Μάθημα 1ο

Βιβλίο: Yvette Kosmann-Schwarzbach

- Symmetries and Representations

Το $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτικό (π.χ. με την δομή του $\mathbb{R}^{n^2}$) γιατί αν $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ συνεχής:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+) \cup \det^{-1}(\mathbb{R}_-)$$

Δράση: $\alpha : G \to \mathrm{Perm}(X)$ ομομορφ. ομάδων

$$\mathrm{Perm}(X) = \{\varphi : X \to X \mid \varphi \text{ 1-1 και επί}\}$$

- αν $g_0 \in G$: $\alpha_{g_0} : X \to X$

$$\alpha_{g_0}(x) = \alpha(g_0)(x), \quad \alpha_e = id_X$$

και $\alpha_{g_0} \circ \alpha_{g_0^{-1}} = \alpha_e = id_X$

②

<u>Ορσ</u>: Μια γραμμική αναπα[ράσταση] ... [δι]άσταση ϱ της G στον $\mathbb{C}$-δχ V είναι ένας μορφ[ισμός] ομάδων:

$$\varrho : G \to GL(V)$$

(α) $\varrho(g_1)(\varrho(g_2)(v)) = \varrho(g_1 g_2)(v)$

(β) $\varrho(g) : V \to V$ γραμμική

<u>Παράδειγμα</u> $G = GL(V)$

$\Rightarrow Id : GL(V) \to GL(V)$ είναι αναπ.

<u>Ορσ.</u> Διάσταση αναπαράστασ[ης]

$$\dim(\varrho) := \dim_{\mathbb{C}}(V)$$

<u>Ορσ.</u> Έστω G ομάδα και αναπαραστάσεις ϱ_1, ϱ_2 της G. Ένας <u>ισομορφισμός</u> με[τ]αξύ των $(\varrho_1, V_1), (\varrho_2, V_2)$

③

είναι ένας γραμμ. ισομορφ.

$$\varphi : V_1 \to V_2$$

τ.ω.

$$\boxed{\varphi \circ \rho_1(g)(v) = \rho_2(g) \circ \varphi(v)} \quad (*)$$

$\forall v \in V_1$

$\forall g \in G$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(g)} & V_1 \\ \varphi \downarrow & G & \downarrow \varphi \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(g)]{} & V_2 \end{array}$$

<u>Ισοδύναμα</u>: $\rho_2 = \varphi \circ \rho_1 \circ \varphi^{-1}$

<u>Σχόλιο</u>: Η $(*)$ έχει νόημα

ακόμα και όταν η φ δεν

είναι ισομορφισμός. Τότε

λέγεται "<u>intertwiner</u>".

(φ είναι G-μορφισμός

ή μορφισμός $\mathbb{C}G$-προτύ-

πων)

(4)

- Το πρόβλημα της θεωρ[ίας] αναπαραστάσεων είναι:

- Έστω G ομάδα. Ταξι[νο]μήσουμε τις αναπαραστά[σεις] της G ως προς ισο[μορφισμό].

Πρόταση: Οι κλάσεις $\mathbb{C}$ - αναπ. διάστασης m είναι σε 1-1 και επί αντ[ισ]τοιχία με το πηλίκο.

$$\frac{\operatorname{Hom}\left(G, GL_m(\mathbb{C})\right)}{GL_m(\mathbb{C})}$$

μέσω της δράσης συζυγί[ας] της $GL_m(\mathbb{C})$ στις $\operatorname{Hom}(\ldots$

Παραδείγματα

(α) $G = (\mathbb{Z}, +)$. Θέλω να βρω τις

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$$

(5)

Πρέπει $\rho(0) = Id$. Αν ξέρω το $\rho(1)$, τότε γνωρίζω της ρ αφού

$$\rho(n) = \rho(1)^n \quad (\text{μορφ. ολ.}).$$

Αντίστροφα, αν $A \in GL_m(\mathbb{C})$ ορίζεται αναπαρ. με $\rho^A(1) = A$

Άρα οι αναπαραστάσεις διαστ. m της $(\mathbb{Z}, +)$ είναι ακριβώς οι κλάσεις συζυγίας της $GL_m(\mathbb{C})$

$$A \sim B \iff B = PAP^{-1}$$

(ταξινομούνται αν αναχθούμε στην κανονική μορφή Jordan.).

(6) Έστω $G = \{1, g, \ldots, g^{n-1}\} = \langle g \rangle$

$$\rho : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C}).$$

Πρέπει $\rho(1) = Id$. και $\rho(g^k) = [\rho(g)]^k$.

⑥

Άρα η ρ καθορίζεται από το $\rho(g) := A$.

Επιλέγουμε ~~βά~~ βάση του $\mathbb{C}^n$ τ.ω.

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_l \end{pmatrix}$$

κανονική μορφή Jordan με

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

→ Jordan Blocks

Πρέπει $(\rho(g))^n = A^n = Id$

$\Rightarrow J_k^n = 0, \ \forall k = 1, \dots, l.$

Έστω $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \dots$

$J = \lambda Id + N$, επομένως

7

$$J^n = (\lambda Id + N)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^i Id N^{n-i}$$

$= \lambda Id$ ΓΙΑΤΙ $\lambda^n = 1$ και $N = 0$

$\Rightarrow J = \lambda Id$, άρα οι αναπαραστάσεις της G ταξινομούνται από τις n-οστές ρίζες της μονάδας.

<u>Ορσ.</u> Έστω $\rho : G \to GL(V)$

Μια υποαναπαράσταση της ρ είναι ένας G-αναλλοίωτος υπόχωρος $U \leq V$ δηλ. $\forall u \in U : \rho(g)(u) \in U$ $\forall g \in G$.

Τότε έχω αναπαράσταση

$\rho|_U : G \to GL(U)$.

<u>Παρατήρηση</u>. Αν $W \leq V$ G-αναλλοίωτος, τότε το

8

V/W είναι επίσης αναπαράσταση.

- $g\cdot(v+W) := g\cdot v + W$

Αν $v-v' \in W \Rightarrow \underbrace{g\cdot(v-v')}_{\in W}$

$\Rightarrow g\cdot v - g\cdot v' \in W$

<u>Ορσ.</u> Έστω $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ αναπ. της G. Ορίζω αναπ.

$$(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$$

με $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) :=$

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\rho_1(g)(v_1),\ \rho_2(g)(v_2)\right)$$

<u>Ορσ.</u> Μια αναπαράσταση $\rho: G \to GL(V)$ λέγεται <u>ανάγωγη</u> αν <u>δεν</u> υπάρχει μη τετρ. αναλλοίωτος υπόχωρος του V.

⑨

• Λέγεται πλήρως αναλύσιμη αν

$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, όπου

(ρ_i, V_i) ανάγωγες αναπ.

<u>Παράδειγμα</u>: Κάθε 1-διάστατη αναπ. είναι ανάγωγη.

<u>Μάθημα 2ο</u>

<u>Λήμμα (Schur)</u>

Έστω G πεπερ. ομάδα και V ανάγωγη αναπ. ($\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$)

Τότε κάθε γραμμική $\varphi : V \to V$ που μετατίθεται με την ρ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της ταυτ.

<u>απόδειξη</u>: Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή της φ ($\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$)

(10)

$\Rightarrow V_\lambda \neq 0$ G-αναλλοίωτο

Πράγματι, αν $v \in V_\lambda$, $g \in G$

$\varphi(g \cdot v) = \varphi \circ \rho(g)(v) =$

$= \rho(g) \circ \varphi(v) = \underbrace{\rho(g)(\lambda v)}_{\gamma\rho.}$

$= \lambda[\rho(g)(v)] = \lambda(g \cdot v)$.

Αφού V ανάγωγη $\Rightarrow$

$V = V_\lambda \Rightarrow \varphi = \lambda \, id_V$ $\square$

Πόρισμα: Αν V, W

ανάγωγες, πεπερ. διαστ., αναπαραστάσεις τότε το

$Hom^G(V, W) =$ μορφισμοί που είναι G-αναλλοίωτοι

$= \{0\}$ ή μονοδιάστατος $\mathbb{C}$-δ.χ.

<u>απόδειξη</u>

Έστω $\varphi : V \to W \in Hom^G(V,W)$
$\neq 0$

Αφού V, W ανάγωγες

$\Rightarrow$ $\ker\varphi = 0$ και $Im\varphi = W$

$\Rightarrow$ φ ισομορφισμός. με

$\varphi^{-1} \in Hom^G(V,W)$.

Τώρα, αν $\psi \in Hom^G(V,W)$

$\Rightarrow \psi \circ \varphi^{-1} \in Hom^G(V,V)$

λήμμα
$\Rightarrow \psi = \lambda\varphi \in \langle\varphi\rangle$.

$\square$

<u>Θεώρημα:</u> Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση αβελιανής είναι 1-διάστατη. (πεπερασμ.)

<u>απόδειξη:</u> Έστω (ρ, V)

(12)

Ανάγωγη αναπ. της G
Αρκεί ν.δ.ο. κάθε υπόχωρος $W \leq V$ είναι G-αναλλοίωτος.

Έστω $W \leq V$ και $g \in G$.
Τότε, αφού G αβελ, $\forall h \in G$

$$e(g) \circ e(h) = e(h) \circ e(g)$$

$\Rightarrow e(g) = \lambda \, id$ άρα ισχύει

$$e(g)(W) = \lambda \cdot W \subseteq W.$$

<u>Ορσ.</u>: Έστω V $\mathbb{C}$-δχ. με εσωτερικό γινόμενο (ερμιτιανό). Η αναπαράσταση $e : G \to Gl(V)$ λέγεται <u>unitary</u>. αν

$$\langle e(g)(v), e(g)(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

$\forall v, w \in V$ και $g \in G$.

- Μια αναπ. $\rho : G \to GL(V)$ λέγεται <u>unitarisable</u> αν μπορεί να εφοδιαστεί με ένα τέτοιο ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα και

$$\mathbb{C}G = \left\{ \text{ο δ.χ των μιγαδικών συναρτήσεων } u : G \to \mathbb{C} \right\}$$

(Γενικότερα, αν R δακτ. και G ομάδα ορίζεται ο δακτ.

$$RG = \left\{ f : G \to R \;\middle|\; |\operatorname{supp} f| < \infty \right\}\Big)$$

Έστω βάση $\{e_g\}_{g \in G}$ βάση όπου $e_g = \chi_{\{g\}}$.

Ορίζω $\lambda : G \to GL(\mathbb{C}G)$

$\lambda(g)(e_w) := e_{gw}$ και

επεκτείνω γραμμικά.

η λ ονομάζεται <u>αριστερή κανονική αναπαράσταση</u> της G.

$$\lambda(g)\left(\sum_{h\in G} v_h e_h\right) = \sum_{h\in G} v_h e_{gh}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $\rho: G \to GL(V)$ unitary τότε $\rho: G \to U(V)$

δηλ. $(\rho(g))^* = \rho(g^{-1}) = [\rho(g)]^{-1}$

<u>Λήμμα</u>: Έστω V μια unitary αναπαράσταση της G και $W \leq V$ G-αναλλοίωτος. Τότε, και ο $W^\perp$ είναι G-αναλλοίωτος

<u>απόδειξη</u>. Ν.δ.ο $gw \in W^\perp$

$\forall g \in G$, $\forall w \in W^\perp$

Έστω $v \in W \Rightarrow v = g(\underbrace{g^{-1}v}_{\in W})$

$\mu \in W^{\perp}$

$\Rightarrow \langle w, g^{-1}v \rangle = 0 \Rightarrow$

g unitary

$\langle gw, g(g^{-1}v) \rangle = 0.$

$\Rightarrow \langle gw, v \rangle = 0.$ $\square$.

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε V unitary αναπαράσταση της G με $\dim V < \infty$ δέχεται <u>ορθογώνια διάσπαση</u> (ευθύ άθροισμα) σε ανάγωγες υπό-αναπαραστάσεις.

<u>Θεώρημα</u> (Weyl's trick)

Έστω G πεπερ. ομάδα. Κάθε αναπαράσταση V με $\dim V < \infty$ είναι unitarisable.

απόδειξη

Ορίζουμε $\langle , \rangle' : V \times V \to \mathbb{C}$

με

$$\langle v, w \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gv, gw \rangle$$

$\circledast$ τ.σ.

(καθε χώρος V μπορεί να εφοδιαστεί με ένα εσωτερικό ερμ. γινόμενο)

$\square$

Συμβολισμός

$L^2(G)$ είναι ο δ.χ $\mathbb{C}G$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο.

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi_1(g)}\, \varphi_2(g).$$

Παρατήρηση. Το $\langle , \rangle$ είναι αντιγραμμικό ως προς φ_1 και γρ. ως προς φ_2.

(17)

<u>Ορσ.</u> Έστω $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ και (i,j) διατ. ζευγος με $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Η συνάρτηση $\rho_{ij} \in L^2(G)$ είναι η $g \mapsto \rho_{ij}(g)$

όπου $\rho_{ij}(g)$ το στοιχείο στην θέση (i,j) του $\rho(g)$.

Η συνάρτηση ρ_{ij} λέγεται συντελεστής του πίνακα $\rho(g)$.

Αν $\rho : G \to GL(V)$, τότε οι ρ_{ij} ορίζονται, αφού επιλέγει βάση για την V.

Αν $\rho : G \to U(V)$ τότε

αφού $(\rho(g))^* = \rho(g^{-1})$

→ σε ορθοκανονική βάση έχω

$$\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(g)}$$

(18)

Ορσ.: Ο χαρακτήρας της $\rho : G \to GL(V)$, $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, είναι η συνάρτηση $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$

$$\chi_\rho(g) := Tr[\rho(g)].$$

(ο ορισμός είναι καλά δοσμένος, αφού αν αλλάξουμε βάση οι πίνακες είναι όμοιοι και άρα έχουν το ίδιο ίχνος)

Ιδιότητες

(α) $\chi_\rho(1) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$

(β) $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{n} (\rho(g))_{ii}$

(γ) $\rho_1 \sim \rho_2 \Rightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$

ισόμορφ.

(δ) χ_ρ είναι σταθερή στις κλάσεις συζυγίας.

(ε) αν ρ unitary για κάποιο α, γ (και για κατάλληλη ορθ. βάση)

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

(στ) $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$

(ζ)* $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$

(→ εκτός ύλης)

Πρόταση: Έστω (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) αναπ. της G και $u: V_1 \to V_2$ γραμμική απ. ορίζει intertwiner $\tau_u: V_1 \to V_2$ με:

$$\tau_u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g) \circ u \circ \rho_1^{-1}(g)$$

απόδειξη

$$\rho_2(g) \circ \tau_u = \frac{1}{|G|} \sum_{h} \rho_2(gh) u \rho_1^{-1}(h)$$

20

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{k} e_2(k) \circ u \circ e_2(k^{-1}g)$$

$$= Tu \circ e_1(g)$$

$\square$

<u>Πρόταση</u>. Αν (e_1, V_1), (e_2, V_2) ανάγωγες G-αναπ. και $u: V_1 \to V_2$ γρ. και Tu ο αντίστοιχο interwiner.

(α) αν $e_1 \not\cong e_2 \Rightarrow Tu = 0$.

(β) αν $V_1 = V_2 = V$ και $e_1 = e_2 = e$ τότε

$$Tu = \frac{Tr(u)}{\dim(V)} Id.$$

<u>αποδ</u> (α) Λήμμα Schur

(β) Από Λήμμα Schur

(21)

$\tau_u = \lambda\, Id$, σωστά πώς

$$tr(\tau_u) = \sum_g \frac{tr(u)}{|G|}$$

$$= tr(u) \Rightarrow \lambda = \frac{tr(u)}{\dim(V)}.$$

Πρόταση: Έστω (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) ανάγωγες αναπαραστάσεις της G και σταθεροποιούμε βάσεις για τα V_1, V_2 αντίστοιχα.

(α) $\rho_1 \not\simeq \rho_2 \Rightarrow \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_{k\lambda} (\rho_1(g^{-1}))_{ji} = 0$

$\forall\, i, j, k, \lambda$.

(β) αν $V = V_1 = V_2$ και $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_g (\rho(g))_{k\lambda} (\rho(g^{-1}))_{ji} =$$

$$= \frac{1}{\dim(V)} \delta_{ki} \delta_{\lambda j}$$

Ορσ.: Έστω (V_1, ρ_1), (ρ_2, V_2) G-αναπ. Ορίζουμε

$$\langle \chi_{\rho_1} | \chi_{\rho_2} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g^{-1}) \chi_{\rho_2}(g)$$

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

(α) ασ $\langle (\rho_1) | (\rho_2) \rangle = 0$

(β) ασ $\langle e_{ij} | e_{kl} \rangle = \dfrac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim V}$

Θεώρημα: (Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων)

Έστω (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) ανάγωγες

(23)

(α) αν $e_1 \neq e_2 \Rightarrow \langle x_{p_1} | x_{p_2} \rangle = 0$.

(β) Αν e αυθαίρετο $\Rightarrow \langle x_p | x_p \rangle = 1$

$(\Leftarrow)$.