▷ <u>Λήμμα 1ο:</u> Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω και $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία γραμμικών και φραγμένων προβολών στον X τέτοια ώστε:

(α). $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dim P_n(X)=\dim \operatorname{Im}P_n=n$

(β). $\forall n,m\in\mathbb{N}$: $P_n\circ P_m=P_m\circ P_n=P_{n\wedge m}$

(γ). $P_n(x)\to x,\ \forall x\in X$

Τότε: $\exists\ (e_n)_{n=1}^{\infty}\in X^{\mathbb{N}}$, Schauder βάση του X, τέτοια ώστε η $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ να είναι κανονικές προβολές για την $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Μάλιστα $\forall\ (e_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε: $e_n\in P_n(X)\cap\ker P_{n-1}$ με $e_n\neq 0$, έχουμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder του X και οι $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι οι κανονικές προβολές για την $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

– <u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε $P_0=0_X$. Τότε $\forall n,m\in\mathbb{N}$ αφού: $P_n\circ P_m=P_m\circ P_n=P_{m\wedge n}$ έπεται ότι: αν $m>n$: $P_n(X)\subseteq P_m(X)$ και $\ker P_n\supseteq \ker P_m$ (υπόχωροι) και επίσης παρατηρούμε ότι: $\forall n\in\mathbb{N}$: $P_n(X)\cap\ker P_{n-1}\subseteq P_n$[redacted]$(X)$ και $P_n(X)\cap\ker P_{n-1}$ είναι διάστασης 1 (άσκηση). Επιλέγουμε τώρα: $\forall n\in\mathbb{N}$: $e_n\in P_n(X)\cap\ker P_{n-1}$ με $e_n\neq 0$ και άρα: $P_n(X)\cap\ker P_{n-1}=\langle\{e_n\}\rangle$.

Θα αποδείξουμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση schauder του X: Έστω επομένως $x\in X$ και τότε $\forall n\in\mathbb{N}$: $P_n(x)-P_{n-1}(x)\in P_n(X)\cap\ker P_{n-1}$ αφού: $P_{n-1}\big(P_n(x)-P_{n-1}(x)\big)$ $=P_{n-1}\circ P_n(x)-P_{n-1}\circ P_{n-1}(x)=P_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)=0\Rightarrow P_n(x)-P_{n-1}(x)\in\ker P_{n-1}$ και $P_n(x)-P_{n-1}(x)\in P_n(X)$ αφού: $P_n(x)-P_{n-1}(x)=P_n(x)-P_n\circ P_{n-1}(x)$ $=P_n(\underbrace{x-P_{n-1}(x)}_{\in X})$. Τώρα παρατηρούμε ότι: αφού: $P_n(x)-P_{n-1}(x)\in\langle\{e_n\}\rangle$ έπεται ότι $\exists\ \lambda_n\in\mathbb{R}$: $P_n(x)-P_{n-1}(x)=\lambda_n e_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα τώρα έχουμε ότι

$$x=\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\big(P_j(x)-P_{j-1}(x)\big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j$$

Τώρα για την μοναδικότητα: αρκεί να αποδείξουμε ότι αν για $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j=0\Rightarrow\lambda_j=0,\ \forall j=1,\dots,n,n+1,\dots$: και τώρα παρατηρούμε ότι:

$$0=P_n(0)=P_n\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j\Big)=P_n\Big(\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j\Big)\underset{\text{συνεχής η } P_n}{=}\lim_{k\to\infty}P_n\Big(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j\Big)$$

- Μάθημα 1ο: Χώροι Banach: Τύπος:

• **Βάσεις Schauder:**

+ Ορισμός: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων του X. Τα $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ καλείται βάση Schauder του X αν: $\forall x\in X: \exists!\ (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n$

• Παρατήρηση 1η: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια βάση Schauder του X. Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος για το $D=\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j : n\in\mathbb{N}, \lambda_j\in\mathbb{Q}, \forall j=1,\dots,n\}$

• Παρατήρηση 2η: Δεν είναι γνωστό ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα έχει βάση Schauder

• Παρατήρηση 3η: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια βάση Schauder του X. Τότε: $\forall (t_j)_{j=1}^{\infty}\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ η $(t_n e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder του X.

+ Ορισμός: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια βάση Schauder του X. Τότε ορίζουμε $\forall n\in\mathbb{N}$: $P_n: X\to X$ με $P_n(x)=P_n(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$ και παρατηρούμε ότι αυτός είναι γραμμική προβολή (γραμμικός τελεστής + $P_n^2=P_n\circ P_n=P_n$). Η $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ καλείται ακολουθία κανονικών προβολών της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Για την P_n ισχύει ότι: α). $P_n(X)=\mathrm{Im}P_n=\langle e_i: i=1,\dots,n\rangle$ και άρα: $\dim P_n(X)=\dim\mathrm{Im}P_n=n$, β). $\forall n,m\in\mathbb{N}: P_n\circ P_m=P_m\circ P_n=P_{m\wedge n}$ από όπου και έπεται ότι $\forall n,m\in\mathbb{N}: n<m: P_n(X)\leq P_m(X)$ και $\ker P_n\geq\ker P_m$ (υπόχωροι), γ). $\forall x\in X: P_n(x)\to x$ (από τον ορισμό της Schauder βάσης) και δ). $\forall n\in\mathbb{N}: P_n(X)\cap\ker P_{n-1}=\langle\{e_n\}\rangle$ (άσκηση)

~~και έχουμε ότι: αν: $j>n$ τότε έχουμε ότι: $e_j \in P_j(X) \cap \ker P_{j-1}$~~

~~και $\ker P_n \supseteq \ker P_j$~~

και έχουμε ότι αν $j>n$: $P_n(e_j)=0$ και άρα: $0=\lim_{k\to\infty} P_n\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\right)$

$= P_n\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_n(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$ και αφού τώρα το $\{e_j\}_{j=1}^\infty$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (άσκηση - με επαγωγή) έπεται ότι:

$\lambda_j=0,\ \forall j=1,\dots,n,\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lambda_j=0,\ \forall j\in\mathbb{N}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα $x\in X$ και $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ για την οποία:

$x=\sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n$. Τότε έχουμε ότι: ~~$x=\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n\left(\sum\right.$~~

$P_n(x)=P_n\left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k\right) = P_n\left(\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^j \lambda_k e_k\right) = \lim_{j\to\infty} P_n\left(\sum_{k=1}^j \lambda_k e_k\right)$

$= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^j \lambda_k P_n(e_k) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k P_n(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_n(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$

και άρα οι $(P_n)_{n=1}^\infty$ είναι οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n=1}^\infty$.

(*) Αν $j>n$: $P_n(e_j)=0$ γιατί: αν $j>n$: αφού: $e_j\in P_j(X)\cap \ker P_{j-1}\subseteq \ker P_{j-1}$

$\subseteq \ker P_n$ γιατί: $j>n \Rightarrow j-1\geq n \Rightarrow \ker P_{j-1}\subseteq \ker P_n$ και τώρα αν $j\leq n$

τότε έχουμε ότι: $e_j\in P_j(X)\subseteq P_n(X)$ και άρα: $P_n(e_j)=e_j$

▷ <u>Λήμμα 2ο</u>: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(e_n)_{n=1}^\infty$ βάση Schauder του X.

Υποθέτουμε ότι οι κανονικές προβολές $(P_n)_{n\geq1}$ για την $(e_n)_{n\geq1}$ Schauder βάση

είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Τότε η $(e_n)_{n=1}^\infty$ είναι βάση Schauder για την πλήρωση

$\overline{X}$ του X

- <u>Απόδειξη</u>: $\forall n\in\mathbb{N}$ με $\overline{P_n}:\overline{X}\to\overline{X}$ συμβολίζουμε τις μοναδικές φραγμένες και γραμμικές

επεκτάσεις των P_n. Τότε: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\|\overline{P_n}\|=\|P_n\|$. Θέτουμε $M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|<\infty$ από υπόθεση

Τώρα παρατηρούμε ότι: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\overline{P_n}(\overline{X})=P_n(X)$: γιατί αρχικά έχουμε ότι αν πάρουμε

$n\in\mathbb{N}$ τότε αφού η $\overline{P_n}$ είναι επέκταση της P_n έπεται ότι: $P_n(X)\subseteq\overline{P_n}(\overline{X})$.

Τώρα έστω: $y\in\overline{P_n}(\overline{X})\Rightarrow \exists \bar{x}\in\overline{X}: \overline{P_n}(\bar{x})=y$ και αφού $\bar{x}\in\overline{X}$ έπεται ότι

$\exists (x_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία του X με: $x_n\to x$ και άρα αφού:

$P_n(x_k) = \bar{P_n}(x_k) \to \bar{P_n}(x) = y$ αφού οι $\bar{P_n}$ είναι συνεχείς. Αφού τώρα έχουμε ότι: $P_n(x_k) \in \langle (e_j)_{j=1}^{n} \rangle = Z \le X$ όπου Z πεπερασμένης διάστασης έπεται ότι ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X και άρα: [redacted] $y \in Z$.

Άρα: $\bar{P_n}(\bar{X}) = P_n(X) = \langle (e_j)_{j=1}^{n} \rangle$ και άρα: $\dim \bar{P_n}(\bar{X}) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επίσης: $\forall \bar{x} \in \bar{X}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $\bar{P_n}(\bar{P_m}(\bar{x})) = \bar{P_m}(\bar{P_n}(\bar{x})) = P_{n\wedge m}(\bar{x})$ γιατί πράγματι έχουμε ότι: αν $\bar{x} \in \bar{X}$ τότε έχουμε ότι: $\exists (x_k)_{k=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $x_k \to \bar{x}$ και αφού τώρα $\forall k \in \mathbb{N}$: $\bar{P_n}(\bar{P_m}(x_k)) = \bar{P_n}(P_m(x_k)) = P_n(P_m(x_k)) = P_m(P_n(x_k))$ $= \bar{P_m}(\bar{P_n}(x_k)) = P_{m\wedge n}(x_k) = \bar{P}_{m\wedge n}(x_k) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$: $\bar{P_n}(\bar{P_m}(x_k)) = \bar{P_m}(\bar{P_n}(x_k)) = \bar{P}_{m\wedge n}(x_k)$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{k\to\infty} \bar{P_n}(\bar{P_m}(\bar{x})) \\ \xrightarrow{k\to\infty} \bar{P_m}(\bar{P_n}(\bar{x})) \\ \xrightarrow{k\to\infty} \bar{P}_{n\wedge m}(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

$\bar{P_n}(\bar{P_m}(\bar{x})) = \bar{P_m}(\bar{P_n}(\bar{x})) = \bar{P}_{n\wedge m}(\bar{x})$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

~~Τώρα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $\bar{x} \in \bar{X}$: $\bar{P_n}(\bar{x}) \to$ [redacted] $\bar{x}$: γιατί παρατηρούμε ότι αν $\bar{x} \in \bar{X}$ τότε έχουμε ότι υπάρχει $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$: $x_k \to \bar{x} \Rightarrow \bar{P_n}(x_k) = P_n(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \bar{P_n}(\bar{x})$, $\forall n \in \mathbb{N}$~~

$\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$

ότι αν $\bar{x} \in \bar{X}$ και πάρουμε και $\varepsilon > 0$ τότε επιλέγουμε $x \in X$: $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$ και αφού τώρα $P_n(x) \to x$ έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge n_0$: $\|P_n(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ και τότε: $\forall n \ge n_0$: $\|\bar{P_n}(\bar{x}) - \bar{x}\| \le \|\bar{x} - x\| + \|x - \bar{P_n}(\bar{x})\| \le \|\bar{x} - x\|$ $+ \|x - P_n(x)\| + \|P_n(x) - \bar{P_n}(\bar{x})\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\bar{P_n}(x) - \bar{P_n}(\bar{x})\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\bar{P_n}\|\|x - \bar{x}\|$ $< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ και άρα: $\bar{P_n}(\bar{x}) \to \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in \bar{X}$

Επίσης: $\forall n \in \mathbb{N}$: $e_n \in \ker \bar{P}_{n-1} \cap \bar{P_n}(\bar{X})$. Επομένως από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder του $\bar{X}$ με $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ κανονικές προβολές.

1

▶ <u>Ορισμός:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και (e_n) βάση Schauder.

Ορίζουμε: $|||\cdot|||: X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\forall x \in X: |||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\|$

- <u>Παρατήρηση 1η:</u> Αφού $\forall x \in X: P_n(x) \to x$, έπεται ότι: η $|||\cdot|||$ είναι καλά ορισμένη και έχουμε ότι: $\|\cdot\| \leq |||\cdot|||$. Επίσης η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα και $|||P_m||| \leq 1, \forall m \in \mathbb{N}$. Πράγματι έστω $m \in \mathbb{N}$: και τότε: $|||P_m||| =$

$\sup\{ |||P_m(x)|||: |||x||| \leq 1\} = \sup_{|||x||| \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(P_m(x))\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup$

$\{ \|P_{n \wedge m}(x)\|: |||x||| \leq 1\}$

$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup\{ \|P_{n\wedge m}(x)\|: x \in X$ με $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|P_k(x)\| \leq 1 \} \leq 1$

• <u>Πόρισμα:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα με Schauder βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Τότε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του $(X, |||\cdot|||)$ και οι κανονικές προβολές είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς $|||\cdot|||$.

- <u>Απόδειξη:</u> Η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder του $(X, \|\cdot\|)$ και έστω οι P_n κανονικές προβολές. Τότε: 1. $\dim P_n(X) = n$, 2. $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n = P_{m \wedge n}$, 3. $e_n \in P_n(X) \cap \ker P_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, 4. $P_n(x) \to x$ ως προς την $\|\cdot\|$, $\forall x \in X$. Αρκεί για το ζητούμενο να αποδείξουμε ότι: $P_n(x) \xrightarrow{|||\cdot|||} x$, $\forall x \in X$. Έστω $x \in X$. Τότε: $|||x - P_n(x)||| =$ [redacted]

$\sup_{k \in \mathbb{N}} \| P_k(x - P_n(x))\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|P_k(x) - P_{k \wedge n}(x)\| = \sup_{k > n} \|P_k(x) - P_n(x)\| \to 0$ αφού

τώρα η $(P_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι $\|\cdot\|$ [redacted] - Cauchy αφού: $P_n(x) \to x$

- <u>Παρατήρηση 1η:</u> Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος Banach τότε και ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach

- Έστω P_n οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overline{X}^{|||\cdot|||} = X$. Έστω $\overline{P_n}: \overline{X} \to \overline{X}$ οι γραμμικές και φραγμένες επεκτάσεις των P_n. Έστω $\bar{x} \in \overline{X}$.

Τότε: $\overline{P_n}(\bar{x}) \xrightarrow{|||\cdot|||} \bar{x}$ και άρα η $(\overline{P_n}(\bar{x}))_{n \geq 1}$ είναι $|||\cdot|||$- Cauchy και άρα:

$(\overline{P_n}(\bar{x}))_{n \geq 1}$ είναι $\|\cdot\|$- Cauchy. Άρα: $\exists x \in X: \overline{P_n}(\bar{x}) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $x = \bar{x} \in X$

Επίσης έχουμε ότι: $\exists (b_j)_{j=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε: $\bar{P}_n(\bar{x}) - P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \xrightarrow{\|\cdot\|} x - x = 0$
αφού: $P_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι: $b_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$ αφού το $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$
είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Άρα: $\bar{P}_n(\bar{x}) = P_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα
τώρα: $|||\bar{P}_n(\bar{x}) - x||| = |||P_n(x) - x||| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|P_m P_n(x) - P_m(x)\| =$ [redacted]
$\sup_{m \geq n} \|P_n(x) - P_m(x)\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ και άρα: $\bar{P}_n(\bar{x}) \xrightarrow{|||\cdot|||} x$ και $\bar{P}_n(\bar{x}) \to \bar{x}$
και άρα $x = \bar{x} \in X$ και άρα: $\overline{X}^{|||\cdot|||} = X$

- <u>Πόρισμα</u>: Έστω X χώρος Banach με $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ βάση Schauder. Τότε: $\|\cdot\|$ ισοδύναμη της $|||\cdot|||$

▷ <u>Θεώρημα Banach</u>: Έστω X χώρος Banach με $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ βάση Schauder. Τότε οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες

▷ <u>Ορισμός</u>: Έστω X ένας χώρος Banach και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ Schauder βάση του X. Έστω επίσης και $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Ορίζουμε την βασική σταθερά (basic constant): $bc((e_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$

- Αν $bc((e_n)_{n=1}^{\infty}) = 1$ τότε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ καλείται <u>μονότονη</u> ($\Rightarrow \|P_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}$ [redacted] με $n < m$ και $\forall a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι: $\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|$
)
- Αν $\|e_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε η $(e_n)_{n \geq 1}$ καλείται <u>νορμαρισμένη</u>
- $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$ και $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι: $\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leq bc((e_n)_{n=1}^{\infty})$
$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|$ γενικά

▷ <u>Ορισμός</u>: Έστω X ένας χώρος Banach και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του $X^{\mathbb{N}}$. Η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ καλείται <u>Schauder βασική ακολουθία</u> αν η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του
$\overline{\langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$

- Μάθημα 20: Χώροι Banach: Τύπος

▷ Πρόταση: (Banach):

Έστω X είναι χώρος Banach και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ~~Schauder βάση~~ ακολουθία του X.
Η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βασική ακολουθία ανν: $\exists K>0$ σταθερά τέτοια ώστε $\forall n,m\in\mathbb{N}$ με $n<m$ και $\forall a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι: $\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right\|\le K\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ie_i\right\|$.
Μάλιστα στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι: $bc((e_n)_{n=1}^{\infty})=\inf\{K>0:\forall n,m\in\mathbb{N}$ με $n<m$ και $\forall a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}:\ \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right\|\le K\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ie_i\right\|\}$

- Απόδειξη: Αρχικά παρατηρούμε αν η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βασική ακολουθία τότε για $K=bc((e_n)_{n=1}^{\infty})>0$ έχουμε το ζητούμενο από προηγούμενη παρατήρηση.
Τώρα παρατηρούμε ότι για την αντίστροφη κατεύθυνση: θέτουμε $Y=\langle e_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ και $Z=\overline{\langle e_n:n\in\mathbb{N}\rangle}=\overline{Y}$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του $\overline{Y}$. Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $\forall n\in\mathbb{N}$ ορίσουμε: $P_n:Y\to Y$ με $P_n\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n\wedge m}\lambda_ie_i$ τότε παρατηρούμε ότι αυτός είναι γραμμικός τελεστής και έχουμε ότι: $P_n(X)=\langle e_i:i=1,\dots,n\rangle$ και άρα: $\dim P_n(X)=n$ και επίσης παρατηρούμε ότι $P_n\circ P_m=P_m\circ P_n=P_{m\wedge n}$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$ και τέλος παρατηρούμε ότι: $P_n(x)\to x,\ \forall x\in Y$ γιατί αν $x\in Y$ έχουμε ότι: $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ie_i$ και άρα $P_n(x)=\sum_{i=1}^{n\wedge k}\lambda_ie_i$ και $\forall n>k:\ P_n(x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ie_i\longrightarrow\sum_{i=1}^{k}\lambda_ie_i=x$. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\forall n\in\mathbb{N}$: $e_n\in\ker P_{n-1}\cap P_n(X)$ και άρα από λήμμα 1ο έχουμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του Y και P_n είναι οι κανονικές προβολές της. Επίσης από υπόθεση: $\|P_n\|\le K$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα από λήμμα 2ο έχουμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση schauder του $\overline{Y}=Z$.

- Παραδείγματα: Κάθε ορθοκανονική ακολουθία σε χώρο Hilbert είναι Schauder βασική και μονότονη

- Για $X=c_0$ και $X=\ell_p$, $1\le p<\infty$ η συνήθης βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ με $e_n=(0,\dots,\underset{n\text{-θέση}}{1},0\dots0)$ είναι Schauder βάση

- Summing βάση του c_0: $\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $s_n=(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,0,0\dots)$ και τότε αυτή είναι schauder βασική και $bc((s_n)_{n=1}^{\infty})=2$ (άσκηση)

▷ <u>Ορισμός:</u>

Έστω X Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Τώρα: $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $P_n - P_{n-1} : X \to \langle \{e_n\} \rangle$ γραμμικός τελεστής. Άρα: $\exists\, e_n^* \in X^*$ τέτοια ώστε $\forall x \in X$: $e_n^*(x) e_n = P_n(x) - P_{n-1}(x)$ και έχουμε ότι η e_n^* είναι καλά ορισμένη

(Ισοδύναμα: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε παρατηρείστε ότι $\forall x \in X$: $e_n^*(x) = \lambda_n$ όπου: $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι η μοναδική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ για την οποία: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$)

Τα $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ καλούνται <u>διορθογώνια στοιχεία</u> της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$

- <u>Βασικές Ιδιότητες</u>: - $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $e_n^*(e_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$

- $\forall x \in X$: $\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x) e_i = x$

- $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|e_n^*\| \|e_n\| \leq 2bc((e_n)_{n=1}^{\infty})$.

Πράγματι: $\forall x \in$ [redacted] B_X: $|e_n^*(x)| \|e_n\| = \|e_n^*(x) e_n\| = \|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|$ $\leq 2bc((e_n)_{n=1}^{\infty})$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

• <u>Δυικοί Τελεστές</u>: Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος. Ορίζουμε: $T^*: Y^* \to X^*$ με: $T^*(y^*) = y^* \circ T$ και έχουμε ότι:

1. Ο T^* είναι καλά ορισμένος
2. Ο T^* είναι γραμμικός τελεστής
3. $\|T^*\| = \|T\|$

- Απόδειξη 3. Πράγματι παρατηρούμε ότι αρχικά: $\|T^*\| \leq \|T\|$ γιατί: $\forall y^* \in Y^*$: $\|T^*(y^*)\| = \|y^* \circ T\| \leq \|y^*\| \|T\| \Rightarrow \|T^*\| \leq \|T\|$. Τώρα για την αντίστροφη ανισότητα: έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in$ [redacted] $B_X^{\mathbb{N}}$ με: [redacted] $\|T(x_n)\| \to \|T\|$. Θέτουμε τώρα: $y_n = T(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και από το θεώρημα Hahn-Banach έχουμε ότι: $\exists\, y_n^* \in S_{Y^*}$ τέτοια ώστε: $y_n^*(y_n) = \|y_n\|$. Τότε: $\|T^*\|_{B(Y^*, X^*)} \geq \|T^*(y_n^*)\| = \|y_n^* \circ T\| \geq |y_n^* \circ T(x_n)|$ $= |y_n^*(T(x_n))| = |y_n^*(y_n)| = \|y_n$ [redacted] $\| = \|T(x_n)\| \xrightarrow{n \to \infty} \|T\|$ και άρα: $\|T^*\| \geq \|T\|$

▹ Πρόταση: Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.
Τότε η $(e_n^*)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία.

- Απόδειξη: Θέτουμε $Y = \langle e_n^* : n\in\mathbb{N}\rangle$ και $Z = \overline{\langle e_n^* : n\in\mathbb{N}\rangle} = \overline{Y}$.

Θεωρούμε τώρα $\forall n\in\mathbb{N}$: $P_n^* : X^* \to X^*$ και έχουμε ότι: $\forall f\in X^*$:
$P_n^*(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* f(e_i)$. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\forall i\leq n$: $P_n^*(e_i^*) = e_i^*$
[redacted] και $\forall i>n$: $P_n^*(e_i^*) = 0$ και άρα έχουμε ότι: $P_n^*(X^*) = P_n^*|_Y[Y]$
$\langle e_i^* : i\leq n\rangle$ και άρα: $\dim P_n^*(X^*) = n$. $= \dim P_n^*|_Y(Y)$ Τώρα παρατηρούμε ότι $\forall n,m\in\mathbb{N}$
και [redacted] $f\in X^*$ έχουμε: $P_n^*\circ P_m^*(f) = P_n^*\cancel{\left(\sum_{i=1}^{m} e_i^* f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{m\wedge n}}$
$\cancel{\sum_{i=1}^{m} P_n^*(e_i^*) f(e_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}}$ $P_n^*(P_m^*(f)) = \sum_{i=1}^{n}$ [redacted] $e_i^* P_m^*(f)(e_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} e_i^* P_m^*(f)(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e_j^*(e_i) f(e_j) e_i^* = \sum_{i=1}^{n\wedge m} e_i^*(e_i) f(e_i) e_i^*$
$= \sum_{i=1}^{n\wedge m} f(e_i) e_i^* = P_{n\wedge m}^*(f)$ και άρα: $P_n^*\circ P_m^* = P_{n\wedge m}^* = P_m^*\circ P_n^*$ (με όμοιο τρόπο)
και άρα: $P_n^*|_{\text{[redacted]}Y} \circ P_m^*|_{\text{[redacted]}Y} = P_{n\wedge m}^*|_{\text{[redacted]}Y} = P_m^*|_Y \circ P_n^*|_Y$. Τώρα έχουμε ότι:
$\forall f\in Y$: $P_n^*(f)\to f$ γιατί παρατηρούμε ότι αν $f\in Y \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n_0} e_i^*\lambda_i$
και άρα: $\forall n>n_0$: $\cancel{P_n^*(f) = \sum P_n^*\left(\sum_{i=1}^{n_0} e_i^*\lambda_i\right) = \sum_{i=1}^{n_0}\lambda_i P_n^*(e_i^*)}$
$\cancel{= \sum_{i=1}^{n_0}\lambda_i e_i^* = f}$
και άρα: $\forall n>n_0$: $P_n^*(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* f(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=\text{[redacted]}1}^{n_0} e_j^*(e_i)\lambda_j e_i^* = \sum_{i=1}^{n_0} e_i^*(e_i)\lambda_i e_i^*$
$= \sum_{i=1}^{n_0}\lambda_i e_i^* = f$ και άρα: $P_n^*(f)\to f$. Τώρα παρατηρούμε ότι: οι P_n^* είναι και
και άρα και οι $P_n^*|_Y$
ομοιόμορφα φραγμένες αφού οι P_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες και $\|P_n\| = \|P_n^*\|$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
από ιδιότητα (3). Τώρα: $\forall n\in\mathbb{N}$: $e_n^* \in \ker P_{n-1}^* \cap P_n^*(Y)$ και έχουμε επομένως ότι
από λήμμα ότι: η $(e_n^*)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βάση του $\overline{Y} = Z$
μπορούμε να βάλουμε και X
με κανονικές προβολές τις $(P_n^*|_Y)_{n\geq 1}$

- Παρατήρηση:

Έστω X Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Έστω και $(P_n)_{n\geq 1}$ οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Τότε έστω $n\in\mathbb{N}$ και έχουμε ότι: $P_n^*: X^*\to X^*$.
Για κάθε $f\in X^*$: $P_n^*(f)=f\circ P_n$, και $\forall x\in X$: $P_n^*(f)(x)=(f\circ P_n)(x)$
$=(f\circ P_n)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^*(x)e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i^*(x)f(e_i)$
$=\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^* f(e_i)\right)(x)$ και άρα: $P_n^*(f)=\sum_{i=1}^{n}e_i^* f(e_i)$.

▸ Ορισμός: Έστω X Banach και $(e_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ Schauder βάση του X.

1. Η $(e_n)_{n\geq 1}$ καλείται shrinking αν: $\overline{\langle e_n^*, n\in\mathbb{N}\rangle}=X^*$
2. Η $(e_n)_{n\geq 1}$ καλείται boundedly complete αν: $\forall (a_i)_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|<\infty$ έχουμε ότι: $\sum_{i=1}^{\infty}a_i e_i$ συγκλίνει.

• Θεώρημα James: Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση. Τότε ο X είναι αυτοπαθής ανν η $(e_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι shrinking και boundedly complete

▸ Πρόταση: Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Η $(e_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι Schrinking ανν: $\forall x^*\in X^*$: $\left\|x^*|_{\overline{\langle e_i : i\geq n\rangle}}\right\|\xrightarrow{n\to\infty}0$

- Μάθημα 3ο: Τύπος: Χώροι Banach

- <u>Παράδειγμα Βάσης:</u> Έστω $X = C[0,1]$. Έστω $(t_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στο $[0,1]$ πυκνή τέτοια ώστε: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Για $n=1$: ορίστε: $P_1 : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ με $P_1(f) = f(0) = f(t_1)$. Για $n \geq 2$: ορίστε: $\{ s_1 < s_2 < \dots < s_n \} = \{ t_1, \dots, t_n \}$ και $P_n : C[0,1] \to C[0,1]$ τέτοια ώστε $\forall f \in C[0,1]$: $P_n(f)$ να είναι η κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση στο $[0,1]$ που περνά από τα σημεία $(s_i, f(s_i))_{i=1}^{n}$.

Τότε έχουμε ότι η $(P_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία προβολών και υπάρχει μονότονη Schauder βάση για την P_n

<u>$n=4$</u>:

- <u>Θεώρημα Mazur:</u> Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει Schauder βασική ακολουθία.

. <u>Λήμμα:</u> Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $Y \hookrightarrow X$ πεπ. διάστασης. Τότε: $\forall \varepsilon > 0$: $\exists x \in S_X$ τέτοιο ώστε: $\forall y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|y\| \leq \|\lambda x + y\| (1+\varepsilon)$

. Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας $\varepsilon < 1$. Τότε αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης έπεται ότι S_Y είναι συμπαγής και άρα έστω $(y_i)_{i=1}^{n_0} \subseteq S_Y$ $\frac{\varepsilon}{2}$-πυκνό στην S_Y. Τώρα: $\forall i \in [n_0]$ επιλέγουμε από Hahn-Banach $y_i^* \in S_{X^*}$ τέτοιο ώστε: $y_i^*(y_i) = 1 = \|y_i\|$. Αφού τώρα ο X είναι απειροδιάστατος: $\bigcap_{i=1}^{n_0} \ker y_i^* \neq \{0\}$. Επιλέγουμε $x \in S_X \cap \bigcap_{i=1}^{n_0} \ker y_i^*$ και έστω $y \in S_Y$ (με κανονικοποίηση το περνάω στον Y) και $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $i_0 \in [n]$ τέτοιο ώστε: $\|y - y_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε: $\|y + \lambda x\| \geq \|y_{i_0} + \lambda x\| - \|y - y_{i_0}\| > \|y_{i_0} + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \underset{\|y_{i_0}^*\| = 1}{\geq} y_{i_0}^*(y_{i_0} + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2}$

$= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \overset{\varepsilon<1}{\geq} \frac{1}{2}$

Ο T είναι συνεχής: και αυτό θα το αποδείξουμε με Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος (ΘΚΓ: Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός. Ο T είναι φραγμένος αν: $G_r(f) \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό).

Έστω επομένως $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ και $(v_n)_{n\geq 1} \in Y^{\mathbb{N}}$ και $x \in X$ και $v \in Y$ τέτοια ώστε: $v_n = T(x_n) \to v$ και $x_n \to x$. Θα αποδείξουμε ότι $v = T(x)$.

Παρατηρούμε ότι: $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $x_k^*(x_n) = y_k^*(v_n)$ αφού: $T(x_n) = v_n$

$\left(x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n \Rightarrow T(x) = y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(y) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης:

$\forall k \in \mathbb{N}$: $\left.\begin{matrix} x_k^*(x_n) \to x_k^*(x) \\ y_k^*(v_n) \to y_k^*(v) \end{matrix}\right\}$ $x_k^*(x) = y_k^*(v)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και άρα όντως $T(x) = v$.

Τώρα έχουμε ότι από το ΘΑΑ (ΘΑΑ: Έστω X, Y χώροι Banach και $f: X \to Y$ γραμμική συνεχής, 1-1, επί. Τότε και η f^{-1} είναι συνεχής) έχουμε ότι και ο T^{-1} είναι συνεχής και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- 2 ⇒ 3. Είναι άμεσο για $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ και $C = \|T\|$
- 3 ⇒ 1. Έστω $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ακολουθία. Τότε έχουμε ότι: $\sum_{j=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει ⇔ $\left(\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\right)_{k\geq 1}$ είναι Cauchy ⇔ $\left(\sum_{j=1}^{k} a_j y_j\right)_{k\geq 1}$ είναι Cauchy από την υπόθεση 3 ⇔ $\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j$ συγκλίνει.

▸ Ορισμός: Έστω $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ και $(y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ ακολουθίες όπου X, Y είναι χώροι Banach. Οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ καλούνται congruent w.r.t (X, Y) αν: $\exists\, T: X \to Y$ γραμμικός, επί, ισομορφισμός τέτοιος ώστε: $T(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $X = Y$ τότε λέμε ότι οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι congruent.

- Παρατήρηση: 1. Έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ congruent w.r.t (X, Y). Τότε εάν η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική τότε και η $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική και ισοδύναμη και μάλιστα $bc((y_n)_{n\geq 1}) \leq \|T\| \|T^{-1}\| \, bc((x_n)_{n\geq 1})$. Επίσης εάν η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βάση τότε και η $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βάση.

- Παρατήρηση: αν αρχικά οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι congruent w.r.t (X,Y) τότε έχουμε ότι: από τον ορισμό υπάρχει: $T: X\to Y$ γραμμικός, επί, ισομορφισμός με $T(x_n)=y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και αφού τώρα η $(x_n)_{n\geq 1}$ αν υποθέσουμε ότι είναι και Schauder βασική, τότε έχουμε ότι και η $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική γιατί έχουμε ότι: είναι Schauder βάση του κλειστού υπόχωρου $\overline{\langle y_n : n\in\mathbb{N}\rangle}$ και αυτό γιατί αν πάρουμε $y\in\overline{\langle y_n : n\in\mathbb{N}\rangle}\hookrightarrow Y$ τότε αφού ο T είναι επί έπεται ότι υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε:

τον περιορισμό $T|_{\overline{\langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle}}$ τότε έχουμε ότι:

- Πρόταση: Principle of small pertibutions: Έστω X Banach και $(e_n)_{n\geq 1}$ Schauder βασική στον X. Έστω τώρα $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x_n-e_n\|}{\|e_n\|}\right)2bc((e_n)_{n\geq 1}) = \theta < 1.$

Τότε έχουμε ότι:
1. Οι $(e_n)_{n\geq 1}$ και $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι congruent
2. Η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική με $bc((x_n)_{n\geq 1}) \leq \frac{bc((e_n)_{n\geq 1})(1+\theta)}{1-\theta}$
3. Αν η $(e_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βάση τότε και η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βάση
4. Αν $\overline{\langle (e_n)_{n\geq 1}\rangle}$ είναι συμπληρωματικός τότε και ο $\overline{\langle (x_n)_{n\geq 1}\rangle}$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος ($Y\hookrightarrow X$ συμπληρωματικός $\Leftrightarrow \exists P: X\to Y$ επί, γραμμική και φραγμένη προβολή)

. Απόδειξη: Αρχικά θέτουμε $K=bc((e_n)_{n\geq 1})$. Έστω τώρα: e_n^* $\overline{\langle e_n : n\in\mathbb{N}\rangle}^*$ το διορθογώνιο του $(e_n)_{n\geq 1}$. Από Hahn-Banach κάθε e_n^* επεκτείνεται σε $\overline{e_n}^*$ με $\|e_n^*\|=\|\overline{e_n}^*\|$. Ορίζουμε τώρα $T: X\to X$ με $T(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}e_n^*(x)(x_n-e_n)$ και παρατηρούμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος γιατί παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x\in X$ τότε θα αποδείξουμε ότι: $\sum_{n=1}^{\infty}e_n^*(x)(x_n-e_n)$ [redacted] συγκλίνει και πράγματι παρατηρούμε ότι αν $m>n$: $\left\|\sum_{j=n}^{m}\overline{e_j}^*(x)(x_j-e_j)\right\| \leq \sum_{j=n}^{m}\|\overline{e_j}^*\|\,\|x_j-e_j\|\,\|x\| = \|x\|\sum_{j=n}^{m}\|\overline{e_j}^*\|\frac{\|x_j-e_j\|}{\|e_j\|}\|e_j\|$

$$\leq 2K\|x\|\sum_{j=n}^{m}\frac{\|x_j-e_j\|}{\|e_j\|}\longrightarrow 0 \text{ από υπόθεση}$$

και άρα ο T είναι καλά ορισμένος.

• <u>Θεώρημα Mazur:</u> Έστω X απειροδιάστατος Banach. Έστω $\varepsilon>0$: $\exists (e_n)_{n\geq 1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ Schauder βασική ακολουθία με $bc((e_n)_{n\geq 1}) \leq 1+\varepsilon$.

- Επιλέγουμε $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στο $(0,+\infty)$ με $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) \leq (1+\varepsilon)$ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\varepsilon_n) = \log(1+\varepsilon)$. Επιλέγουμε: $y_1 \in S_X$ και επαγωγικά $(y_n)_{n\geq 2}$ τέτοια ώστε: $\forall n\in\mathbb{N}$: έχουμε ότι $\forall \lambda\in\mathbb{R}$: $y \in \langle (y_i)_{i=1}^{n} \rangle$ και: $\|y\| \leq (1+\varepsilon_n)\|y+\lambda y_{n+1}\|$

και τότε: $bc((y_n)_{n\geq 1}^{\infty}) \leq 1+\varepsilon$ γιατί πράγματι: αν $n<m$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ τότε: $\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\| \leq (1+\varepsilon_n)\|\sum_{j=1}^{n+1} a_j y_j\| \leq (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_n)\|\sum_{j=1}^{n+2} a_j y_j\|$ $\leq \dots \leq \left(\prod_{k=n}^{m-1}(1+\varepsilon_k)\right)\|\sum_{j=1}^{m} a_j y_j\| \leq (1+\varepsilon)\|\sum_{j=1}^{m} a_j y_j\|$ και άρα από πρόταση έχουμε ότι η $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι schauder βασική ακολουθία

- <u>Ορισμός:</u> Έστω X,Y χώροι Banach και $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\geq 1}\in Y^{\mathbb{N}}$ Schauder βασικές. Αυτές καλούνται <u>ισοδύναμες</u>: αν: $\forall (a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει ανν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει

• <u>Χαρακτηρισμός - Πρόταση:</u> Έστω X,Y Banach και $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\geq 1}\in Y^{\mathbb{N}}$ Schauder βασικές. Τ.Ε.Ε.Ι.:

1. Οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι ισοδύναμες
2. $\exists\, T: \overline{\langle x_n: n\in\mathbb{N}\rangle} \to \overline{\langle y_n: n\in\mathbb{N}\rangle}$ γραμμικός, επί, ισομορφισμός με $T(x_n)=y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$
3. $\exists\, c, C>0$ τέτοιες ώστε $\forall k\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$:
$$c\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\| \leq \|\sum_{j=1}^{k} a_j y_j\| \leq C\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\|$$

- <u>Απόδειξη:</u> $1 \Rightarrow 2$.): θέτουμε $X' = \overline{\langle (x_n)_{n\geq 1}\rangle}$, $Y' = \overline{\langle (y_n)_{n\geq 1}\rangle}$ και ορίζουμε: $T: X'\to Y'$ τέτοια ώστε: $\forall \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j$ που συγκλίνει θέτουμε: $T\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j y_j$. Τώρα παρατηρούμε ότι είναι καλά ορισμένος, γραμμικός, 1-1 και επί και $T(x_n)=y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Τώρα παρατηρούμε ότι ο T είναι γραμμικός και $T(e_n)=x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ το οποίο έπεται άμεσα. Επίσης παρατηρούμε ότι: ο T είναι φραγμένος και $\|T\|\leq 1+\theta$ γιατί: έχουμε ότι αν πάρουμε $x\in X$: $\|T(x)\|=\|x+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{e}_n^*(x)(x_n-e_n)\|$

$$\leq \|x\|+\sum_{n=1}^{\infty}\|\bar{e}_n^*\|\|x\|\|x_n-e_n\| = \|x\|\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\|\bar{e}_n^*\|\|x_n-e_n\|\right)$$

$$=\|x\|\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n^*\|\frac{\|x-e_n\|}{\|e_n\|}\|e_n\|\right)\leq \|x\|\left(1+2K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x-e_n\|}{\|e_n\|}\right)$$

$=\|x\|(1+\theta)$ και άρα αφού $1+\theta<+\infty$ έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\|\leq 1+\theta$.

Επίσης έχουμε ότι: $\|T^{-1}\|\leq \frac{1}{1-\theta}$ και ο T^{-1} είναι φραγμένος: Πράγματι, παρατηρούμε ότι: αν πάρουμε $x\in X$: $\|x-T(x)\|=\|\sum_{n=1}^{\infty}\bar{e}_n^*(x)(x_n-e_n)\|$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|\|\bar{e}_n^*\|\|x_n-e_n\| = \|x\|\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n^*\|\|x_n-e_n\| = \|x\|\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n^*\|\|e_n\|\frac{\|x_n-e_n\|}{\|e_n\|}$$

$\leq 2K\|x\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x_n-e_n\|}{\|e_n\|}=\theta\|x\|$ και άρα: $\|x\|\leq\|x-T(x)\|+\|T(x)\|$

$\leq \|T(x)\|+\theta\|x\| \Rightarrow \|T(x)\|\geq \|x\|(1-\theta)\Rightarrow \|x\|\leq \frac{1}{1-\theta}\|T(x)\|$ και

άρα ο T^{-1} είναι φραγμένος και $\|T^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\theta}$

Επίσης παρατηρούμε ότι ο T είναι και επί: γιατί έστω προς άτοπον ότι δεν είναι και τότε έχουμε ότι: $Y=\operatorname{Im}T=T(X)\subsetneq X$ και τότε από συνέπειες Hahn-Banach έχουμε ότι υπάρχει $f\in S_{X^*}$ και $f|_Y=0$. Τότε αφού: $\|f\|=1>\theta$ και άρα υπάρχει $x\in S_X$ τέτοιο ώστε: $\theta<f(x)=f(\underbrace{T(x)}_{\in Y})+f(x-T(x))=f(x-T(x))\leq\|f\|\|x-T(x)\|=\|x-T(x)\|$

$\leq\theta\|x\|=\theta$, και άρα άτοπο. Επομένως οι $(x_n)_{n\geq1}$, $(e_n)_{n\geq1}$ είναι congruent. Τώρα από προηγούμενη παρατήρηση αφού η $(e_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βασική έπεται ότι και η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βασική και $bc((x_n)_{n\geq1})\leq\|T\|\|T^{-1}\|\,bc((e_n)_{n\geq1})$

$\leq\frac{1+\theta}{1-\theta}bc((e_n)_{n\geq1})$. Επίσης πάλι από προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι αν η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder basis τότε και η $(e_n)_{n\geq1}$ είναι schauder basis.

- Τώρα παρατηρούμε ότι εάν ο $\overline{\langle}$[redacted]$: n\in\mathbb{N}\rangle$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X τότε έπεται ότι υπάρχει $P: X\to\overline{\langle}$[redacted]$: n\in\mathbb{N}\rangle$ γραμμικός, επί και φραγμένη προβολή και άρα αν θεωρήσουμε την $T\circ P\circ T^{-1}: X\to\overline{\langle}$[redacted]$: n\in\mathbb{N}\rangle$ είναι γραμμικός ως σύνθεση γραμμικών, φραγμένος ως σύνθεση φραγμένων, προβολή αφού: $(T\circ P\circ T^{-1})\circ(T\circ P\circ T^{-1})=T\circ P\circ(T^{-1}\circ T)\circ P\circ T^{-1}=T\circ P\circ I\circ P\circ T^{-1}$

Το $P\circ T^{-1}$ και επίσης έχουμε ότι είναι και επί το οποίο ελέγχεται εύκολα.

- <u>Απόδειξη παρατήρησης</u>: Έστω $(x_n)_{n\geq1}\in X^{\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\geq1}\in Y^{\mathbb{N}}$ όπου X,Y είναι χώροι Banach, οι οποίες είναι congruent w.r.t (X,Y) και έστω ότι η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βάση. Τότε θα αποδείξουμε ότι και η $(y_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βάση.

Από υπόθεση έχουμε ότι: $\exists\, T: X\to Y$ γραμμικός, επί, ισομορφισμός με $T(x_n)=y_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Έστω επομένως $y\in Y$ και τότε αφού ο T είναι επί: $\exists x\in X: T(x)=y$ και αφού η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βάση του X: $\exists!\, n\in\mathbb{N}\ \exists!\, a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}: x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ και άρα $T(x)=y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nT(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n$ αφού ο T είναι συνεχής, και άρα από την μοναδικότητα του $n\in\mathbb{N}$ και των συντελεστών $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ έχουμε μοναδική γραφή για το y και άρα η $(y_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βάση του Y. Τώρα παρατηρούμε ότι αν η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βασική τότε θα αποδείξουμε ότι η $(y_n)_{n\geq1}$ είναι και αυτή Schauder βασική: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $(y_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βάση για τον $\overline{\langle y_n:n\in\mathbb{N}\rangle}$ και ~~από πρόταση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\forall n\geq m\in\mathbb{N}$~~ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$: $\|\sum_{k=1}^m a_ky_k\|\leq K\|\sum_{k=1}^n a_ky_k\|$ όπου $K>0$ καθολικό.

Έστω επομένως: $n,m\in\mathbb{N}$ με $n\geq m$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι αφού η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βασική του X έχουμε ότι: $\|\sum_{k=1}^m a_kx_k\|\leq K_1\|\sum_{k=1}^n a_kx_k\|$ και άρα έχουμε ότι: $\|\sum_{k=1}^m a_ky_k\| = \|\sum_{k=1}^m a_kT(x_k)\|\leq \sum_{k=1}^m |a_k|\,\|T(x_k)\|$
$\leq \|T\|\sum_{k=1}^m|a_k|\|x_k\| = \|T\|\sum_{k=1}^m\|a_kx_k\|$

Τώρα παρατηρούμε ότι: αν θεωρήσουμε τον $X'=\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle \hookrightarrow X$ και θεωρήσουμε τον $T|_{\overline{X'}}$ τότε αυτός είναι γραμμικός, φραγμένος ως περιορισμός του T που είναι τέτοιος. Επίσης είναι και επί με $T|_{\overline{X'}}(\overline{X'})=\overline{\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle}=\overline{Y'}$ όπου: $Y'=\langle y_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ το οποίο ελέγχεται εύκολα και επίσης: $T|_{\overline{X'}}(x_n)=T(x_n)=y_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$ και άρα έπεται όπως παραπάνω ότι η $(y_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βάση του Y. Επομένως είδαμε ότι από αυτό έπεται ότι και οι $(x_n)_{n\geq1}$ και $(y_n)_{n\geq1}$ είναι ισοδύναμες εξ' ορισμού.

και άρα από το λήμμα έχουμε το ζητούμενο.

► <u>Θεώρημα</u>: (Pełczyński). Έστω X Banach χώρος με Schauder βάση $(e_n)_{n\geq 1}$ και έστω Y απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του X. Τότε: $\exists\, (x_n)_{n\geq 1} \preceq (e_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1} \in Y^{\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε: οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ να είναι ισοδύναμες και μάλιστα congruent.

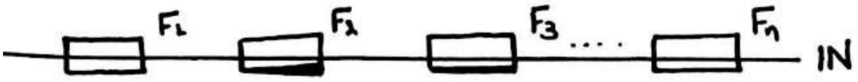
- <u>Απόδειξη</u>: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $W_n = \overline{span}\{e_j : j \geq n\}$ και τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ ο W_n είναι πεπερασμένης συνδιάστασης και συνεπώς $Y\cap W_n \neq \{0\}$. Θέτουμε $K = bc((e_n)_{n\geq 1})$ και επιλέγουμε $(\varepsilon_n)_{n\geq 1} \in (0,+\infty)^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{4K}$. Επαγωγικά τώρα επιλέγουμε $(y_n)_{n\geq 1} \in S_Y^{\mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n\geq 1} \preceq (e_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: $\|y_n - x_n\| < \varepsilon_n$: Για $n=1$ επιλέγουμε $y_1 \in S_Y$ και επιλέγουμε $p\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|y_1 - \sum_{j=1}^{p} e_j^*(y_1)e_j\| < \varepsilon_1$ και θέτουμε $x_1 = \sum_{j=1}^{p} e_j^*(y_1)e_j$. Έστω τώρα ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει $y_1,\dots,y_n \in S_Y$ και $x_1,\dots,x_n$ block διανύσματα της $(e_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: $\|x_i - y_i\| < \varepsilon_i$, $\forall i=1,\dots,n$. Θέτουμε τώρα $q = \max supp_{(e_n)_{n\geq 1}}(x_n)$ και τότε επιλέγουμε $y_{n+1} \in S_Y \cap W_q$ και τότε έχουμε ότι: $y_{n+1} = \sum_{j=q+1}^{\infty} e_j^*(y_{n+1})e_j$ (καθώς: $e_j^*(y_{n+1}) = 0$, $\forall j \leq q$) και έστω και $p\in\mathbb{N}$: $\|y_{n+1} - \sum_{j=q+1}^{p} e_j^*(y_{n+1})e_j\| < \varepsilon_{n+1}$ και έστω $x_{n+1} = \sum_{j=q+1}^{p} e_j^*(y_{n+1})e_j$ και τότε έχουμε ότι $(y_n)_{n\geq 1} \in S_Y^{\mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n\geq 1} \preceq (e_n)_{n\geq 1}$ και $\|x_n - y_n\| < \varepsilon_n$, $\forall n \geq 1$. Τώρα από προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία και $bc((x_n)_{n\geq 1}) \leq K$. Επίσης έχουμε ότι: $\|x_n\| \geq \|y_n\| - \|x_n - y_n\| = 1 - \|x_n - y_n\| > 1 - \varepsilon_n > 1 - \frac{1}{4K} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Τώρα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\|x_n\|} \leq \frac{2}{4K} = \frac{1}{2K}$$

και άρα από πρόταση έχουμε ότι: οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι congruent

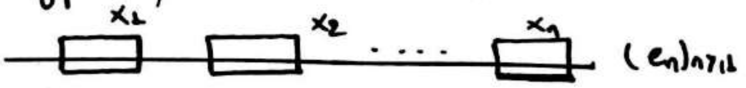
- Χώροι Banach: Μάθημα 4ο: Τύπος:

▸ <u>Ορισμός</u>: 1. Μια ακολουθία $(F_n)_{n\geq1}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, μη κενών και πεπερασμένων καλείται block ακολουθία αν: $\forall n\in\mathbb{N}$: έχουμε ότι: $\max_{n\in\mathbb{N}} F_n < \min_{n\in\mathbb{N}} F_n$



2. Έστω X ένας χώρος Banach και $(e_n)_{n\geq1}$ μια βάση Schauder βασική ακολουθία. Για κάθε $x\in\overline{span}\{e_n: n\in\mathbb{N}\}$ θέτουμε $supp_{(e_n)_{n\geq1}}(x)=\{n\in\mathbb{N}: e_n^*(x)\neq 0\}$ όπου: e_n^* είναι τα διορθογώνια της $(e_n)_{n\geq1}$. (Ισοδύναμα: αν $x=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j$ τότε: $supp_{(e_n)_{n\geq1}}(x)=\{n\in\mathbb{N}: \lambda_n\neq 0\}$).

3. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\geq1}$ που $\overline{span}\{e_n: n\in\mathbb{N}\}$ καλείται block υπακολουθία της $(e_n)_{n\geq1}$ αν: $(supp_{(e_k)_{k\geq1}}(x_n))_{n\geq1}$ είναι block ακολουθία στο $\mathbb{N}$ και τότε θα γράφουμε ότι: $(x_n)_{n\geq1}\preceq(e_n)_{n\geq1}$. Ειδικότερα: $x_k\in span\{e_n: n\in\mathbb{N}\}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.



- <u>Παρατήρηση</u>: Έστω X χώρος Banach και $(e_n)_{n\geq1}$ μια Schauder βασική ακολουθία, και έστω $(x_n)_{n\geq1}\preceq(e_n)_{n\geq1}$. Τότε:

1. $\exists(F_n)_{n\geq1}$ block ακολουθία στο $\mathbb{N}$ και $a=(a_n)_{n\geq1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι: $x_n=\sum_{j\in F_n} a_j e_j$ (μάλιστα είναι αν και μόνο αν)

2. $\exists(p_n)_{n\geq1}$ ακολουθία στο $\mathbb{N}\cup\{0\}$ γνησίως αύξουσα και $(a_n)_{n\geq1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\forall n\in\mathbb{N}$: έχουμε ότι: $x_n=\sum_{j\in p_n+1}^{p_{n+1}} a_j e_j$

3. Η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία με $bc((x_n)_{n\geq1})\leq bc((e_n)_{n\geq1})$.

- Θα χρησιμοποιήσουμε γνωστό χαρακτηρισμό των Schauder βασικών ακολουθιών:
Αφού: $(x_n)_{n\geq1}\preceq(e_n)_{n\geq1}$ έχουμε ότι: από παραπάνω παρατήρηση: $\exists(F_n)_{n\geq1}$ block ακολουθία στο $\mathbb{N}$ και $(a_n)_{n\geq1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\sum_{j\in F_n} a_j e_j = x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τώρα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $m<n$ στο $\mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι:

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\sum_{i\in F_j} a_i e_i\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in F_j}\lambda_j a_i e_i\right\| \leq bc((e_n)_{n\geq1})\left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in F_j}\lambda_j a_i e_i\right\| = bc((e_n)_{n\geq1})\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right\|$$

- **Πρόταση:** (Bessaga-Pełczyński selection principle):

Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n\geq 1}$ και έστω και $(x_n)_{n\geq1}\in X^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: (α). $\inf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|>0$, (β). $\forall k\in\mathbb{N}: e_k^*(x_n)\to 0$. Τότε έχουμε ότι: $\forall\varepsilon>0: \exists (x_{k_n})_{n\geq1}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\geq1}$ και $(y_n)_{n\geq1}\preceq(e_n)_{n\geq1}$ τέτοιες ώστε: οι (x_{k_n}) και $(y_n)_{n\geq1}$ θα είναι congruent.

- **Απόδειξη:** Έστω αρχικά $a=\inf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|>0$ και έστω και $K=bc((e_n)_{n\geq1})$ και επιλέγουμε $(\varepsilon_n)_{n\geq1}\in(0,+\infty)^{\mathbb{N}}$ με $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{a}{4K}$. Επιλέγουμε τώρα $(k_n)_{n\geq1}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$ και $(y_n)_{n\geq1}\preceq(e_n)_{n\geq1}$ τέτοια ώστε: $\|y_n-x_{k_n}\|<\varepsilon_n$: Θέτουμε: $k_1=1$ και επιλέγουμε $p\in\mathbb{N}$: $\|x_1-\sum_{j=1}^{p}e_j^*(x_1)e_j\|<\varepsilon_1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει $k_1<\dots<k_n$ στο $\mathbb{N}$ και $y_1,\dots,y_n$ block διανύσματα της $(e_n)_{n\geq1}$ με: $\|x_{k_i}-y_i\|<\varepsilon_i$, $\forall i=1,\dots,n$. Θέτουμε τώρα: p [redacted] $=\max \operatorname{supp}_{(e_n)_{n\geq1}}(y_n)$ και από την υπόθεση (β): $\exists k_{n+1}>k_n$: $\|\sum_{j=1}^{p}e_j^*(x_{k_{n+1}})e_j\|<\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$. Επιλέγουμε τώρα $q>p$: $\|x_{k_{n+1}}-\sum_{j=1}^{q}e_j^*(x_{k_{n+1}})e_j\|<\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$ και θέτουμε $y_{n+1}=\sum_{j=p+1}^{q}e_j^*(x_{k_{n+1}})e_j$ και τότε: $\|y_{n+1}-x_{k_{n+1}}\|<\varepsilon_{n+1}$ και έχουμε ότι η $(x_{k_n})_{n\geq1}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\geq1}$ και $(y_n)_{n\geq1}\preceq(e_n)_{n\geq1}$. Τέλος έχουμε ότι: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\|y_n-x_{k_n}\|<\varepsilon_n<\frac{a}{4K}<\frac{a}{2}\overset{\|x_{k_n}\|\geq a}{\Longrightarrow}\|y_n\|\geq\|x_{k_n}\|-\|x_{k_n}-y_n\|\geq a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$ και αφού τώρα από παρατήρηση η $(y_n)_{n\geq1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία και $bc((y_n)_{n\geq1})\leq K$ έπεται ότι αφού: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x_{k_n}-y_n\|}{\|y_n\|}<\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{2}{a}\frac{a}{4K}=\frac{1}{2K}\leq\frac{1}{2bc((y_n)_{n\geq1})}$ έπεται από πρόταση οι $(y_n)_{n\geq1}$ και $(x_{k_n})_{n\geq1}$ είναι congruent.

Ασθενής Τοπολογία + Ασθενής* Τοπολογία:

(Συμβολισμός: Έστω A σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^A$ οικογένεια συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}$ και με $\tau(A,\mathcal{F})$ συμβολίζουμε την μικρότερη τοπολογία στο A που κάνει όλα τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ συνεχή. Τώρα: $\forall \varepsilon>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall f_1,\dots,f_n\in\mathcal{F}$, $\forall x\in A$: $W(x,f_1,\dots,f_n,\varepsilon) = \{y\in A: |f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon,\ \forall i=1,\dots,n\}$ και $B=\{W(x,f_1,\dots,f_n,\varepsilon): \varepsilon>0, n\in\mathbb{N}, f_1,\dots,f_n\in\mathcal{F}, x\in A\}$ είναι βάση περιοχών της $\tau(A,\mathcal{F})$)

- Έστω X χώρος με νόρμα. Η ασθενής τοπολογία τ_w του X είναι η $\tau(X,X^*)$ με τον παραπάνω συμβολισμό.

Ιδιότητες:
1. $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$
2. $x_n \xrightarrow{w} x \iff \forall f\in X^*: f(x_n)\to f(x)$
3. Αν $x_n \xrightarrow{w} x$ τότε η (x_n) είναι norm-φραγμένη (από αρχή ομοιόμορφου φράγματος)

- Θεώρημα Mazur: Κάθε κυρτό και κλειστό είναι ασθενώς κλειστό

- Έστω X χώρος με νόρμα. Η ασθενής * τοπολογία τ_{w^*} του X^* είναι η $\tau(X^*,X) = \tau(X^*,\hat{X})$ όπου: $\hat{X}$ = η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}

Ιδιότητες:
1. X αυτοπαθής $\iff \tau_w = \tau_{w^*}$
2. $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^* \iff \forall x\in X: x_n^*(x)\to x^*(x)$
3. Θεώρημα Alaoglu: Έστω X χώρος με νόρμα και τότε: (B_{X^*}, τ_{w^*}) συμπαγής

- Ασκήσεις: Έστω A σύνολο και $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{R}^A$. Τότε:
1. $\tau(A,\mathcal{F}) = \tau(A,\langle\mathcal{F}\rangle)$
2. Η $\tau(A,\mathcal{F})$ είναι Hausdorff $\iff$ το $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του A ($\forall x,y\in A$ με $x\neq y$: $\exists f\in\mathcal{F}: f(x)\neq f(y)$).
3. Αν $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του A και $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο τότε η $\tau(A,\mathcal{F})$ είναι μετρικοποιήσιμη με μετρική την $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \min\{1, |f_n(x)-f_n(y)|\}$ όπου $\mathcal{F}=\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$

- Άσκηση: Έστω X χώρος με νόρμα και $X^* \supseteq \mathcal{F} \supseteq D$ όπου: $\overline{D}^{\|\cdot\|_{X^*}} = \mathcal{F}$. Έστω $K\subseteq X$ φραγμένο και τότε: $\tau(K,D) = \tau(K,\mathcal{F})$

- Υπόδειξη: Προφανώς $\tau(K,D) \subseteq \tau(K,\mathcal{F})$ [illegible]. Έστω τώρα $M = \sup_{x\in K}\|x\| < \infty$

Έστω $x \in X$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ και έστω και $g_1, \dots, g_n \in D$ τ.ω: $\|g_i - f_i\| < \frac{\varepsilon}{3M}$
και τότε: $K \cap W(x, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) \supseteq K \cap W(x, g_1, \dots, g_n, \frac{\varepsilon}{2})$

- **Πόρισμα:** Αν X χώρος με νόρμα και X^* διαχωρίσιμος τότε: (B_X, τ_w) είναι μετρικοποιήσιμος. Αν X χώρος με νόρμα διαχωρίσιμος, τότε ο (B_{X^*}, τ_{w^*}) μετρικοποιήσιμος και συμπαγής.

- Χώροι Banach: Μάθημα 52: Τύπος:

▸ Παρατήρηση: Έστω A σύνολο και τ τοπολογία του A η οποία είναι συμπαγής και Hausdorff (με άλλα λόγια (A,τ) - συμπαγής και Hausdorff χώρος). Έστω τ' μια άλλη τοπολογία στο A τέτοια ώστε: η τ' να είναι επίσης συμπαγής και Hausdorff και $\tau' \subseteq \tau$. Τότε: $\tau' = \tau$.

- Απόδειξη: Πράγματι: αρχικά έχουμε ότι: $\tau' \subseteq \tau$ από υπόθεση και άρα μένει να αποδείξουμε ότι $\tau \subseteq \tau'$. Θεωρούμε την απεικόνιση: $I_{d_A} : (A,\tau) \longrightarrow (A,\tau')$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι συνεχής αφού $\tau' \subseteq \tau$. Τώρα έστω: $U \in \tau$ και τότε το U^c είναι τ-κλειστό και αφού ο (A,τ) είναι συμπαγής έπεται ότι το U^c είναι τ-συμπαγές και άρα αφού I_{d_A} είναι συνεχής: $I_{d_A}(U^c) = U^c$ είναι τ'-συμπαγές και αφού τ' είναι Hausdorff έπεται ότι U^c είναι και τ'-κλειστό $\Rightarrow U \in \tau'$ και άρα $\tau \subseteq \tau'$ και από τους 2 εγκλεισμούς έχουμε το ζητούμενο.

(Σε Hausdorff τοπολογικούς χώρους συμπαγή $\equiv$ κλειστά)

▸ Πόρισμα: Έστω X χώρος με νόρμα και τέτοιος ώστε: να υπάρχει $(x_n^*)_{n\geq 1}$ ακολουθία του X^* που διαχωρίζει τα σημεία του X. Αν $K \subseteq X$ είναι τ_w-συμπαγές ο $(K, \tau_{w|_K})$ είναι μετρικοποιήσιμος

▸ Πόρισμα: Έστω X χώρος με νόρμα ο οποίος είναι διαχωρίσιμος. Αν $K \subseteq X$ είναι τ_w-συμπαγές, τότε: $(K, \tau_{w|_K})$ είναι μετρικοποιήσιμος.

- Απόδειξη: Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος έπεται ότι: υπάρχει $(x_n)_{n\geq 1}$ πυκνή ακολουθία του X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$: $\exists x_n^* \in S_{X^*}$ τέτοια ώστε: $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$ από πόρισμα του Hahn-Banach. Τότε έχουμε ότι τα $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ διαχωρίζει τα σημεία του X (ελέγχεται και μάλιστα είναι norming-set δηλαδή $\forall x \in X: \|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)|$ και από προηγούμενο πόρισμα έπεται το ζητούμενο.

► <u>Ορισμός:</u> Έστω K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε $C(K) = \{ f: K \to \mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής} \}$ και αυτός είναι διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις. Μάλιστα γίνεται χώρος με νόρμα με την: $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$ και εύκολα ελέγχεται ότι αυτός είναι χώρος Banach

– <u>1η παρατήρηση:</u> Έστω K_1, K_2 συμπαγείς τοπολογικοί χώροι. Αν $\exists\, \varphi: K_1 \to K_2$, 1-1, επί, αμφισυνεχής τότε ο $C(K_1)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $C(K_2)$:

– Πράγματι: έστω: $T: C(K_2) \to C(K_1)$: $T(f) = f\circ\varphi$ και παρατηρούμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος γιατί: $f\circ\varphi: K_1 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παρατηρούμε ότι είναι και 1-1 γιατί αν: $T(f_1) = T(f_2)$ όπου: $f_1, f_2 \in C(K_2) \Rightarrow f_1\circ\varphi = f_2\circ\varphi \Rightarrow$ ~~$\forall x\in K_1: f_1(\varphi(x)) = f_2(\varphi(x))$ και άρα αν πάρουμε $x,y\in K_1$ με $\varphi(x)=\varphi(y)$ $x\neq y \overset{\varphi:1\text{-}1}{\Longrightarrow} \varphi(x)\neq\varphi(y) \Rightarrow f_1(\varphi(x)) \neq f_2(\varphi(y))$~~ $f_1\circ\varphi\circ\varphi^{-1} = f_2\circ\varphi\circ\varphi^{-1} \Rightarrow f_1 = f_2$ και άρα T είναι 1-1.

Επίσης ο T είναι επί: γιατί αν $g\in C(K_1)$ τότε θέλουμε να βρούμε $f\in C(K_2)$ με $T(f) = g = f\circ\varphi \iff$ να βρούμε [redacted] $f\in C(K_2)$: $f\circ\varphi = g$ και άρα για $f =$ [redacted] $g\circ\varphi^{-1}: K_2 \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών αφού η φ είναι αμφισυνεχής και g συνεχής από υπόθεση έπεται ότι: αφού και $f\circ\varphi = g\circ\varphi^{-1}\circ\varphi$ $g\circ I_d = g$ έχουμε ότι ο T είναι επί. Επίσης έχουμε ότι ο T είναι ισομετρία γιατί:

$$\forall f\in C(K_2): \|T(f)\|_{C(K_1)} = \|f\circ\varphi\|_{C(K_2)} = \sup_{x\in K_1} |f\circ\varphi(x)| = \sup_{x\in K_1} |f(\varphi(x))| \overset{\varphi:\text{ επί}}{=} \sup_{x\in K_1} |f(x)| = \|f\|_{C(K_2)}$$

• **2η παρατήρηση:** Αν $\exists\ \varphi: K_1 \to K_2$ συνεχής και επί, τότε ο $C(K_2)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $C(K_1)$ πάλι με την ίδια συνάρτηση μόνο που έχουμε ισομετρική εμφύτευση και όχι ισομετρική ισομορφία.

• **3η παρατήρηση:** Κάθε χώρος με νόρμα εμφυτεύεται ισομετρικά σε κάποιον $C(K_1)$ με K_1: συμπαγής, Hausdorff, και αν επιπλέον ο X είναι διαχωρίσιμος τότε ο K_1 είναι μετρικοποιήσιμος.

- Πράγματι θεωρούμε τον $K_1 = (B_{X^*}, \tau_{w^*})$ και έστω $T: X \to C(K_1)$ τέτοια ώστε: $T(x) = \hat{x}|_{B_{X^*}}$ όπου: $\hat{x}: X^* \to \mathbb{R}$ γραμμικό, συνεχής ($\hat{x} \in X^{**}$) και τότε έχουμε ότι

↳ από την κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}

ο T είναι καλά ορισμένος, γραμμικός και ισομετρία γιατί: παρατηρούμε ότι $\forall x \in X$: $\hat{x}: X^* \to \mathbb{R}$ στην κανονική εμφύτευση το $\hat{x}$ είναι γραμμικό και άρα και $\hat{x}|_{B_{X^*}}$ είναι επίσης γραμμικό ανεξαρτήτως και μάλιστα είναι και συνεχές και άρα ο T είναι καλά ορισμένος. Επίσης: $\forall x \in X$: $\|T(x)\|_{C(K_1)} = \|\hat{x}|_{B_{X^*}}\|_{C(B_{X^*})}$ $= \sup\limits_{x^* \in B_{X^*}} |\hat{x}(x^*)| = \sup\limits_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \|x\|$ και άρα είναι και ισομετρία

από κατασκευή ↳ από Hahn-Banach

$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\}$

(**Θεώρημα:** Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}: Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $\wedge: X \to X^{**}$ ώστε: $\|x\| = \|\hat{x}\|_{X^{**}}$ και για κάθε $x^* \in X^*$: $x^*(x) = \hat{x}(x^*)$

- Απόδειξη: Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε: $\hat{x}: X^* \to \mathbb{R}$ με τον κανόνα: $x^*(x) = \hat{x}(x^*)$ και δείχνουμε ότι η $\hat{x}$ είναι γραμμική απεικόνιση: (ελέγχεται εύκολα). Για να αποδείξουμε τώρα ότι: $\forall x \in X$: $\|x\|_X = \|\hat{x}\|_{X^{**}}$ θα χρησιμοποιήσουμε την εναλλακτική περιγραφή του $\|x\|, x \in X$ που είναι συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach: $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\}$. Δεδομένου ότι: $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ έχουμε ότι: $\|\hat{x}\|_{X^{**}} =$ $= \sup\{|\hat{x}(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\} = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\} = \|x\|_X$ και άρα έχουμε το ζητούμενο)

▸ <u>Παρατήρηση 4η</u>

Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος εμφυτεύεται ομοιομορφικά στον $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (με την τοπολογία γινόμενο).

- Έστω (K_1,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $diam(K_1)=\sup\{\rho(x,y): x,y\in K_1\}\le 1$, αλλιώς παίρνουμε $\frac{1}{diam(K_1)}\le 1$, και αφού τώρα ο (K_1,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος έπεται ότι είναι διαχωρίσιμος και άρα $\exists\, (d_n)_{n\ge 1}\in K_1^{\mathbb{N}}$ πυκνή. Ορίζουμε $\vartheta: K_1\to[0,1]^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\forall x\in K_1$: $\vartheta(x)=(\rho(x,d_n))_{n\ge 1}$ και τότε έχουμε ότι η ϑ είναι 1-1 και συνεχής (μάλιστα αμφισυνεχής)

και είναι 1-1 γιατί αν ~~για κάποια $x,y\in K_1$ ισχύει~~ ότι: $\vartheta(x)=\vartheta(y)$ τότε: $\rho(x,d_n)=\rho(y,d_n)$, ~~$\forall n\ge 1$~~ και άρα: $\rho(x,y)\le \rho($

γιατί έχουμε ότι: αν πάρουμε $(x_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία στο K_1 με $x_n\to x$ τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι: [redacted] $\vartheta(x_k)\xrightarrow{k\to\infty}\vartheta(x) \Leftrightarrow (\rho(x_k,d_n))_{n\ge 1}\xrightarrow{k\to\infty}(\rho(x,d_n))_{n\ge 1} \Leftrightarrow \rho(x_k,d_n)\xrightarrow{k\to\infty}\rho(x,d_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και αφού τώρα [redacted] ~~είναι συνεχής~~ $x_k\to x$ έπεται ότι $\rho(x_k,x)\to 0$ και άρα $\forall n\in\mathbb{N}$:

$|\rho(x_k,d_n)-\rho(x,d_n)|\le \rho(x_k,x)\longrightarrow 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο και άρα η ϑ είναι συνεχής. (ουσιαστικά χρησιμοποιήσαμε ότι η μετρική είναι συνεχής)

- Θέτουμε τώρα $K_2=\vartheta(K_1)\subseteq[0,1]^{\mathbb{N}}$ και αφού η ϑ είναι συνεχής και το K_1 συμπαγές έπεται ότι και το $K_2\subseteq[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές και $C(K_1)$ ισόμορφος με τον $C(K_2)$ από την [redacted] παρατήρηση αφού: $\vartheta: K_1\to K_2$ είναι 1-1, επί, αμφισυνεχής.

▸ <u>Παρατήρηση 5η</u>: $\exists\, f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]$ επί και συνεχής (θεωρούμε την $f((x_n)_{n\ge 1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$). Τώρα καθώς το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικό με το $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ έπεται ότι $\exists\, g:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]^{\mathbb{N}}$ η οποία είναι επί και συνεχής.

- Θέτουμε $K_3=g^{-1}(K_2)$ και τότε έχουμε ότι: $K_3\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ συμπαγές και $g: K_3\to K_2$ είναι συνεχής και επί και άρα από παρατήρηση 2η ο $C(K_2)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $C(K_3)$ και έχουμε: $C(K_1)\cong C(K_2)\hookrightarrow C(K_3)$

► Παρατήρηση 6η:

$\exists\, h: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, 1-1 και συνεχής $\left(h((x_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \right)$

και ορίζουμε: $K_4 = h(K_3)$ και τότε $K_4 \subseteq [0,1]$ συμπαγές αφού το K_3 είναι συμπαγές και h: συνεχής και: $h|_{K_3}: K_3 \to K_4$, 1-1, επί, αμφισυνεχής και άρα από παρατήρηση 1 ο $C(K_3)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $C(K_4)$ και το K_4 είναι κλειστό αφού $K_4 \subseteq [0,1]$ → Hausdorff αφού είναι μετρικός χώρος και το K_4 είναι συμπαγές.

Επομένως: $X \underset{\sim}{\subsetneq} C(K_1) \cong C(K_2) \underset{\sim}{\subsetneq} C(K_3) \cong C(K_4)$

► Παρατήρηση 7η: Έστω $E \subseteq [0,1]$ κλειστό. Ο $C(E)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $C[0,1]$.

- Πράγματι καθώς $E \subseteq [0,1]$ κλειστό $\Longrightarrow \mathcal{U} = [0,1] \setminus E$ είναι σχετικά ανοιχτό στο $[0,1]$ και άρα $\exists\, (I_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία από ξένα ανά 2 [redacted] υποσύνολα του $[0,1]$ τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ να έχουμε ότι το I_n είναι της μορφής: είτε: $[0,a)$, είτε: $(b,1]$ ή (a,b) όπου $0<a<b<1$, και $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Για κάθε $f \in C(E)$ ορίζουμε τώρα: $g_f \in C[0,1]$ τέτοια ώστε: 1. $g_f|_E = f$, 2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η g_f είναι αφφινική (γραμμική) τέτοια ώστε: 2a): αν: $I_n = [0,a)$ τότε: $g_f(0) = 0$ και $\lim_{x \to a^-} g_f(x) = f(a)$, 3a).: αν $I_n = (b,1]$ τότε: $g_f(1) = 0$ και $\lim_{x \to b^+} g_f(x) = f(b)$ και 3a): αν $I_n = (a,b)$ τότε: $\lim_{x \to a^+} g_f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \to b^-} g_f(x) = f(b)$. Ορίζουμε τώρα: $T: C(E) \to C([0,1])$ με $T(f) = g_f$, $\forall f \in C(E)$ και τότε η T είναι γραμμική ισομετρία (ελέγχεται εύκολα)

- Θεώρημα: (Banach-Mazur): Έστω ότι X είναι διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Τότε ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον $C([0,1])$ (και άρα σε χώρο με μονότονη Schauder βάση).

• **Πόρισμα:** Έστω X Banach και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ τ.ω $x_n \xrightarrow{w} 0$ και $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$.

Τότε $\forall \varepsilon > 0$: $\exists (x_{k_n})_{n\geq 1}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\geq 1}$ τ.ω η $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ να είναι Schauder βασική με $bc((x_{k_n})_{n\geq 1}) \leq 1+\varepsilon$.

– Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και είναι και $Y = \overline{span}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ και τότε έχουμε ότι ο Y είναι διαχωρίσιμος και $\exists T: Y \to C[0,1]$ γραμμική ισομετρία. Τότε όμως: $\forall n\in\mathbb{N}$: αφού: ο T είναι ισομετρία έχουμε ότι: $\|T(x_n)\| = \|x_n\|$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα: $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T(x_n)\| > 0$ και επίσης έχουμε ότι αφού $T(x_n) \xrightarrow{w} 0$ γιατί αν $x^* \in C[0,1]^*$ έχουμε ότι: $x^*(T(x_n)) \to 0$ γιατί: αφού: $x^* \circ T \in Y^*$ από Hahn-Banach έπεται ότι $\exists z \in X^*$ τέτοιο ώστε: $z^*|_Y = x^* \circ T$ και αφού: $x_n \xrightarrow{w} 0$ έπεται ότι: $z^*(x_n) \to 0$ όπου όμως: $z^*(x_n) = (x^* \circ T)(x_n) = x^*(T(x_n))$ αφού: $x_n \in Y$ και άρα: $x^*(T(x_n)) \to 0$

Τώρα από Bessaga-Pełczyński έπεται ότι $\exists (T(x_{k_n}))_{n\geq 1}$ υπακολουθία της $(T(x_n))_{n\geq 1}$ για την οποία ισχύει ότι η $(T(x_{k_n}))_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία και $bc((T(x_{k_n}))_{n\geq 1}) \leq 1+\varepsilon$ αφού ο $C([0,1])$ έχει Schauder βάση και μάλιστα μονότονη όπως έχουμε δει σε προηγούμενη κατασκευή. Τώρα αφού ο T είναι ισομετρία εύκολα παρατηρούμε ότι η $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ που είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι και αυτή Schauder βασική με $bc((x_{k_n})_{n\geq 1}) \leq 1+\varepsilon$ γιατί: αν πάρουμε $n, m \in \mathbb{N}$ με $m > n$ και $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ τότε: $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i} \right\| \leq \cancel{\sum_{i=1}^{n} |a_i| \|x_{k_i}\| \overset{T:\text{ισομ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|T(x_{k_i})\|}$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} \|a_i T(x_{k_i})\| \quad \|T\| \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i}\right)\right\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i}\right)\right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_{k_i}) \right\|}$$

$$\cancel{\leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i T(x_{k_i}) \right\| \leq (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{m} |a_i| \|T(x_{k_i})\| = (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{m} |a_i| \|x_{k_i}\|}$$

$$\overset{T:\text{isometry}}{=} \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i}\right)\right\| \overset{T:\text{γρ.}}{=} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_{k_i}) \right\| \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i T(x_{k_i}) \right\| = (1+\varepsilon) \left\| T\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_{k_i}\right)\right\| \overset{T:\text{isometry}}{=} (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i} \right\|$$

και άρα από λήμμα έχουμε το ζητούμενο.

Scanned with CamScanner