(β) $U(n)$, $SU(n)$ είναι συμπαγείς και συνεκτικές

(συμπάγεια ως κλειστά και φρ. υποσύνολα $GL(n,\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$)

- $SU(n)$ απλά συνεκτική
- $U(n)$ <u>όχι</u> απλά συνεκτική.

<u>Μάθημα 10</u>

<u>Παράδειγμα</u>: (Πυκνή καμπύλη στον τόρο) Έστω

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και

$\gamma(t) : \mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1$

με $\gamma(t) = \left(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i a t}\right)$

και $\gamma(\mathbb{R}) = G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{ia\theta} \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$G \le GL(2,\mathbb{C})$. Όχι κλειστό

Αρχικά $S^1 \times S^1$ μπορεί να ειδωθεί ως κλειστή υποομάδα της $GL(2,\mathbb{C})$ ως εξής:

$$S^1 \times S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \middle| \ \theta, \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

↪ γραμμική ομάδα α.ε.

άρα αρκεί νδο. $\gamma(\mathbb{R})$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του T^2.

Αποδεικνύεται ότι $\gamma(\mathbb{R}) \subsetneq T^2$ είναι πυκνό, οπότε αν $\gamma(\mathbb{R})$ κλειστό $\gamma(\mathbb{R}) = T^2$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Συμπάγεια

Ορσ.: Η γενική γραμμική ομάδα G είναι συμπαγής αν

(α) Για κάθε $(A_n)_n \subseteq G$ τ.ω. $A_n \to A \Rightarrow A \in G$

(β) $\exists c > 0$ τ.ω. $\forall A \in G: |A_{ij}| \le c$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Παρατήρηση: Οι $O(n)$ και $SO(n)$ είναι συμπαγείς $\subseteq GL(n,\mathbb{R})$

Η ① ισχύει, διότι οι σχέσεις

$$\left\{\begin{array}{l} A^t \cdot A = I \\ \det A = 1 \end{array}\right\}$$ διατηρούνται στα όρια και οι ②

γιατί $A \cdot A^t = I \Rightarrow \|A\| = 1$ στο $\mathbb{R}^n$.

Ομοια για τις $U(n)$, $SU(n)$.

<u>Ορσ.</u> Η γραμμική ομάδα G είναι <u>συνεκτική</u> αν για κάθε $A, B \in G$ (πίνακες) υπάρχει μονοπάτι $\gamma : [a,b] \to G$ με $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$.

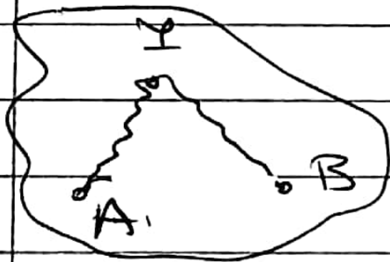
<u>Πρόταση:</u> Η συνεκτική συνιστώσα της G που περιέχει το I_n είναι υποομάδα της G

απόδειξη Έστω G_+ η

σ.σ που $I \in G_+$ και $A, B \in G_+$
συνεπώς, υπάρχουν $\gamma, \delta : [0,1] \to G_+$

$\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A$

$\delta(0) = I$, $\delta(1) = B$.



Τότε $\gamma(t)\delta(t)$ είναι
μονοπάτι που ενώνει
I με AB. $\Rightarrow$
$AB \in G_+$

Επίσης $(\gamma(t))^{-1}$ μονοπάτι

που ενώνει I με $A^{-1} \Rightarrow$
$A^{-1} \in G_+$

$\square$

Παραδείγματα

(α) $GL(n, \mathbb{C})$ συνεκτικό, $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

- για $n=1$: $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$
συνεκτικό.

Για $n \geq 1$, αν $A \in GL(n, \mathbb{C})$ τότε είναι τριγωνίσιμος

$\Rightarrow \exists C$ αντιστρ. : $A = C B C^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ άνω τριγ.

Αφού A αντιστρ. $\Rightarrow \lambda_i \neq 0, \forall i$
αφού $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

Έστω $B(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (1-t)* \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

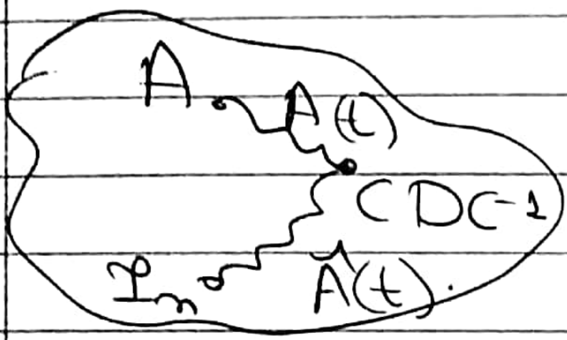
Ορίζουμε $A(t) = C B(t) C^{-1}$

Άρα, $A(t)$ μονοπάτι που ενώνει A με $C D C^{-1}$
όπου
$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Ορίζουμε $\lambda_i(t)$ το μονοπάτι που ενώνει λ_i με 1, $i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \tilde{A}(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix} C^{-1}$$

μονοπάτι από CDC^{-1} στο I_n και $\det \hat{A}(t) \neq 0, \forall t$ αφού $\lambda_i(t) \in \mathbb{C}^*, \forall t$.



Αν θεωρήσουμε το "γινόμενο" τους (με την αλγεβροτοπολογική έννοια)

$$A.\hat{A}(s) = \begin{cases} A(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \hat{A}(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

είναι μονοπάτι από A στο I_n.

$\square$

(6) $SL(n, \mathbb{C})$ είναι συνεκτική για $n \geq 1$.

<u>απόδειξη</u>: Όμοια με πριν.

Παρατηρούμε ότι

$$A(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (1-t)* \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in SL(n, \mathbb{C})$$

γιατί $\det A = \det A(t) = 1$

Όμως $\det \hat{A}(t) = \lambda_1(t) \cdots \lambda_n(t)$

Αντικαθιστούμε $\lambda_n(t)$ με

$$\lambda_n(t) = \frac{1}{\lambda_1(t) \cdots \lambda_{n-1}(t)}$$

μονοπάτι από το λ_n στο 1

$(\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n = 1)$

$$\hat{A}(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 / \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) \end{pmatrix} C^{-1}$$

μονοπάτι από CDC^{-1} στο I.

) $U(n)$ και $SU(n)$ είναι συνεκτικές, $\forall n \geq 1$.

<u>απόδειξη</u> Έστω $U \in U(n)$

$\Rightarrow UU^* = U^*U = I_n$

$\Rightarrow$ υπάρχει ορθοκανονική βάση $(v_1, \dots, v_n)$ από ιδιοδιανύσματα του U με αντίστοιχες ιδιοτιμές $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$

αν $U_1 = (v_1, \dots, v_n)^{-1} \in U(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = U_1 \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

Θέτουμε $U(t) = U_1 \begin{pmatrix} e^{i(1-t)\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i(1-t)\theta_n} \end{pmatrix} U_1^{-1}$

μονοπάτι από το U στην I_n με $U(t) : [0,1] \to U(n)$

Η Άλγεβρα Lie μιας Ομάδας Lie

Έστω $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ γρ. ομάδα Lie. Θέτουμε

$$\mathfrak{g} = \{ X = \gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \text{ διαφορίσιμη με } \gamma(0) = I \}$$

$= T_I(G)$ (εφαπτόμενος χώρος στο I)

Σημειώσαμε ότι αν G μια ομάδα Lie.

(Ορσ. Μια ομάδα G λέγεται ομάδα Lie αν G είναι διαφορική πολ/τητα πεπερ. διάστασης και οι πράξεις πολ/σμού και αντιστροφής είναι (C^∞).)

και $H \leq G$ κλειστή $\Rightarrow$ H είναι εμφυτευμένη ομάδα Lie (με τη διαφορική δομή εμφυτευμένης υποπολ/τητας και τη σχετική τοπολογία.)

Άρα έχει νόημα ο ορισμός του $\mathfrak{g}$.

Θεώρημα.

(α) $\mathfrak{g}$ είναι δ. υπόχωρος του $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

(β) $X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \exp(tX) \in G, \forall t$.

(γ) Αν $X \in \mathfrak{g}$ και $g \in G$ ⟹

$g X g^{-1} \in \mathfrak{g}$

(δ) $\mathfrak{g}$ είναι κλειστό ως προς των μεταθετών πινακών

(δηλ. είναι υποάλγεβρα
δ.ε του $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$)

<u>απόδειξη</u>

Αρχικά $X \in T_I G$ μπορούν να θεωρηθούν ως πίνακες αφού

$$G \xhookrightarrow{i} GL(n, \mathbb{R})$$

smooth embedded (άρα και smooth immersion)

$$T_I G \equiv d_I(i)\left(T_I(G)\right) \leq T_I GL(n, \mathbb{R})$$

$$\cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

ως δ.χ.

(α) Έστω $X \in \mathfrak{g}$ και $t \in \mathbb{R}$

Τότε, υπάρχει $\gamma : \overset{\circ}{\underset{\cap}{\ }}\,\mathcal{I} \to G$ C^∞

τ.ω. $\gamma(0) = I$ και $\gamma'(0) = X$

Θεωρούμε $t \mapsto \gamma(t\lambda)$
που διέρχεται για $t=0$
από το I και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα λX οπότε

$\Rightarrow \lambda X \in \mathfrak{g}$.

- Έστω $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ και

$\gamma_i : I \to G$ τ.ω. $\gamma_i(0) = I$

και $\gamma_i'(0) = X_i$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)\right)\Big|_{t=0}$$

$= X_1 + X_2 \in \mathfrak{g}$.

δ) Προφανώς αν $\forall t \in \mathbb{R}$
$\exp(tX) \Rightarrow \gamma(t) = \exp(tX)$

$\Rightarrow \gamma'(0) = X$.

Αντίστροφα, έστω $X \in \mathfrak{g}$.

$\Rightarrow \exists\ \gamma : \mathbb{R} \to G$ τ.ω.

$$\left.\frac{d}{dt}\gamma(t)\right|_{t=0} = X, \quad \gamma(0) = \mathbb{1}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor

$$\gamma\left(\frac{t}{k}\right) = \mathbb{1} + \frac{t}{k}X + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{t}{k}X + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{\gamma\left(\frac{t}{k}\right)}_{\in G}\Big)^k = \exp\left(tX + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k = \exp(tX) \in G$$

αφού G κλειστή.

(γ) Έστω $X \in \mathfrak{g}$ και $g \in G$

$$gXg^{-1} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp\left(t\left(gXg^{-1}\right)\right)$$

και $\exp\left(t\left(gXg^{-1}\right)\right)$

$$= \exp\left(g\left(tX\right)g^{-1}\right),$$

$$= g \underbrace{\exp(tX)}_{\in G} g^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow \exp t\left(gXg^{-1}\right) : \mathfrak{g} \to G$$

και έχουμε το ζητούμενο

(δ). Έστω $X, Y \in \mathfrak{g}$ τότε

$$\exp(tX),\ \exp(-tX) \in G$$

$$\Rightarrow \exp(tX)\, Y \exp(-tX) \in \mathfrak{g}.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\exp(tX)\, Y \exp(-tX)\right)$$

$$\overset{\text{Leibniz}}{=} XYe^{0} + \left(e^{0}Y\right)(-X)$$

$$= [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

Παραδείγματα:

(α) $G = SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

Θ.δ.ο. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid Tr\, X = 0\}$.

Πράγματι, θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ με

$\gamma(t) = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

$\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = X$. Αρκεί ν.δ.ο. $\gamma(t) \in SL(n, \mathbb{R})$.

Όμως $\det \exp(tX) = \exp Tr X$

$= \exp(0) = 1$.

$\Rightarrow \gamma(?) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SL(n, \mathbb{R})$

(β) $O(n) = SO(n) \,\| =$

$= \{X \in \mathfrak{g}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^t = 0\}$.

Έστω $X : X^t = -X$

Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$

$\gamma(t) = \exp(tX)$. Τότε

$\gamma(t)(\gamma(t))^t = $

$= \exp(tx)\exp(tx^t)$

$= \exp(tx)\exp(-tx) = I$

Αντίστροφα, έστω.

$\gamma : \mathbb{R} \to O(n) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$

$I = \gamma(t) \cdot \gamma(t)^T \Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t)\gamma(t)^t = \gamma'(0) + (\gamma'(0))^t$

$= 0.$