Αναπαραστάσεις Ομάδων Lie

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

2 Αυγούστου 2023

Περιεχόμενα

1 Άλγεβρες Lie

Ορισμός 1.1. Μια **άλγεβρα Lie** $\mathfrak{g}$ επί του $\mathbb{K}$ είναι ένας $\mathbb{K}$ - δ.χ. εφοδιασμένος με μια απεικόνιση $[,]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) $[X,Y]=-[Y,X]$, για κάθε $X,Y\in\mathfrak{g}$.

(β) Ικανοποιείται η ταυτότητα του Jacobi, δηλαδή για κάθε $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ ισχύει :

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0 \tag{1}$$

Η απεικόνιση $[,]$ καλείται **αγκύλη Lie**.

Παράδειγμα 1.1. Για κάθε $\mathbb{K}$ - δ.χ. $\mathfrak{g}$ αν $[,]=0$, τότε $\mathfrak{g}$ αποκτά δομή Lie άλγεβρας.

Παράδειγμα 1.2. Αν $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$ και $[X,Y]=X\times Y$ το σύνηθες εξωτερικό γινόμενο στο χώρο, τότε $(\mathfrak{g},[,])$ είναι μια άλγεβρα Lie.

Παράδειγμα 1.3. Έστω V ένας $\mathbb{K}$ - δ.χ. και $[u, v] = u \circ v - v \circ u$ ο μεταθέτης των u, v, όπου $u, v \in \mathscr{L}(V, V)$. Το ζευγος $(\mathscr{L}(V, V), [,])$ είναι μια άλγεβρα Lie.

Παράδειγμα 1.4. Από το παραπάνω παράδειγμα, ο χώρος $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων πάνω από το $\mathbb{K}$ αποκτά δομή άλγεβρας Lie με αντίστοιχη αγκύλη Lie των μεταθέτη $[X, Y] = XY - YX$.

Ορισμός 1.2. Ένας διανυσματικός υπόχωρος $\mathfrak{h}$ μιας άλγεβρας Lie $(\mathfrak{g}, [,])$ λέγεται **υποάλγεβρα Lie** της $\mathfrak{g}$ αν $[,]_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$.

Παράδειγμα 1.5 (Υποάλγεβρες Lie της $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$)**.** Τα ακόλουθα σύνολα είναι υποάλγεβρες Lie των $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ και

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

αντίστοιχα.

(α) $\mathfrak{SO}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^t = 0\}$.

(β) $\mathfrak{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

Ορισμός 1.3. Έστω $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ δύο άλγεβρες Lie. Ένας **μορφισμός αλγεβρών Lie** είναι μια γραμμική απεικόνιση $\varphi \colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, όπου

$$\varphi\left([X, Y]_1\right) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_2\,, \quad \text{για κάθε } X, Y \in \mathfrak{g}_1.$$

Παρατήρηση 1.1. Έστω $(\mathfrak{g}, [,])$ άλγεβρα Lie και $\{e_1, \ldots, e_d\}$ μια βάση του $\mathfrak{g}$. Τότε, για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ ισχύει ότι

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k e_k.$$

Εφόσον $[,]$ είναι διγραμμική μορφή, τότε χαρακτηρίζεται πλήρως από τα c_{ij}^k τα οποία λέγονται **δομικές σταθερές**.

Παρατήρηση 1.2. Έστω $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ δύο άλγεβρες Lie με $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_2 < \infty$ με ίσες δομικές σταθερές. Τότε υπάρχει ισομορφισμός αλγεβρών Lie μεταξύ των $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$.

Ορισμός 1.4. Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie με $\dim \mathfrak{g} < \infty$. Μια **αναπαράσταση** της $\mathfrak{g}$ είναι ένας μορφισμός αλγεβρών Lie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, όπου V είναι ένας $\mathbb{C}$ - δ.χ. με $\dim V < \infty$ και $\mathfrak{gl}(V)$ άλγεβρα Lie με αγκύλη Lie των μεταθέτη.

Παράδειγμα 1.6. Έστω $\mathfrak{g} = \mathfrak{SO}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R} \mid X + X^t = 0\}$ με βάση

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ h_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

με $[h_k, h_\ell] = h_m$, όπου k, ℓ, m κυκλική μετάθεση των $(1,2,3)$, δηλαδή $[h_1, h_2] = h_3$, $[h_2, h_3] = h_1$ και $[h_3, h_1] = h_2$. Θεωρώ του 2×2 μιγαδικούς πίνακες $\xi_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ με $i = 1, 2, 3$ όπου

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οι οποίοι χαρακτηρίζονται ως πίνακες Pauli. Όπως, πριν $[\xi_k, \xi_\ell] = \xi_m$, όπου k, ℓ, m κυκλική μετάθεση των $(1,2,3)$, δηλαδή $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$, $[\xi_2, \xi_3] = \xi_1$ και $[\xi_3, \xi_1] = \xi_2$. Άρα, η απεικόνιση $h_k \mapsto \xi_k$ είναι αναπαράσταση της άλγεβρας Lie στο $\mathbb{C}^2$, δηλαδή $\rho\colon \mathfrak{SO}(3) \to \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.

Ορισμός 1.5. Δύο αναπαραστάσεις $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ λέγονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T\colon E_1 \to E_2$ τέτοιος ώστε

$$\rho_2(X) \circ T = T \circ \rho_1(X), \quad \text{για κάθε } X \in \mathfrak{g}.$$

Δηλαδή για κάθε $X \in \mathfrak{g}$, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\rho_1(X)"] \arrow[d, "T"'] & E_1 \arrow[d, "T"] \\ E_2 \arrow[r, "\rho_2(X)"'] & E_2 \end{tikzcd}$$

2 Εκθετική Απεικόνιση

Ορισμός 2.1. Έστω $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Ορίζουμε ως **εκθετική απεικόνιση** :

$$\exp(tX) = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

Ιδιότητες 2.1. Έστω $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$

(α) $\exp(0) = I_d$

(β) $\exp(sX) \cdot \exp(tX) = \exp(s+t)X$, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$.

(γ) Ο $\exp(X)$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο $\exp(-X)$, άρα $\exp\colon \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

(δ) Ισχύει ότι $\exp(X+Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$ αν και μόνο αν $[X, Y] = 0$.

Απόδειξη. Άσκηση □

Λήμμα 2.1. Έστω $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Η απεικόνιση $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ με $\gamma(t) = \exp(tX)$ είναι διαφορίσιμη (ως προς t) και ισχύει

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \exp(tX) = X \exp(t_0 X) = \exp(t_0 X) X.$$

Ειδικότερα,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX) = X \in T_I \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} X^n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} X^n \frac{t_0^{n-1}}{(n-1)!} = X \exp(t_0 X).$$

□

Πρόταση 2.1. Η $\exp\colon \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της στο 0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση της $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης. Έστω $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Τότε, έχουμε ότι $\gamma(t) = tX \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, διέρχεται από το 0 για $t = 0$ και $\gamma'(0) = X$. Τώρα, αν $\delta(t) = \exp \circ \gamma(t) = \exp(tX)$, παρατηρούμε ότι $\delta(0) = I$ και $\delta'(0) = X$. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι $d\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})}$. □

Πόρισμα 2.1. Υπάρχει ανοικτή περιοχή U_0 του $0 \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ και ανοικτή περιοχή V_0 του $I \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ ώστε $\exp|_{U_0}\colon U_0 \to V_0$ είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. Από την παραπάνω πρόταση, έχουμε ότι $Jd\exp(0) = I$ (Ιακωβιανός πίνακας στο 0) είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, υπάρχουν U_0, V_0 συνεκτικές, ανοικτές περιοχές των $0, I$ αντίστοιχα ώστε $\exp|_{U_0}\colon U_0 \to V_0$ να είναι αμφιδιαφόριση. □

Ορισμός 2.2. Από το παραπάνω πόρισμα, η απεικόνιση $\log \coloneqq \exp^{-1}\colon V_0 \to U_0$ λέγεται **λογάριθμος** και έχουμε ότι

$$\log(I+X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{για κάθε } X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}),\ \|X\| < 1.$$

Πρόταση 2.2. Για κάθε $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ ισχύει ότι

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp\left[t(X+Y) + \frac{[X,Y]}{2}t^2 + O\left(t^3\right)\right]. \tag{2}$$

Απόδειξη. Για t κοντά στο 0 ισχύει ότι

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \left(I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O\left(t^3\right)\right) \cdot \left(I + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + O\left(t^3\right)\right)$$

δηλαδή

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = I + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}\left(X^2 + Y^2 + 2XY\right) + O\left(t^3\right).$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \exp\left[t(X+Y)+\frac{[X,Y]}{2}t^2+O\left(t^3\right)\right] \\ = \quad & I+t(X+Y)+\frac{t^2}{2}(XY-YX)+\frac{t^2}{2}\left(X^2+Y^2+XY+YX\right)+O\left(t^3\right) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.2 (Baker - Campbell - Hausdorff Formula)**.** Για κάθε $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ισχύει ότι

$$\exp(X+Y)=\lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(\frac{X}{n}\right)\cdot\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right]^n \tag{3}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\left[\exp\left(\frac{X}{n}\right)\cdot\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right]^n=\left[\exp\left(\frac{1}{n}(X+Y)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n=\exp\left[X+Y+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει εφαρμόζοντας διαδοχικά την Πρόταση 2.2. Από την συνέχεια της exp έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.3. Για κάθε $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ισχύει ότι $\det(\exp X) = \exp(\mathrm{Tr}X)$.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει S αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε

$$SXS^{-1}=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

όπου J_i είναι τα αντίστοιχα Jordan blocks. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\det(\exp J_i) = \exp(\mathrm{Tr}J_i)$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και από την σχέση

$$S\exp(X)S^{-1}=\begin{pmatrix} \exp J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp J_k \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι

$$\det\exp X=\prod_{i=1}^{k}\det\exp J_i=\prod_{i=1}^{k}\exp\mathrm{Tr}J_i=\exp\left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Tr}J_i\right)=\exp\mathrm{Tr}X$$

□

3 Μονοπαραμετρικές Υποομάδες

Ορισμός 3.1. Μια **1-παραμετρική υποομάδα** της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ είναι μια διαφορίσιμη $f\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ τέτοια ώστε

$$f(t)\cdot f(s) = f(t+s), \quad \text{για κάθε } t,s \in \mathbb{R}.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $f(0) = I_n$.

Πρόταση 3.1. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ μια 1-παραμετρική υποομάδα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Τότε, υπάρχει μοναδικός $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ ώστε $f(t) = \exp(tX)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(t_0+s)-f(t_0)}{s} = \lim_{s\to 0} f(t_0)\left(\frac{f(s)-f(0)}{s}\right) = f(t_0)\cdot\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$$

Για να ισχύει η ζητούμενη σχέση πρέπει να ισχύει ότι ο ζητούμενος πίνακας X είναι ο $X = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$. Αν λοιπόν $X = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\left.\frac{d(\exp(tX))}{dt}\right|_{t=t_0} = X\exp(t_0X).$$

Άρα, οι συναρτήσεις $f(t), \exp(tX)$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, συνεπώς $f(t) = \exp(tX)$. □

Ορισμός 3.2. Το $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ που ορίσθηκε στην παραπάνω πρόταση λέγεται **απειροστός γεννήτορας** της f.

Παρατήρηση 3.1. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι :

(α) $f'(0) = X$ και

(β) $(f(t))^{-1} f'(t) = X$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1. Στο $\mathbb{R}^3$ οι περιστροφές στους άξονες Ox, Oy, Oz δίνουν τις ακόλουθες 1-παραμετρικές υποομάδες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \text{ και } \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε, από την απόδειξη της Πρόταση 3.1, προκύπτει ότι αυτοί οι πίνακες είναι της μορφής $\exp(h_i),\ i = 1, 2, 3$, όπου

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ h_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Γραμμικές Ομάδες Lie

Αρχικά θα δώσουμε το γενικό ορισμό μιας ομάδα Lie αν και σύντομα θα στρέψουμε το ενδιαφέρον μας σε μια γενική υποκατηγορία τους, τη λεγόμενες γραμμικές ομάδες Lie.

Ορισμός 4.1 (Ομάδα Lie)**.** Μια ομάδα G λέγεται **(πραγματική) ομάδα Lie** αν είναι μια πραγματική διαφορική πολλαπλότητα τέτοια ώστε οι πράξεις πολλαπλασιασμού και αντιστροφής να είναι διαφορίσιμες (C^∞).

Παρατήρηση 4.1. Η γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ είναι ομάδα Lie με διαφορική δομή που αποκτά ως ανοικτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n^2}$ ή του $\mathbb{R}^{2n^2}$ (ανάλογα αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Αν ειδωθεί ως (τοπολογικός) υπόχωρος ευκλείδειου χώροι είναι άμεσο ότι οι πράξεις αντιστροφής και πολλαπλασιασμού είναι διαφορίσιμες.

Θεώρημα 4.1 (Κλειστής υποομάδας)**.** Κάθε κλειστή υποομάδα H μιας ομάδας Lie G είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της G και ομάδα Lie μια διαφορική δομή που προκύπτει από την φυσιολογική εμφύτευση $H \overset{i}{\hookrightarrow} G$.

Ορισμός 4.2. Μια **γραμμική ομάδα Lie** είναι μια κλειστή υποομάδα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Παράδειγμα 4.1. Ο $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμική ομάδα Lie. Αυτό μπορεί να προκύψει με των εξής τρόπο : Θεωρήστε την κλειστή, συνεχή και 1-1 απεικόνιση

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & I_n & & x_1 \\ \hline & & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \cdots & & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}).$$

Παράδειγμα 4.2. Η $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ είναι κλειστή υποομάδα της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Πράγματι, κάθε $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ είναι της μορφή $A = B + iC$, όπου $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$. Θεωρούμε την $\mathbb{R}$ - γραμμική απεικόνιση $A \mapsto \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ η οποία είναι μορφισμός ομάδων, συνεχής και κλειστή.

Παρατήρηση 4.2. Από το παραπάνω παράδειγμα είναι σαφές ότι κάθε γραμμική ομάδα Lie είναι κλειστή υποομάδα της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 4.3. Θεωρούμε την $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. Αφού det είναι συνεχής, παρατηρούμε ότι $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}\{1\}$ κλειστό, άρα είναι γραμμική ομάδα Lie. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ είναι γραμμική ομάδα Lie.

Παράδειγμα 4.4. Θεωρούμε την ομάδα ορθογώνιων πινάκων

$$O(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = A^t A = I_n\right\}.$$

Η απεικόνιση $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ni A \mapsto AA^t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ είναι συνεχής με την προεικόνα του I_n να είναι η $O(n)$, άρα $O(n)$ κλειστό υποσύνολο του $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Παράδειγμα 4.5. Όμοια την $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ μπορεί κάποιος να δείξει ότι η $\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ είναι κλειστή υποομάδα της $O(n)$, άρα γραμμική ομάδα Lie. Θα δούμε στην συνέχεια, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να προκύψει από το γεγονός ότι η $\mathrm{SO}(n)$ είναι η συνεκτική συνιστώσα της $O(n)$ που περιέχει το I_n.

Παράδειγμα 4.6. Θεωρούμε την ομάδα των μοναδιαίων πινάκων

$$U(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = I_n\}$$

η οποία όμοια με την $O(n)$ είναι κλειστή υποομάδα της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $A \in U(n)$, τότε $|\det(A)| = 1$, δηλαδή $\det(A) = \exp(i\vartheta) \in U(1) = \mathbb{S}^1$ με $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.7. Το σύνολο $\mathrm{SU}(n)$ είναι κλειστό υποσύνολο της $U(n)$.

Παρατήρηση 4.3. Έχουμε την εξής σχέσεις υποσυνόλων $\mathrm{SO}(n) \subseteq O(n) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ και $\mathrm{SU}(n) \subseteq U(n) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Επίσης, ισχύει ότι $\det \colon U(n) \to U(1)$. Άρα, προκύπτει η ακόλουθη βραχεία ακριβής ακολουθία

$$I_n \to \mathrm{SU}(n) \overset{i}{\hookrightarrow} U(n) \xrightarrow{\det} U(1) \to 1.$$

Θα δείξουμε ότι η παραπάνω β.α.α. διασπάται, ειδικότερα υπάρχει $\varphi \colon U(1) \to U(n)$ μορφισμός ομάδων, ώστε $\det \circ \varphi = \mathrm{id}$. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω παρατήρηση έχουμε ότι $Z(U(n)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in U(1)\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi \colon U(1) \to U(n)$ με $\lambda \mapsto \lambda^{1/n} I_n$ και έχουμε το ζητούμενο. Άρα, η β.α.α. διασπάται και συμπεραίνουμε ότι $U(n) = \mathrm{SU}(n) \rtimes U(1)$ (το προκύπτων ημιευθύ γινόμενο από τη β.α.α.).

Παρατήρηση 4.4. Ισχύει ότι $Z(U(n)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in U(1)\}$.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $A \in Z(U(n))$. Αφού κάθε μοναδιαίος είναι και κανονικός, υπάρχει μοναδιαίος $P \in U(n)$ ώστε PAP^{-1} να είναι διαγώνιος. Αφού A ανήκει στο κέντρο έχουμε ότι $A = PAP^{-1}$ διαγώνιος. Πολλαπλασιάζοντας με στοιχειώδης πίνακες και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι A ανήκει στο κέντρο μπορούμε να δείξουμε ότι $A = \lambda I_n$ με $\lambda \in U(1)$. □

Παράδειγμα 4.8 (πυκνή καμπύλη στην τόρο)**.** Έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ που ορίζεται ως εξής $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i a t})$ με

$$S = \gamma(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi i t} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i a t} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

Αποδεικνύεται ότι $\gamma(\mathbb{R})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{T}^2$ και ότι $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}^1$ είναι μια γραμμική υποομάδα Lie της $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\gamma(\mathbb{R})$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο της $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

Συμπάγεια

Ορισμός 4.3. Μια γενική γραμμική ομάδα G είναι **συμπαγής** αν

(α) Για κάθε $(A_n)_n \subseteq G$ με $A_n \to A$, τότε $A \in G$

(β) Υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $A = (A_{ij}) \in G$ να ισχύει ότι $|A_{ij}| \leq C$, για κάθε i, j.

Ισοδύναμα, η G είναι συμπαγής αν είναι φραγμένο υποσύνολο (και προφανώς κλειστό) της αντίστοιχης γενικής γραμμικής ομάδας που περιέχεται. (Αυτό προκύπτει γιατί οι γενικές γραμμικές ομάδες είναι εφοδιασμένες με τη σχετική ευκλείδεια τοπολογία.)

Παράδειγμα 4.9. Οι $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ δεν είναι συμπαγείς αφού αν

$$A_n = \mathrm{diag}(n, 1/n, 1, 1, \ldots, 1)$$

τότε $\det A_n = 1$, για κάθε n αλλά $\|A_n\| \to \infty$.

Αναφορές

[1] Yvette Kosmann-Schwarzbach : *″Groups and Symmetries From Finite Groups to Lie Groups″*, Springer

[2] John M. Lee :*″Introduction to Smooth Manifolds″*, Springer 2nd Edition

[3] Wikipedia : Derivative of the exponential map

[4] Wikipedia: Closed-subgroup theorem