β) I nil $\Rightarrow$ $I \subseteq \mathrm{rad}(R)$

Απόδ. (α) ✓ (β) Έστω $r \in I$, $x \in R$

$\Rightarrow xr \in I \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : (xr)^n = 0.$

$\Rightarrow (1-xr)\left(1+(xr)+(xr)^2+\dots+(xr)^{n-1}\right) =$

$= 1-(xr)^n = 1$ και

$\left[1+xr+(xr)^2+\dots+(xr)^{n-1}\right](1-xr) = 1$

$\Rightarrow 1-xr \in U(R) \Rightarrow r \in \mathrm{rad}(R).$

Παρατήρηση: Έστω $I_1, \dots, I_n \subseteq R$ αρ. ιδεώδη (δεξιά, αμφ.) τα οποία είναι τα οποία είναι μηδ/μα $\Rightarrow I = \sum_{k=1}^{n} I_k \subseteq R$ είναι μηδ/μο.

Απόδ: $(n=2)$. Έστω I, J μηδ/μα αριστερά ιδεώδη με $I^n = 0$, $J^m = 0$.

άρα $(I+J)^{n+m-1} = 0$.

Έστω $x_1, \dots, x_{n+m-1} \in I$, $y_1, \dots, y_{n+m-1} \in J$.

$$\Rightarrow z = \prod_{i=1}^{n+m-1} (x_i + y_i) = \sum \underset{x_1 \text{ ή } y_1}{\square} \cdots\cdots \underset{x_{n+m-1} \text{ ή } y_{n+m-1}}{\square}$$

Σε κάθε λέξη μήκους $n+m-1$ στα x_i ή τα y_i είτε $\geq n$ στο πλήθος των x_i είτε $\geq m$ στο πλήθος των y_i. Καθώς $I^n = 0$ και $J^m = 0$ έπεται ότι κάθε προσθετέος στο άθροισμα είναι 0. ∎

<u>Πρόταση</u>: Αν R είναι μεταθετικός της Noether, τότε κάθε nil ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι μηδ/μο.

<u>απόδ</u>: R της Noether $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$: $I = R\alpha_1 + \dots + R\alpha_n$. Αφού $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ μηδ/μα τότε $R\alpha_1, \dots, R\alpha_n$ είναι μηδ/μα

$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} R\alpha_i$ είναι μηδ/μο. ∎

<u>Πρόταση</u>: Αν R είναι αριστερά του Artin $\Rightarrow rad(R) \subseteq R$ είναι μηδενοδύναμο.

<u>Πόρισμα</u>: Αν R είναι αριστερά του Artin, τότε κάθε nil αρ. ιδεώδες του είναι μηδενικό.

<u>απόδ. πορίσματος</u>:

$I \subseteq R$ nil $\Rightarrow I \subseteq rad(R) \xRightarrow{\text{προτ.}} I$ μηδενικό

<u>απόδειξη πρότασης</u>:

Έστω $I = rad(R) \Rightarrow$ έχουμε φθίνουσα αλυσίδα: $I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$

R Artin.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: I^n = I^{n+1}$. Θ.δ.ο. $I^n = 0$

Έστω ότι $I^n \neq 0$. Θεωρούμε σύνολο:

$\mathcal{X} = \{ J \subseteq R \mid J \text{ αρ. ιδεώδ. } I^n J \neq 0 \}$.

$\Rightarrow \mathcal{X} \neq \emptyset \quad (R \in \mathcal{X})$.

Άρα υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο
$J \in \mathcal{X}$: $I^n J \neq 0 \Rightarrow \exists r \in J : I^n r \neq 0$ (*)

Παρατηρώ: $I^n r \subseteq J$. Επίσης

$I^n (I^n r) = I^{2n} r = I^n r \neq 0$

$\xRightarrow{I^n r \in \mathcal{X}} J = I^n r \Rightarrow r \in I^n r \Rightarrow \exists x \in I^n$:

$r = xr \Rightarrow (1-x) r = 0 \xRightarrow{(*)} r = 0$, αφού $1-x$ είναι αντιστρέψιμο. $\Rightarrow$ <u>άτοπο</u>.

Παρατήρηση: Αν R είναι ημιαπλός τότε ο R Jacobson ημιαπλός $(\mathrm{rad}(R)=0)$ (4)

απόδειξη: Έστω R ημιαπλός $r\in \mathrm{rad}(R)$. Γράφω $R=I_1\oplus\cdots\oplus I_n$ για κάποια ελαχιστικά αρ. ιδεώδ. $I_1\ldots I_n$

$I_1\ldots I_k$ απλά αρ. R-πρότ. $\Rightarrow rI_i=0$. $\forall i=1,\ldots, n \Rightarrow rR=rI_1\oplus\cdots\oplus rI_n=0$

$\Rightarrow r\cdot 1=r=0$.

Πρόταση: τ.α.ε.ι για ένα δακτύλιο R. (α) R είναι ημιαπλός

(β) ο R είναι αριστερά του Artin και $\mathrm{rad}(R)=0$.

αποδ (α) $\Rightarrow$ (β) ✓

(β) $\Rightarrow$ (α) Θ.δ.ο. R είναι ευθύ άθροισμα ελαχιστικών ιδεωδών.

Επιλέγω ένα ελαχιστικό αρ. ιδεώδ. $I_1\subseteq R$.

$I_1\neq 0=\mathrm{rad}(R)\Rightarrow \exists\, M_1\subseteq R$ αρ. μεγιστικό ιδεώδ: $I_1\nsubseteq M_1\Rightarrow I_1\cap M_1\subsetneq I_1$

$\underline{\underline{I_1\ \text{ελαχ.}}}$ $I_1\cap M_1=0\Rightarrow R=I_1\oplus M_1$.

5

- αν $M_1 = 0$ τελειώσαμε.
- αν $M_1 \neq 0$, επιλέγω ελαχιστικό αριστερό ιδεώδ. $I_2 \subseteq M_1$

Όπως πριν υπάρχει μεγιστικό αρ. ιδ. $M_2' \subseteq R$: $R = I_2 \oplus M_2'$

<u>Ισχ</u>: $M_1 = I_2 \oplus (M_2' \cap M_1)$

(άμεσο από modularity)

Θέτω $M_2 = M_1 \cap M_2'$ και έχω

$R = I_1 \oplus I_2 \oplus M_2$. Αν $M_2 = 0$.

τελειώσαμε.

- Αν $M_2 \neq 0$, βρίσκω ελαχιστικό αρ. ιδ. $I_3 \subseteq M_2$ και έχω μεγιστικό αρ. ιδ. $M_3' \subseteq R$: $M_3' \not\supseteq I_3 \Rightarrow$ $R = I_3 \oplus M_3'$. Όμοια: $M_2 = I_3 \oplus (M_2 \cap M_3')$. Θέτω $M_3 = M_3' \cap M_2$

$\Rightarrow R = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus M_3$.

Η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω τελειώνει μετά από πεπερ. ~~πλήθος~~ αριθμό βημάτων, αφού R του Artin.

□

<u>Πόρισμα</u>. Αν R αριστερά του Artin $\Rightarrow R/rad(R)$ είναι ημιαπλός.

<u>απόδ</u>: R αρ. του Artin $\Rightarrow R/rad(R)$ αρ. του Artin + $R/rad(R)$ Jacobson ημιαπλός

πρωτ. $\Rightarrow R/rad(R)$ ημιαπλός. □

πρωτ.