<u>Άλγεβρα ΙΙ</u> <u>Μάθημα 06.</u>

<u>Πρόταση</u>: Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για τα υποπρότ. $M_1, \dots, M_n \subseteq M$.

(α) $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = 0$, $\forall i = 1 \dots n$.

(β) κάθε $x \in \sum_i M_i$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in M_i$, $\forall i = 1 \dots n$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $M_1 \dots M_n$ είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u>.

<u>Αποδ</u> (α) $\to$ (β) Έστω $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i'$

όπου $x_i, x_i' \in M_i$, $\forall i = 1 \dots n$.

$\Rightarrow$ $x_i - x_i' = \sum_{j \neq i} (x_j - x_j')$, $\forall i = 1 \dots n$.

$$x_i - x_i' = \sum_{j\neq i}(x_j - x_j') \in M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = 0 \cdot \text{(2)}$$

(γ) $\Rightarrow$ (α). Αν $i \in \{1,\dots,n\}$, $x \in M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j$

γράφω $x = \sum_{j\neq i} x_j$ και έχω μια ισότητα

της μορφής $x + \sum_{j\neq i} 0 = 0 + \sum_{j\neq i} x_j$

$\Rightarrow x_j = 0 \; \forall j \Rightarrow x = 0$.

<u>Ορσ</u>: Μια οικογένεια υποπρότ. $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ καλείται <u>γραμμικά ανεξάρτητη</u> αν για κάθε πεπερασμένο $\Lambda' = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subseteq \Lambda$ τα $M_{\lambda_1},\dots,M_{\lambda_n}$ είναι γραμμ. ανεξ.

<u>Πρόταση</u>: Για κάθε οικογένεια υποπρότ. $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υπάρχει μεγιστική υπο-οικογένεια $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$ $\Lambda' \subseteq \Lambda$ τ.ω. να είναι γρ. ανεξ.

<u>Αποδ</u>: Έστω $\mathcal{X} = \{\Lambda' \mid \Lambda' \subseteq \Lambda$ και $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$ γραμμ. ανεξ.$\}$.

$\mathcal{X} \neq \emptyset$, καθώς $\emptyset \in \mathcal{X}$.

Από το λήμμα του Zorn υπάρχει

μεγιστικό στοιχείο $\mathcal{M}' \in \mathfrak{X}$

□

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{M}}$ οικογένεια υπόχωρων και $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{M}'}$ είναι μια γρ. ανεξ. υπο-οικογένεια, τότε ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος:

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{M}'} \mathcal{M}_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathcal{M}'} \mathcal{M}_\lambda \subseteq \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \mathcal{M}_\lambda$$

<u>π.χ.</u> αν $U, V \subseteq \mathbb{R}^3$, $U \neq V$.

$\dim U = \dim V = 2 \Rightarrow U + V = \mathbb{R}^3$.

Μια μεγιστική γρ. ανεξ. υποοικογένεια της $\{U, V\}$ είναι η $\{U\}$ και

$U \neq \mathbb{R}^3 = U + V$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{M}}$ μια οικογένεια απλών R-υποπρ. ενός προτ. $\mathcal{M}$ και $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{M}'}$ μια μεγιστική γρ. ανεξ. υποοικογένεια.

$$\Rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{M}'} \mathcal{M}_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathcal{M}'} \mathcal{M}_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \mathcal{M}_\lambda$$

<u>απόδ</u>: Για νδο $\sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \mathcal{M}_\lambda \subseteq \sum_{\lambda \in \mathcal{M}'} \mathcal{M}_\lambda$.

λυσο. $\forall \lambda \in \mathcal{J}': \mathcal{M}_\ell \subseteq \sum_{\lambda \in \mathcal{J}'} \mathcal{M}_\lambda =: \mathcal{M}'$ (4)

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο $\ell \in \mathcal{J}: \mathcal{M}_\ell \not\subseteq \mathcal{M}' \to \mathcal{M}_\ell \cap \mathcal{M}' \subsetneq \mathcal{M}_\ell$

$\to \mathcal{M}_\ell \cap \mathcal{M}' = 0$, άρα και το άθροισμα $\mathcal{M}_\ell + \mathcal{M}'$ είναι ευθύ. Όμως.

$\mathcal{M}_\ell + \mathcal{M}' = \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}' = \mathcal{M}_\ell \oplus \left[\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{J}'} \mathcal{M}_\lambda\right]$

$= \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{J}' \cup \{\ell\}} \mathcal{M}_\lambda$, το οποίο αντίκειται στον μεγιστικό χαρακτήρα του $\mathcal{J}'$. □

Πρόταση: Τα ε.ι. για ένα R-πρότυπο $\mathcal{M}$.

(α) $\mathcal{M}$ είναι ημιαπλό.

(β) $\mathcal{M} = \sum_{i \in I} \mathcal{M}_i$, για κάποια οικογένεια $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ απλών υποπρότ. του $\mathcal{M}$.

(γ) $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$, για κάποια γρ. ανεξ. οικογένεια απλών προτ. του $\mathcal{M}$.

απόδ: Με βάση τα προηγούμενα.

(β) $\Leftrightarrow$ (γ).

① ⟹ ② Έστω $(M_i)_{i\in I}$ η συλλογή όλων των απλών υποπροτ. του M και $M' = \sum_{i\in I} M_i$. (5)

Γνωρίζω ότι υπάρχει $M'' \leq M$ τ.ω. $M = M' + M''$, $M' \cap M'' = 0$.

- αν $M'' = 0 \Rightarrow M = M' = \sum_{i\in I} M_i$ ✓
- αν $M'' \neq 0 \Rightarrow M''$ ημιαπλό, $\neq 0$ $\Rightarrow \exists\, N \leq M''$ απλό.

Προφανώς $N \leq M$ απλό $\Rightarrow N \subseteq \underbrace{\sum_{i\in I} M_i}_{= M'}$

$\Rightarrow N \subseteq M' \cap M'' = 0$. <u>άτοπο</u>.

② ⟹ ① Έστω $N \leq M$.

Έστω $\mathcal{X} = \left\{ J \subseteq I \;\middle|\; \sum_{i\in J} M_i \cap N = 0 \right\}$.

$\Rightarrow \mathcal{X} \neq \emptyset$ καθώς $\emptyset \in \mathcal{X}$.

Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό $J_0 \in \mathcal{X}$.

<u>Ισχ</u> $N + \left(\sum_{i\in J_0} M_i\right) = M$.

Αρκεί $\forall t \in I$: $M_t \subseteq N + \left(\sum_{i\in J_0} M_i\right) = M'$

Έστω ότι για κάποιο $t \in I$.
$M_t \not\subseteq M'$, καθώς M_t απλό έπεται
ότι $M_t \cap M' = 0$. και άρα το άθροισ-
μα $M_t + M'$ είναι ευθύ $\rightarrow$

$$M_t \oplus M' = M_t \oplus \left[N \oplus \sum_{i \in J_0} M_i\right]$$

$$= N \oplus \left[M_t + \sum_{i \in J_0} M_i\right]$$

$$= N \oplus \sum_{i \in J_0 \cup \{t\}} M_i \rightarrow J_0 \cup \{t\} \in \mathcal{X}$$

άτοπο □

<u>Πρόταση</u>: Τα ε.ι. για ένα δακτύλιο R.:

(α) κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι ημι-απλό

(β) κάθε π.π. R-πρότυπο είναι ημιαπλό

(γ) για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R, το R-πρ. R/I είναι ημιαπλό

(δ). το R-πρ. R είναι ημιαπλό.

Στην περίπτωση αυτή ο δακτύλιος R λέγεται (<u>αριστερά</u>) <u>ημιαπλός</u>.

ἄρα: $(\alpha) \to (\gamma) \to (\beta) \leftrightarrow (\delta)$

$(\beta) \to (\alpha)$ Έστω M ένα R-πρότ.

$\Rightarrow \forall x \in M$: $Rx \cong R/I$ για κάποιο

αρ. ιδεώδες $I \subseteq R$.

Είναι $M = \sum\limits_{x \in M} Rx$ = άθροισμα ημιαπλών

= άθροισμα (αθροισμάτων απλών)

= άθροισμα απλών = ημιαπλό.

Παρατηρήσεις: ① Αν R είναι

αρ. ημιαπλός, τότε ο R είναι

αρ. της Noether και του Artin.

αποδ.: Γράφω $R = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda^*} I_\lambda$

όπου $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια οικογένεια ελαχιστικών, $\neq 0$ αρ. ιδεωδών του R.

Ισχ. $|\Lambda| < \infty$. $|\Lambda| < \infty$ είναι

Γνωρίζοντας ότι

$R = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ και άρα ο R είναι αρ.

της Noether και του Artin.

<u>απόδ (ισχυρισμού).</u> Καθώς $1 \in R$. (8)

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{J}' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathcal{J}$: και $e_i \in I_{\lambda_i}$

$\forall i = 1 \dots n$: $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Αν υπάρχει $\lambda \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}'$ και $x \in I_\lambda$

$\Rightarrow x = x \cdot 1 = x(e_1 + \dots + e_n)$

$= xe_1 + \dots + xe_n \in I_\lambda \cap \sum_{i=1} I_{\lambda_i} = 0$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow I_\lambda = 0$ <u>άτοπο</u>.

(2) Αν R, S αρ. ημιαπλοί $\Rightarrow$

$R \times S$ είναι αρ. ημιαπλός.

<u>απόδ</u>: Έστω ότι $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$

$S = J_1 \oplus \dots \oplus J_m$ για κάποια ελαχισ-

τικά ιδεώδη $I_1 \dots I_n$ του R και $J_1 \dots$

J_m του S.

$R \times S = (R \times 0) \oplus (0 \times S) = (I_1 \times 0) \oplus \dots$

$\oplus (I_n \times 0) \oplus (0 \times J_1) \oplus \dots \oplus (0 \times J_m)$.

<u>π.χ.</u> αν $F_1, \dots, F_n$ σώματα.

$\Rightarrow F = F_1 \times \dots \times F_n$ ημιαπλός αρ.

δακτ.