Μάθημα 14:

Πρόταση: Έστω (i, j, k) η βάση της $su(2)$.

(α) ο πίνακας της $ad: su(2) \to gl(su(2))$ στα ξ_k, δηλ. $ad\,\xi_k$ ως προς την $\{i, j, k\}$ είναι η_k.

αποδ: Από προηγ. πρόταση ισχύει ότι $ad_{\xi_k}(\xi_l) = \xi_m$, όπου (k, l, m) κυκλική μεταθ. των $1, 2, 3$. Από αυτό το λεγόμενο προκύπτει άμεσα ότι ο πίνακας της $ad\,\xi_k$ είναι ο η_k.

(β) Αρχικά για κάθε g έχουμε το ακόλουθο μεταθ. διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
su(2) \arrow[r, "Adg"] & su(2) \arrow[d, "\chi^{-1}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "\varphi(g)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Αφού φ είναι ομομορφ. ουδέν.

$\varphi(\exp(z\xi_k))$ είναι 1-παρ. αντίστ.

αν ταυτίζουμε την χ με τον πίνακά του ως προς (e_1, e_2, e_3) στην (ξ_1, ξ_2, ξ_3), τότε είναι ο ταυτοτικός.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi\left(\exp(t\xi_k)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(\xi_k)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp\left(t\, ad_{\xi_k}\right) = ad_{\xi_k} - u_k$$

(πίνακας του ad_{ξ_k} ως προς την βάση (ξ_1, ξ_2, ξ_3)).

$$\rightarrow \varphi\left(\exp(t\xi_k)\right) = \exp(z\, u_k).$$

(γ) για κάθε $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{\alpha}\| = 1$

$$\Rightarrow \varphi\left(\exp(z\, \chi \vec{a})\right) = Rot(\vec{a}, 2t)$$

<u>απόδειξη</u>: Θεωρούμε τον τύπο της $Rot(\vec{a}, 2t)(\vec{x}) =$

$$\vec{x} + \left(1-\cos(2t)\right)\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{x}\right) + \sin(2t)\,\vec{a}\times\vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Rot(\vec{a}, 2t)(\vec{x}) = 2\left(\vec{a}\times\vec{x}\right) \quad (*)$$

αν $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right) \Rightarrow$

$$(*) = 2\left(e_1\times\vec{x}\right)a_1 + 2\left(e_2\times\vec{x}\right)a_2 + 2\left(e_3\times\vec{x}\right)a_3.$$

Άρα ο πίνακας ως προς τη βάση $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ είναι ο:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τώρα, όμοια με πριν:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi\left(\exp \chi\vec{a}\right) = ad_{\chi\vec{a}}$$

(4)

και όμοια ως προς τη βάση $\{I, J, K\}$ ο πίνακάς της ταυτίζεται με τον προηγούμενο.

$$\left(\chi_{\bar{a}}^{\gamma} = a_1 I + a_2 J + a_3 K \right).$$

(δ). η φ είναι επί.

<u>αποδ</u>: Άμεσο από το (γ).

$\square$.

<u>Παρατήρηση</u>. Για τον πυρήνα της Ad:

$$\ker Ad = \left\{ g \in SU(2) \,\middle|\, Ad_g = id_{su(2)} \right\}.$$

Έστω $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$.

$Ad_g I = I \Leftrightarrow gI = Ig$ και όμοια

$gK = Kg$, $gJ = Jg$. $\Rightarrow b = 0$, $a \in \mathbb{R}$

Αφού $\det(g) = 1 \Rightarrow g = \pm I_2$

$\rightarrow \ker Ad = \{\pm I_2\} = \mathbb{Z}_2$.

Συνεπώς, προκύπτει σ.α.α.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SU(2) \xrightarrow{\varphi} SO(3) \rightarrow 1$$

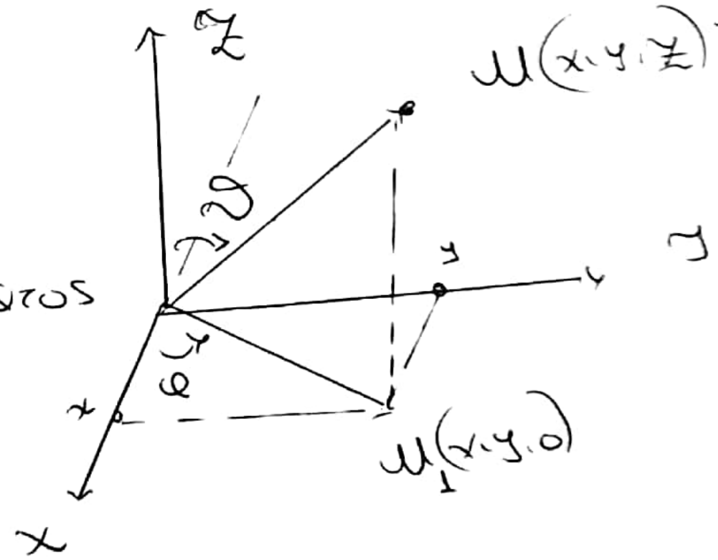
<u>Σχόλιο</u>: Στην αλγεβρική τοπ. λέμε ότι η $SU(2)$ είναι <u>double</u> <u>cover</u> της $SO(3)$.

Spherical Harmonics.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

φ = γεωγραφικό μήκος $\in [0, 2\pi]$

ϑ = γεωγραφ. πλάτος $\in [0, \pi]$.



$x = r\cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$

$z = r\cos\vartheta$, $r = d(O, M) = \|\vec{OM}\|$.

Αλλαγή συντεταγμένων.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{*\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\emptyset\}.$

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \big(\underbrace{r\cos\varphi\sin\theta}_{x(r,\theta,\varphi)},\ \underbrace{r\sin\varphi\sin\theta}_{y(r,\theta,\varphi)},\ \underbrace{r\cos\theta}_{z(r,\theta,\varphi)}\big)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r(-\sin\varphi\sin\theta) \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \det \underbrace{J(\varphi)}_{\text{Jacobian}} = r^2\sin\theta.$$

Στοιχείο Όγκου:

$$dV = \det J(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Στοιχείο εμβαδού:

$$ds = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \right\| d\theta\, d\varphi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

⊕ Αν το θέλω κανονικοποιημένο

$$d\mu = \frac{1}{4\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

<u>Ορσ.</u>: Ο $L^2(S^2)$ είναι ο χώρος Hilbert των συναρτήσεων $\varphi: S^2 \to \mathbb{C}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες ως προς το εσωτερικό γινόμενο.

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int_{S^2} \overline{\varphi_1(\theta,\varphi)} \, \varphi_2(\theta,\varphi) \, d\mu$$

(α) <u>Ανάδελτα</u>: Αν $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$

ορίζουμε

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} d\varphi$$

(β) <u>Λαπλασιανή</u>:

$$\Delta_{\mathbb{R}^3}(\varphi) = \nabla^2(\varphi), \text{ δηλαδή}$$

$$\nabla^{(2)}(\varphi) = \Delta_{\mathbb{R}^3}(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (8)$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}.$$

όπου

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

η οποία λέγεται <u>αρμονική λαπλασια-</u>
<u>νή</u>

<u>Ορσ.</u>: Μια $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ C^2-

συνάρτηση λέγεται <u>αρμονική</u>

αν $\Delta \varphi = 0$.

<u>Αναπαραστάσεις Ομάδων σε χώ-</u>
<u>ρους συναρτήσεων.</u>

Έστω $f \in \mathbb{R}^3$ και $g \in SO(3)$ (9)

Ορίζουμε $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$ (*).

Η (*) ορίζει μια απειροδιάστατη αναπαράσταση.

$$e : SO(3) \longrightarrow \underbrace{F(\mathbb{R}^3)}$$

χώρος συναρτήσεων του $\mathbb{R}^3$

Από (*) είναι σαφές ότι

$$e : SO(3) \longrightarrow GL(L^2(\mathbb{R}^3)) \text{ ή } GL(L^2(S^2))$$

(ο λόγος που αυτό συμβαίνει είναι διότι για $g \in SO(3)$ ⇝ $\det(g) = 1$

ένος πίνακα που την αναπαριστά

οπότε αν $y = g^{-1}x \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(g^{-1}(x))|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^2 dy < \infty$$

$\cdot |J(g)| = 1$

Jacobian της g.

Θ.Δ.Ο. οι αρμονικές συναρτήσεις είναι $P^{l} = \{$ομογενών πολυωνύμων βαθμού l στο $\mathbb{R}^3$ με μιγαδικούς συντ.$\}$.

Απ. $P \in P^{(l)} \cancel{<} 6$

$$P(tx, ty, tz) = t^{l} P(x, y, z)$$

Επειδή, P είναι ομογενές, αρκεί να γνωρίζουμε την τιμή που παίρνει στη σφαίρα.

<u>Π.χ.</u>: $P(x, y, z) = x^2 y^3 + 3y^4 z - 7xy^2 z^2$.