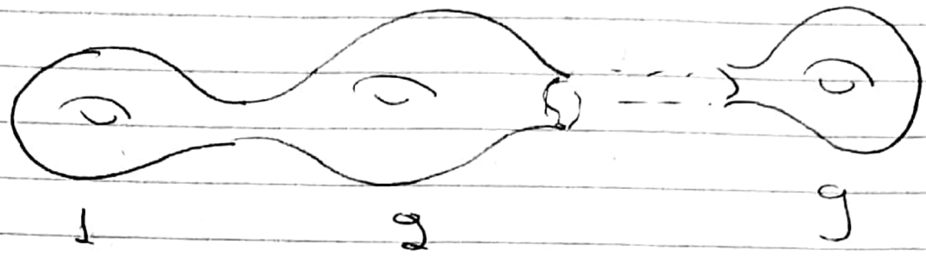
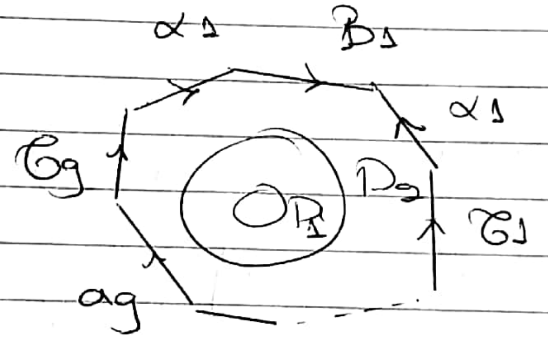
Μάθημα 24.

$S_g =$



Η προσανατολισμένη επιφάνεια γένους g, επιδέχεται πολυγωνική παράσταση της μορφής

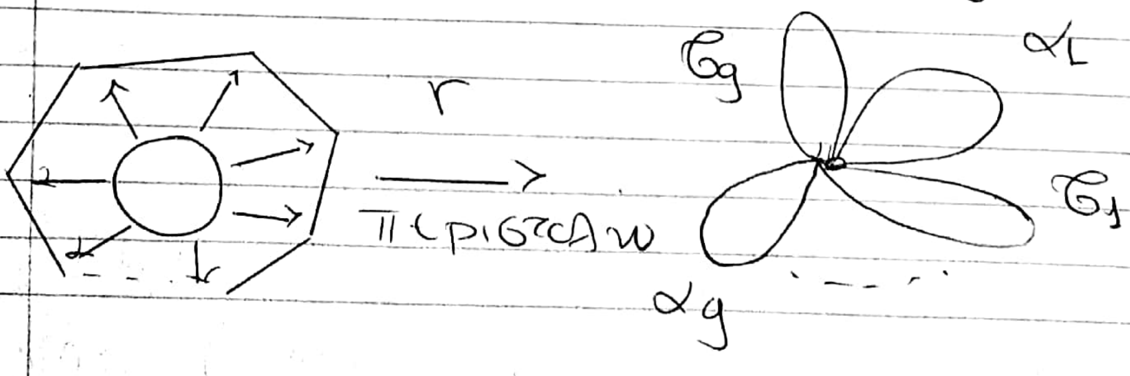
$X =$



Θεωρούμε κλειστούς δίσκους D_1 και D_2 όπως στο σχήμα

$A = X \setminus D_1$, $B = Int(D_2)$

-> A, B ανοικτά και $X = A \cup B$.
άρα εφαρμόζεται Mayer-Vie



②

Παρατηρούμε ότι το A περιστέλλεται σε ένα μπουκέτο 2g το πλήθος κύκλων. Έτσι

$$A \simeq \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$$

Το B είναι συσπτύξιμο, άρα έχει τύπο ομοτοπίας σημείου και $A \cap B \simeq S^1$.

A κτ.σ.

Συνεπώς, $H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n=1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$

$H_n(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$H_n(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Από M.-V. για $n \geq 2$

$$\cdots \to \cancelto{0}{H_n(A)} \oplus \cancelto{0}{H_n(B)} \to H_n(S_g) \to$$

$$\to \cancelto{0}{H_{n-1}(A \cap B)} \to \cdots$$

$\to H_n(S_g) = 0$, για $n \geq 2$.

③ ④

Για $n=2$:

$$\to 0 \oplus 0 \to H_2(S_g) \to \underbrace{H_1(A\cap B)}_{\mathbb{Z}} \to$$

$$\to \underbrace{H_1(A)}_{\mathbb{Z}^{2g}} \oplus \underbrace{H_1(B)}_{0} \to H_1(S_g) \to$$

$$\to \underbrace{H_0(A\cap B)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{H_0(A)}_{\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{H_0(B)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial}$$

$$\to H_0(S_g) \to 0.$$

$\partial : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ επι $\Rightarrow \cdots$

$\Rightarrow \ker \partial = \mathbb{Z} = \operatorname{Im}(\varepsilon) \Rightarrow$

$\ker \varepsilon = 0$. Δηλαδη προκυπτει η ακριβης ακολουθια:

$$0 \to H_2(S_g) \xrightarrow{w} H_1(A\cap B) \xrightarrow[\varphi]{[\sigma] \mapsto ([\gamma],[\gamma])}$$

$$\xrightarrow{\psi} H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(S_g) \to 0 \quad (*)$$

Στην ουσια (αν $H_1(A) \oplus \overset{0}{\cancel{H_1(B)}} = \mathbb{Z}^{2g}$) $\operatorname{Im}\varphi = \langle [\sigma] \rangle$

④

$\langle [a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}] \rangle$

$\overset{\alpha\beta\varepsilon\lambda.}{=} 0$.

Ισχυ $H_1(A\cap B) = \mathbb{Z}$, $Im\varphi = 0$

$\Rightarrow ker\varphi = H_1(A\cap B) = Im\psi \cong H_2(S_g)$

$\Rightarrow H_2(S_g) = \mathbb{Z}$.

Τώρα, $Im\varphi = 0 \to ker\varphi = 0$.

ψ ισομορφ. $\Rightarrow H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$

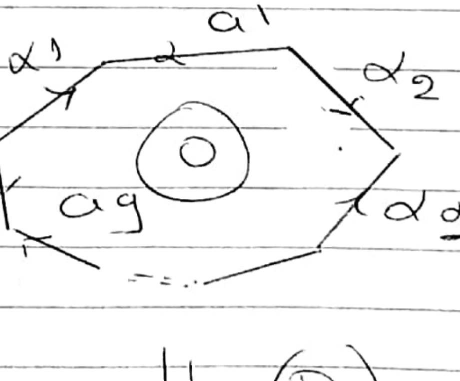
Τελικά, $H_n(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n=1 \\ 0, & n>2 \end{cases}$.

- Για τη μη προσανατολίσιμη.

N_g γένους g

D_1, D_2, A, B

όπως πριν



$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}^g, & n=1 \\ 0, & n\geq 2 \end{cases}$, $H_n(B)$ όπως πριν

$H_n(A\cap B)$ = όπως πριν.

Στην αντίστοιχη ⊛

$\mathrm{Im}\varphi = \langle [\gamma] \rangle = \langle [a_1 a_1 \cdots a_g a_g$

αβελ. $= \mathbb{Z}$

$= \langle [a_1^2 \cdots a_g^2] \rangle \neq 0$

$\Rightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\psi = \ker\varphi = 0$

$\Rightarrow H_2(N_g) = 0.$

- $H_1(N_g) = \mathbb{Z}^g / \ker\varphi = \dfrac{\mathbb{Z}^g}{\mathrm{Im}\varphi}$

$$= \frac{\langle[a_1]\rangle \oplus \cdots \oplus \langle[a_g]\rangle}{\langle [a_1]^2 \cdots [a_g]^2 \rangle}$$

$$= \frac{\langle[a_1]\rangle \oplus \cdots \oplus \langle[a_{g-1}]\rangle \oplus \langle[a_1 \cdots a_g]\rangle}{\langle [a_1 \cdots a_g]^2 \rangle}$$

$$= \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus}_{g-1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$