

1)

Αξιοβραχυ

Μαθηματικά
(28/11/2022)

$G_\alpha, \alpha \in J$, \mathcal{W} το σύνολο των ανυψώσεων J έξω. στο $\perp G_\alpha$.

Κάθε $g \in G_\alpha \rightsquigarrow L_g^\alpha \in S(\mathcal{W})$.

και ομομορφ: $i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow S(\mathcal{W})$.

Ορίζουμε $\ast_\alpha G_\alpha = \langle i_\alpha(G_\alpha) \mid \alpha \in J \rangle \leq S(\mathcal{W})$.

• Κάθε στοιχείο $1 \neq g \in \ast_\alpha G_\alpha$.

έχει μια ανυψώση i_α (κανονική) i_α .

Έστω $g \in \ast_\alpha G_\alpha$, τότε

$$g = i_{\alpha_1}(g_1) \dots i_{\alpha_n}(g_n).$$

Ην δύο διαδοχικοί παράγοντες g_i, g_{i+1} ανήκουν στην ίδια ομάδα.

G_α , δηλ. $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ ($G_{\alpha_i} = G_{\alpha_{i+1}}$)
τότε το γινόμενο $i_{\alpha_i}(g_i) \cdot i_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})$
αντικαθίσταται με το στοιχείο $i_{\alpha_i}(g_i \cdot g_{i+1})$. και το π-ψήφος των παραγόντων μειώνεται κατά 1 ή 2 .

2

Συνεπώς, κάθε $g \in \neq G$.
 Δράζεται σε αλληλ. & βορφη
 ως $\in \xi_{\omega}$.

$$g = \dot{\iota}_{\alpha_1}(g_1) \dots \dot{\iota}_{\alpha_n}(g_n)$$

Όπου διαδοχικά g_i, g_{i+1} δεν
 ανήκουν. Γνω ιδιο παραχούτα
 G_i και κάθε $g_i \neq 1_{G_i}$.

• Η ανωθμενω βορφη ενός
 $1 \neq g \in \neq G$ είναι μοναδική.

• Έστω ότι το g έχει δύο δια-
 δοχικές εκφράσεις:

$$g = \dot{\iota}_{\alpha_1}(g_1) \dots \dot{\iota}_{\alpha_n}(g_n) = \dot{\iota}_{\beta_1}(x_1) \dots \dot{\iota}_{\beta_k}(x_k)$$

$$\Rightarrow g(\phi) = (g_1, \dots, g_n) = (x_1, \dots, x_k)$$

$$\Rightarrow n = k \text{ και } g_i = x_i, \forall i=1, \dots, n.$$

• Κάθε έκφραση $\dot{\iota}_{\alpha_1}(g_1) \dots \dot{\iota}_{\alpha_n}(g_n)$
 εκφράζει με τετρακλιενά στοιχεία
 g_{i+1} .

$$\text{Παραδοτι, } g(\phi) = (g_1, \dots, g_n)$$

$$\Rightarrow g \neq \dot{\iota}d_{\omega} = 1$$

3

□

Η απεικόνιση $\varphi: \ast G_\alpha \rightarrow W$

$$\varphi(g) = g(\varphi) = (g_1, \dots, g_n)$$

$$\varphi(1) = (\varphi) \text{ είναι } \underline{1-1} \text{ και} \\ \underline{\text{επι}}$$

Δυστυχώς μπορούμε να ταυτίσουμε
κάθε στοιχείο της ομάδας
 $\ast G_\alpha$ με μια ανυστέση $\xi \in$
 ξ_n και θεωρούμε ότι $\ast G_\alpha$
είναι το σύστημα των α
ανυστέσεων $\xi \in \xi_n$, όπου το
χινώμενο δύο ανυστέσεων $\xi \in$
 ξ_n είναι η ανυστέση $\xi \in$
 ξ_n που προκύπτει από στοι-

$$\ast (g_1, \dots, g_n) \cdot (x_1, \dots, x_k) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Χειώσεις} \\ \text{ανστώδεις} \\ \text{από την} \end{array} \right.$$

$$\xi \in \xi_n : (g_1, g_2, \dots, g_n, x_1, \dots, x_k)$$

• Το 1 είναι το φ

$$\text{• και } (g_1, \dots, g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1})$$

Πρόταση: Έστω $G_\alpha, \alpha \in I$

για οικογένεια ομάδων και

$\ast G_\alpha$ το ελεύθερο χινώμε-

νό τους

4

1) Για κάθε $\alpha \in J$, υπάρχει
homomorphism

$$\iota_\alpha: G_\alpha \hookrightarrow \ast_\alpha G_\alpha.$$

(λέω του οποίου θεωρούμε
κάθε G_α ως υποομάδα
της $\ast_\alpha G_\alpha$.)

2) $\forall g \in \ast_\alpha G_\alpha$, με $g \neq 1$. $\exists p_\alpha$ -

βασική και $\lfloor \text{ωαδικό τμήμα}$.

σε \mathbb{Z} ανήκον. στοιχεία των
 $\iota_\alpha(G_\alpha)$ σε ανωτέρω μορφή
 δm .

$$g = \iota_{\alpha_1}(g_1) \dots \iota_{\alpha_n}(g_n), \text{ όπου}$$

$$\alpha_i \neq \alpha_{i+1}, \forall i.$$

$$\textcircled{3} \quad \iota_\alpha(G_\alpha) \cap \iota_\beta(G_\beta) \mid \beta \in J, \beta \neq \alpha \neq \beta = \{1\}.$$

από το 1) 2) έχω δείξει.

Για το 3) έγω $g \neq 1$ στην μορφή
τους.

$$g = \iota_\alpha(g_\alpha) \leftarrow \text{ανωτέρω μορφή}$$

και

$$g = \iota_{\beta_1}(g_1) \dots \iota_{\beta_r}(g_r), \beta_i \neq \alpha.$$

5

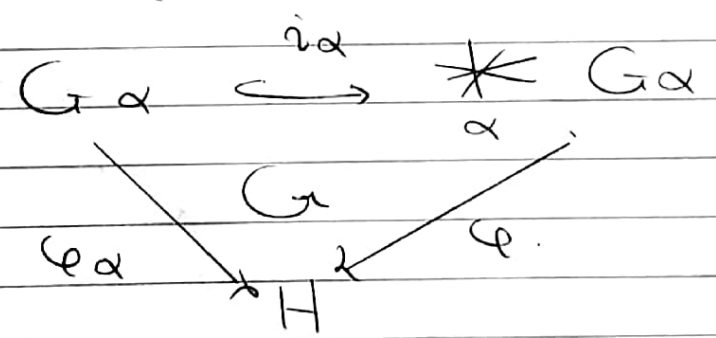
ω ανηγμένη μορφή που περιέχει
από την ανηγμένη
δεν περιέχει στοιχεία του
παράγοντα. Gα και είναι
αυτό. (μν. ανηγμένων μορφών)

Καθολική ιδιότητα ελεύθερων
ομάδων

Έστω Gα, α ∈ J. μια οικογένεια
ομάδων και G = *_α Gα
το ελεύθερο γιν.

Τότε, ∀ H και κάθε οικογένεια
ομομορφισμών. φα: Gα → H υπάρχει
μοναδικός ομομορφισμός φ: G → H
με

φα = φ ∘ ια, ∀ α ∈ J.



απόδειξη:

Έστω g ∈ G και

g = ια1(g1) ... ιαν(gn).

6

ω ανυψώσεων κορυφών του.

Ορίζουμε $\varphi(g) := \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$.

$$\varphi(1) = 1.$$

- Ομομορφία είναι ομομορφία.
- Εξ' ορισμού: $\varphi_\alpha = \varphi \circ \tau_\alpha$.

Η βουαδικότητα της φ ως προς την βεαδικότητα των διαγραμμάτων. Έπεται από το γεγονός ότι $\tau_\alpha(G_\alpha)$ παράχουν το ελεύθερο γινόμενο.

Θεώρημα:

Έστω $G_\alpha, \alpha \in J$, μια οικογένεια ομάδων, G ομάδα και μια οικογένεια ομομορφιών.

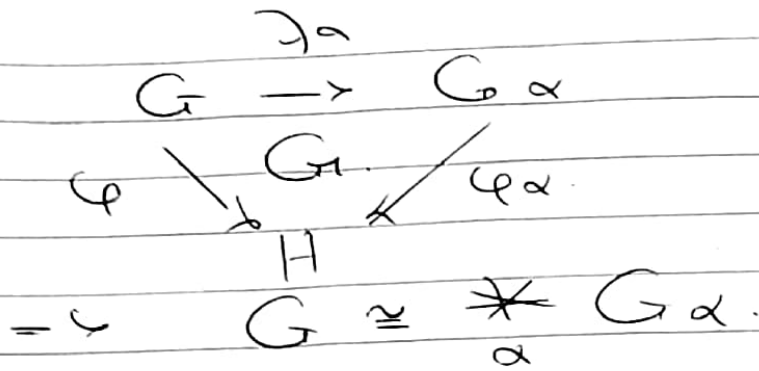
$\tau_\alpha: G_\alpha \rightarrow G$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

$\forall H$ και οικογένεια ομομορφιών.

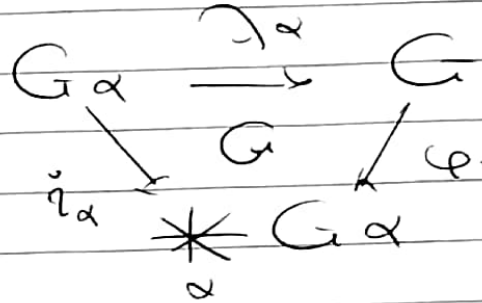
$\varphi_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$ υπάρχει βωαδικώς ομομορφία $\varphi: G \rightarrow H$ τ.ω.

$$\varphi_\alpha = \varphi \circ \tau_\alpha, \forall \alpha \in J.$$

⊗



απόδ.

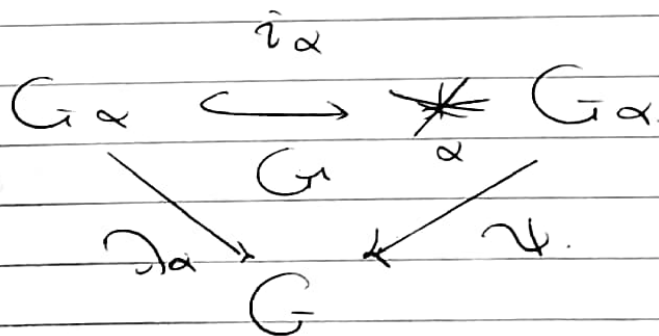


Από υπόθε.

υπάρχει $\varphi: G \rightarrow \underset{\alpha}{*} G_\alpha$.

υε. $\varphi \circ \mathcal{J}_\alpha = \tilde{\mathcal{I}}_\alpha, \forall \alpha$.

Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων δ'ν. υπάρχει μοναδικός ομομορφ. $\psi: \underset{\alpha}{*} G_\alpha \rightarrow G$ τέω. $\psi \circ \tilde{\mathcal{I}}_\alpha = \mathcal{J}_\alpha$.

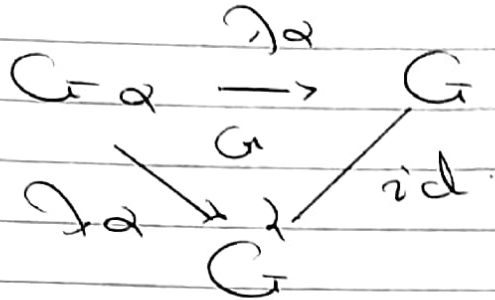


Παρατηρούμε

$$\psi \circ \varphi \circ \mathcal{J}_\alpha = \psi \circ \tilde{\mathcal{I}}_\alpha = \mathcal{J}_\alpha = \tilde{\mathcal{I}} \circ \mathcal{J}_\alpha$$

8

$\rightarrow \psi \circ \varphi = \text{id}_G$, από την αντιστοιχία αφού



Ομοίως, $\varphi \circ \psi = \text{id}_{*G}$

και άρα φ ισομορφισμός

□

Πρόταση

Έστω $G_i, i \in J$, υποομάδες μιας ομάδας G . $\mathcal{L} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{E} \cdot \mathcal{I}$.

1) Κάθε στοιχείο $\neq 1$ της G μπορεί να γραφτεί κατάλληλο τρόπο ως

$$g_{1i} \dots g_{ni}, \text{ ή } g_i \in G_i$$

$$G_{2i} + G_{ni}$$

† (*)

2) Η G παράγεται από τις υποομάδες G_i και το 1 δεν μπορεί να γραφτεί όπως (*).

Επιπλέον, αν ισχύει ένα από

9

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} : G \cong \underset{\alpha}{*} G_{\alpha}.$$

απόδειξη

$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$

Η G παράχεται από τις G_{α} .
Αφού μπορεί να γραφτεί ...

Αν $g_1 \dots g_n = 1$, όπως υποθέτουμε.

\rightarrow $g_1 \dots g_{n-1} = g_n^{-1}$ όπου
από βασικότητα.

$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$.

Αφού η G παράχεται από τις G_{α} , τότε:

$$g = g_1 \dots g_m, g_i \in G_{\alpha_i} \text{ και}$$

με "στοιχειώδεις αναχωδές" προκύπτει
την συνθήκη όπως στο συμπέρασμα.
για $g \neq 1$.

Μουαδικότητα:

$$g_{i_1} \dots g_{i_n} = x_{j_1} \dots x_{j_k}, \text{ όπου}$$

$n, k > 0, g_{i_j} \neq 1, x_{j_k} \neq 1,$

$$g_{2j} \in G_{\alpha_j}, \quad x_{j,r} \in G_{\beta \cdot r}$$

$$\text{και } G_{\alpha_j} \neq G_{\alpha_{j+1}}$$

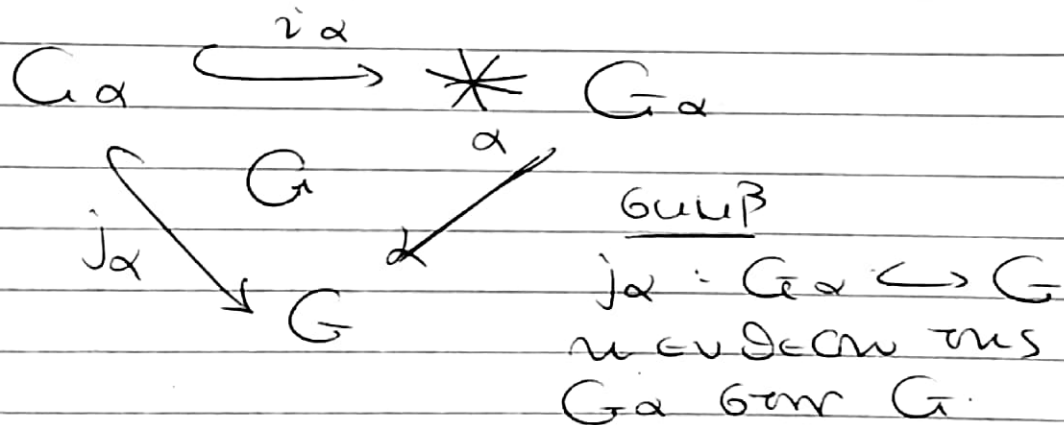
$$G_{\beta \cdot r} \neq G_{\beta \cdot r+1}$$

$$\Rightarrow g_{21} \dots g_{1n} x_{j_2}^{-1} \dots x_{j_1}^{-1} = 1$$

Αν n ανωθεν \uparrow εξω που προκύπτει με στοιχειώδεις αναστροφές είναι λιγότερο κατά \uparrow εύκολο σε α και \downarrow μπορεί να γραφτεί -----

□

Για το επόμενο :



από την καθορισμένη ιδιότητα υπάρχει $\varphi : * G_{\alpha} \rightarrow G$ με

$$\varphi \circ i_{\alpha} = j_{\alpha}$$

- Είναι επί γιατί $G = \langle G_{\alpha} | \alpha \rangle$.
- Είναι 1-1 " ανηχη απεικονίζονται σε "ανηχη".