1

Άλγεβρα Ι Μάθημα (28/11/2022)

$G_\alpha$, $\alpha \in I$, $W$ το σύνολο των ανηγμένων λέξεων στο $\bigsqcup_\alpha G_\alpha$.

Κάθε $g \in G_\alpha \rightsquigarrow L_g^\alpha \in S(W)$

και μονομορφ. $i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow S(W)$.

Ορίζουμε $\underset{\alpha}{*} G_\alpha = \langle i_\alpha(G_\alpha) \mid \alpha \in I \rangle \leq S(W)$

- κάθε στοιχείο $1 \neq g \in \underset{\alpha}{*} G_\alpha$ έχει μια ανηγμένη μορφή (κανονική) μορφή

Έστω $g \in \underset{\alpha}{*} G_\alpha$, τότε

$g = i_{\alpha_1}(g_1) \cdots i_{\alpha_n}(g_n)$.

Αν δύο διαδοχικοί παράγοντες $g_i, g_{i+1}$ ανήκουν στην ίδια ομάδα $G_\alpha$, δηλ. $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ ($G_{\alpha_i} = G_{\alpha_{i+1}}$) τότε το γινόμενο $i_{\alpha_i}(g_i) \cdot i_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})$ αντικαθίσταται με το στοιχείο $i_{\alpha_i}(g_i \cdot g_{i+1})$ και το πλήθος των παραγόντων μειώνεται κατά 1 ή 2.

Συνεπώς, κάθε $1 \neq g \in \ast G_\alpha$ γράφεται σε ανηγμένη μορφή ως εξής:

$$g = i_{\alpha_1}(g_1) \cdots i_{\alpha_n}(g_n)$$

όπου διαδοχικά $g_i, g_{i+1}$ δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα $G_\alpha$ και κάθε $g_i \neq 1_{G_\alpha}$.

▫ Η ανηγμένη μορφή ενός $1 \neq g \in \underset{\alpha}{\ast} G_\alpha$ είναι μοναδική.

Έστω ότι το $g$ έχει δύο διαδοχικές εκφράσεις:

$$g = i_{\alpha_1}(g_1) \cdots i_{\alpha_n}(g_n) = i_{\beta_1}(x_1) \cdots i_{\beta_k}(x_k)$$

$$\Rightarrow g(\phi) = (g_1, \dots, g_n) = (x_1, \dots, x_k)$$

$$\Rightarrow n = k \text{ και } g_i = x_i, \ \forall i = 1, \dots, n.$$

▫ Κάθε έκφραση $\overset{g}{\overbrace{i_{\alpha_1}(g_1) \cdots i_{\alpha_n}(g_n)}}$ εκφράζει μη τετριμμένο στοιχείο $g \neq 1$.

Πράγματι, $g(\phi) = (g_1, \dots, g_n)$

$$\Rightarrow g \neq id_W = 1$$

③

Η απεικόνιση $\varphi: \ast_{\alpha} G_\alpha \to W$

$$\varphi(g) = g(\phi) = (g_1, \dots, g_n)$$

$\varphi(1) = (\phi)$ είναι 1-1 και επί

Συνεπώς μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε στοιχείο της ομάδας $\ast_{\alpha} G_\alpha$ με μια ανηγμένη λέξη και θεωρούμε ότι $\ast G_\alpha$ είναι το σύνολο των ανηγμένων λέξεων*, όπου το γινόμενο δύο ανηγμένων λέξεων είναι η ανηγμένη λέξη που προκύπτει από στοιχειώδεις αναγωγές από την λέξη: $(g_1, g_2, \dots, g_n, x_1, \dots, x_k)$.

$\ast \; (g_1, \dots, g_n) \circ (x_1, \dots, x_k)$

- Το 1 είναι το $\phi$
- και $(g_1, \dots, g_n)^{-1} = (g_n^{-1}, \dots, g_1^{-1})$.

Πρόταση: Έστω $G_\alpha$, $\alpha \in J$ μια οικογένεια ομάδων και $\ast_{\alpha} G_\alpha$ το ελεύθερο γινόμενό τους

4

1. Για κάθε $\alpha \in \mathcal{J}$, υπάρχει μονομορφισμός

$i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow \ast_\alpha G_\alpha$.

(μέσω του οποίου θεωρούμε κάθε $G_\alpha$ ως υποομάδα της $\ast_\alpha G_\alpha$.)

2. $\forall g \in \ast_\alpha G_\alpha$ με $g \neq 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο στοιχείων των $i_\alpha(G_\alpha)$ σε ανηγμένη μορφή δηλ.

$g = i_{\alpha_1}(g_1) \cdots i_{\alpha_n}(g_n)$, όπου

$\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $\forall i$.

3. $i_\alpha(G_\alpha) \cap \langle i_\beta(G_\beta) \mid \beta \in \mathcal{J}, \beta \neq \alpha \rangle = \{1\}$.

απόδ. Τα 1, 2 έχουν δειχθεί. Για το 3 έστω $g \neq 1$ στην τομή τους.

$g = i_\alpha(g_\alpha)$ ← ανηγμένη μορφή

και

$g = i_{\beta_1}(g_1) \cdots i_{\beta_r}(g_r)$, $\beta_i \neq \alpha$.

η ανηγμένη μορφή που προκύπτει από την θη έκφραση δεν περιέχει στοιχείο του παράγοντα $G_\alpha$ και έχουμε άτοπο. (μον. ανηγμένων μορφών) □

**Καθολική ιδιότητα ελευθέρων γινομένων**

Έστω $G_\alpha$, $\alpha \in J$ μια οικογένεια ομάδων και $G = \ast_\alpha G_\alpha$ το ελεύθερο γιν.

Τότε $\forall H$ και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $\varphi_\alpha : G \to H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφ. $\varphi : G \to H$ με

$$\varphi_\alpha = \varphi \circ i_\alpha, \quad \forall \alpha \in J.$$

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[rr, hook, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "G"] & & \ast_\alpha G_\alpha \arrow[dl, "\varphi"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

αποδ:

Έστω $1 \neq g \in G$ και

$$g = i_{\alpha_1}(g_1) \cdots i_{\alpha_n}(g_n).$$

⑥

η αντίστοιχη μορφή του.

Ορίζουμε $\varphi(g) := \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$.

$$\varphi(1) = 1.$$

- Εύκολα είναι ομομορφ.
- Εξ' ορισμού: $\varphi_\alpha = \varphi \circ i_\alpha$.

Η μοναδικότητα της $\varphi$ ως προς την μεταθετικότητα των διαγραμμάτων έπεται από το γεγονός ότι $i_\alpha(G_\alpha)$ παράγουν το ελεύθερο γινόμενο.

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $G_\alpha$, $\alpha \in J$, μια οικογένεια ομάδων, $G$ ομάδα και μια οικογένεια ομομορφ.

$\lambda_\alpha : G_\alpha \to G$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

$\forall$ $H$ και οικογένεια ομομορφ. $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφ. $\varphi : G \to H$ τ.ω.

$$\varphi_\alpha = \varphi \circ \lambda_\alpha, \ \forall \alpha \in J.$$

(φ)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\lambda_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "Gr"] & & G_\alpha \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad G \cong \mathop{*}_{\alpha} G_\alpha .$$

<u>αποδ.</u>

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[rr, "\lambda_\alpha"] \arrow[dr, "i_\alpha"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "G"] & & G \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathop{*}_{\alpha} G_\alpha & \end{tikzcd}$$

Από υπόθ.
υπάρχει $\varphi : G \to \mathop{*}_{\alpha} G_\alpha$

με $\varphi \circ \lambda_\alpha = i_\alpha \ \forall \alpha$.

Από την καθολική ιδιότητα
των ελευθέρων γιν. υπάρχει
μοναδικός ομομορφισμός $\psi : \mathop{*}_{\alpha} G_\alpha \to G$
τ.ω. $\psi \circ i_\alpha = \lambda_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[rr, hook, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\lambda_\alpha"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "G"] & & \mathop{*}_{\alpha} G_\alpha \arrow[dl, "\psi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

<u>Παρατηρούμε</u>

$$\psi \circ \varphi \circ \lambda_\alpha = \psi \circ i_\alpha = \lambda_\alpha = id \circ (\lambda_\alpha)$$

→ $\psi \circ \varphi = id_G$, από την μοναδικότητα αφού

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "\lambda_\alpha"] \arrow[dr, "\lambda_\alpha"'] & G \arrow[d, "id"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Ομοίως, $\varphi \circ \psi = id_{\ast_\alpha G_\alpha}$

και άρα $\varphi$ ισομορφισμός □

<u>Πρόταση</u>

Έστω $G_\alpha$, $\alpha \in J$, υποομάδες μιας ομάδας $G$. Τ.α.ε.ι.

① Κάθε στοιχείο $\neq 1$ της $G$ μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο ως

$g_1 \ldots g_n$, ητοι $g_i \in G_{\alpha_i}$

$G_{\alpha_i} \neq G_{\alpha_{i+1}}$

$\forall i$ ⊛

② Η $G$ παράγεται από τις υποομάδες $G_\alpha$ και το $1$ δεν μπορεί να γραφτεί όπως ⊛.

Επιπλέον αν ισχύει ένα από

9

1, 2 : $G \cong \underset{\alpha}{*} G\alpha$.

<u>αποδ</u>

1 → 2

Η $G$ παράγεται από τις $G\alpha$. αφού μπορεί να γραφτεί ...

Αν $g_1 \cdots g_n = 1$, όπως υποθ. ητι 2.

→ $g_1 \cdots g_{n-1} = g_n^{-1}$ άτοπο από μοναδικότητα.

2 → 1.

Αφού η $G$ παράγεται από τις $G\alpha$, τότε:

$g = g_1 \cdots g_m$, $g_i \in G\alpha_i$ και με "στοιχειώδεις αναγωγές" προκύπτει γινόμενο όπως στο συμπέρασμα. για $g \neq 1$.

<u>Μοναδικότητα:</u>

$g_{i_1} \cdots g_{i_n} = x_{j_1} \cdots x_{j_k}$, όπου ηικυο, $g_{i_\lambda} \neq 1$, $x_{j_\mu} \neq 1$,

$g_{i_\lambda} \in G_{\alpha_\lambda}$, $x_{j_\nu} \in G_{\beta_\nu}$

και $G_{\alpha_\lambda} \neq G_{\alpha_{\lambda+1}}$

$G_{\beta_\nu} \neq G_{\beta_{\nu+1}}$

$\Rightarrow g_{i_1} \cdots g_{i_m} x_{j_k}^{-1} \cdots x_{j_1}^{-1} = 1$

Αν η ανηγμένη λέξη που προκύπτει με στοιχειώδεις αναγωγές είναι μη τετρ., τότε καταλήγουμε σε άτοπο, αφού 1 μπορεί να γραφτεί -----

$\square$

Για το επιπλέον:

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, hook, "i_\alpha"] \arrow[dr, bend right, "j_\alpha"'] & *_\alpha G_\alpha \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

συμβ

$j_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G$ η ένθεση της $G_\alpha$ στην $G$.

από την καθολική ιδιότητα υπάρχει $\varphi : *_\alpha G_\alpha \to G$ με

$\varphi \circ i_\alpha = j_\alpha$.

- Είναι επί διότι $G = \langle G_\alpha \mid \alpha \in J \rangle$.
- Είναι 1-1 " ανηγμένη απεικονίζονται σε "ανηγμένη".