Μάθημα 9ο   Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα   6/11/2019

Συστήματα χώρου καταστάσεων της μορφής:

$$x_i(k+1) = f_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i(k) = g_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Ισοδύναμα γράφονται:

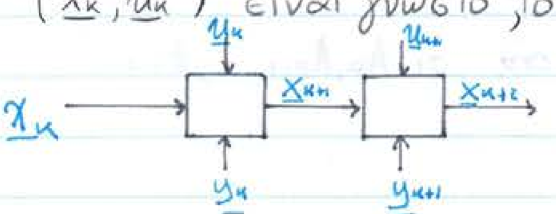
$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \qquad \text{όπου} \quad \underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}_k = \underline{g}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \qquad \underline{u}_k = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{y}_k = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{pmatrix}$$

με αρχική συνθήκη $\underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0$, $k \geq k_0$

Παρατήρηση

Αν $(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ είναι γνωστό τότε τα $(\underline{x}_{k+1}, \underline{y}_k)$ είναι καθορισμένα μονοσήμαντα



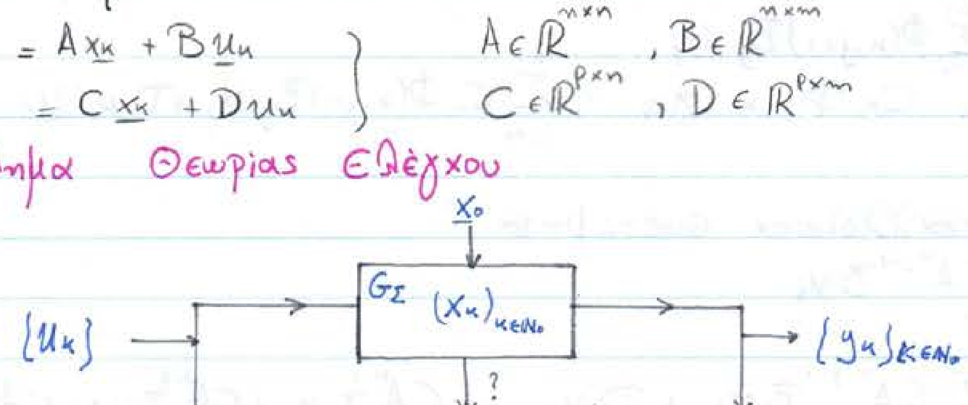
Γραμμικό (χρονικά μεταβαλλόμενο)

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A(k)\,\underline{x}_k + B(k)\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C(k)\,\underline{x}_k + D(k)\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \geq k_0 \qquad \begin{aligned} &A : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}, \; B : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times m} \\ &C : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times n}, \; D : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times m} \end{aligned}$$

Γραμμικό (χρονικά αναλλοίωτο)

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ &C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \; D \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{aligned}$$

Πρόβλημα Θεωρίας Ελέγχου



Απόκριση γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου

Συστήματα με μηδενική είσοδο

$\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k \qquad x(k_0) = x_0$

Η λύση $\underline{x}_k = A_{k-1}\underline{x}_{k-1} = A_{k-1}A_{k-2}\underline{x}_{k-2} = \overbrace{A_{k-1}A_{k-2}\dots A_{k_0}}^{\Phi(k,k_0)}\, \underline{x}_{k_0}$

Ο πίνακας $\Phi(k,k_0) = \prod_{i=k_0}^{k-1} A_i$ είναι ο πίνακας μεταφοράς.

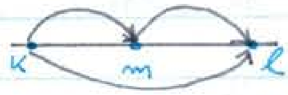
Στην αναλλοίωτη περίπτωση

$\underline{x}_k = A^{k-k_0}\underline{x}_{k_0}$ οπότε $\Phi(k,k_0) = A^{k-k_0}$

Ιδιότητες

1) $\Phi(k,k) = I_n$

2) $\Phi(k,\ell) = \Phi(k,m)\,\Phi(m,\ell)$



3) $\Phi(k,\ell)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι $A_p, A_{p+1}, \dots, A_{k-1}$ είναι αντιστρέψιμοι

Συστήματα με μη μηδενική είσοδο

$\underline{x}_k = A_{k-1}\underline{x}_{k-1} + B_{k-1}\underline{u}_{k-1} = A_{k-1}(A_{k-2}\underline{x}_{k-2} + B_{k-2}\underline{u}_{k-2}) + B_{k-1}\underline{u}_{k-1} =$

$= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}}_{\Phi(k,k-2)}\underline{x}_{k-2} + \underbrace{A_{k-1}}_{\Phi(k,k-1)}B_{k-2}\underline{u}_{k-2} + \underbrace{I}_{\Phi(k,k)}B_{k-1}u_{k-1}$

$\Rightarrow \underline{x}_k = \Phi(k,k-2)\underline{x}_{k-2} + \sum_{j=k-2}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j$ και γενικά

$\underline{x}_k = \Phi(k,k_0)\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j$

Όμοια για το $y_k = C_k\Phi(k,k_0)\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}C_k\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j + D_k\underline{u}_k$

Οπότε για χρονικά αναλλοίωτα συστήματα

$x_k = A^{k-k_0}\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}A^{k-j-1}B\underline{u}_j$

$y_k = CA^{k-k_0}\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=0}^{k-1}CA^{k-j-1}B\underline{u}_j + D\underline{u}_k = CA^{k-1}B\underline{u}_0 + CA^{k-2}B\underline{u}_1 + \dots + CA^{0}B\underline{u}_{k-1} + D\underline{u}_k$

όμως για συστήματα εισόδου-εξόδου $y_k = \sum_{j=0}^{k} G(k-j)\underline{u}_j$

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 6/11/2019

Έτσι

$$CA^{k-1}B = G(k) \quad , \quad CA^{k-2}B = G(k-1) \quad , \ldots , \quad CA^0B = G(1) \quad , \quad D = G(0)$$

οπότε η ακολουθία Μαρκον

$$\{G(k)\} = (D, CB, CAB, CA^2B, \ldots)$$ (αναλλοίωτο από τους πίνακες A, B, C, D)

Το σύστημα περιγράφεται από τις

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$
$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Έστω $\hat{x}(z) = Z\{x_k\}$, $\hat{y}(z) = Z\{y_k\}$, $\hat{u}(z) = Z\{u_k\}$

Θα έχω

$$z\hat{x}(z) - zx_0 = A\hat{x}(z) + B\hat{u}(z)$$
$$\hat{y}(z) = C\hat{x}(z) + D\hat{u}(z)$$

$\Rightarrow (z-I_n)A\,\hat{x}(z) = zx_0 + B\hat{u}(z)$ υποθέτω ότι το z δεν είναι ιδιοτιμή του A

$$\hat{x}(z) = z(zI_n - A)^{-1}\underline{x_0} + (zI-A)^{-1}B\hat{u}(z)$$

Αν $x_0 = 0$. τότε

$$\hat{x}(z) = (zI_n - A)^{-1}B\hat{u}(z)$$
$$\hat{y}(z) = (\underbrace{C(zI_n-A)^{-1}B + D}_{\text{συνάρτηση μεταφοράς}})\,\hat{u}(z)$$

Παράδειγμα: Έστω

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x_k + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u_k$$

$$y_k = \underbrace{(1 \quad 0)}_{C} x_k + \underbrace{(0)}_{D} u_k$$

Αναλυτικά

$$x^1_{k+1} = x^1_k + x^2_k + u_k$$
$$x^2_{k+1} = x^2_k + u_k$$
$$\hat{y}_k = x^1_k$$

$$\hat{G}(z) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Οι δύο πόλοι του $\hat{G}(z)$ είναι οι ιδιοτιμές του A με την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα.

Μάθημα 10ο Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 12/11/2019

Θεώρημα: Αν σύστημα καταστάσεων χώρου

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \qquad x(0) = x_0 \qquad (*)$$
$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\hat{G}(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$, $|z| > \|A\|$

Απόδειξη:

Η λύση του $(*)$ για $x_0 = 0$ $\quad x_t = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u_k$, $t \geq 0$

$\Rightarrow y_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t-1} CA^{t-k-1} B u_k + Du_k = C\left(\sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u_k\right) + Du_k$

όμως $D + C\left(\sum_{k=1}^{t-1} A^{k-1}\right)B$ συγκλίνει

και

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{t-1} A^{k-1} z^{-k}\right\} \longrightarrow (zI - A)^{-1}$$

Η ακολουθία Markov $(D, CB, CAB, \ldots)$

$$\mathcal{Z}\{\ \} = D + CBz^{-1} + CABz^{-2} + \ldots = D + C\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-n}\right)B = D + C(zI - A)^{-1}B$$

Η σειρά $(CA^{k-1}B)_{k \in N}$ είναι εκθετικά φραγμένη. Πράγματι

$$\|CA^{k-1}B\| \leq \underbrace{\|C\|\|B\|}_{M}\|A^{k-1}\| \leq M\alpha^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\hat{G}(z) = D + C(zI - A)^{-1}B = D + C\,\frac{adj(zI_n - A)}{\varphi(z)}\,B \qquad \left(A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ \ \varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)\right)$$

$$= \frac{C\,adj(zI - A)B + \varphi(z)D}{\varphi(z)} = \frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

$\deg(N_{ij}(z)) \leq n$

Αν $D_{ij} = 0$ τότε $\deg(N_{ij}(z)) < n = \deg(\varphi(z))$

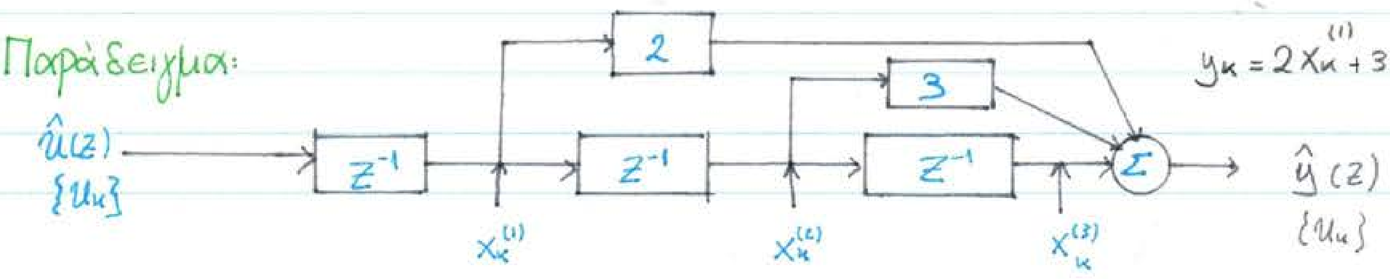
Αν $D_{ij} \neq 0$ τότε $\deg(N_{ij}(z)) = n = \deg(\varphi(z))$

Αν $D = 0$ $\hat{G}(z)$ αυστηρά κανονική

Γενικά $\hat{G}(z)$ κανονική συνάρτηση

Θεώρημα: Έστω $\hat{G}(z)$ συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος εισόδου-εξόδου. Τότε $\hat{G}(z)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος χώρου καταστάσεως τότε και μόνο τότε $\hat{G}(z)$ ρητή και κανονική.

Παράδειγμα:



$$y_k = 2x_k^{(1)} + 3x_k^{(2)} + x_k^{(3)} + u_k$$

$$\hat{x}^{(1)}(z) = z^{-1}\hat{u}(z)$$
$$\hat{x}^{(2)}(z) = z^{-1}\hat{x}^{(1)}(z) = z^{-2}\hat{u}(z)$$
$$\hat{x}^{3}(z) = z^{-1}\hat{x}^{2}(z)$$

$$x^{(3)}_{k+1} = x^{(2)}_{k} \qquad x_k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)}_{k+1} = u_k \qquad (x^{(2)}_{k+1} = x^{(1)}_{k}) \Leftarrow x^{(2)}_{k} = x^{(1)}_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}_{k+1} \\ x^{(2)}_{k+1} \\ x^{(3)}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x^{(1)}_{k} \\ x^{(2)}_{k} \\ x^{(3)}_{k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u_k$$

$$[y_k] = \underbrace{[2 \quad 3 \quad 1]}_{C} \begin{bmatrix} x^{(1)}_{k} \\ x^{(2)}_{k} \\ x^{(3)}_{k} \end{bmatrix} + \underbrace{[1]}_{D} u_k$$

$$\hat{G}(z) = C(zI - A^{-1})B + D$$

$$(zI_3 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & 0 \\ z^{-2} & z^{-1} & 0 \\ z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(z) = z^3 \qquad \alpha dj(zI - A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} z & 0 \\ -1 & z \end{vmatrix} = z^2 \qquad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji}$$

$$\hat{G}(z) = [2 \quad 3 \quad 1] \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & 0 \\ z^{-2} & z^{-1} & 0 \\ z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1$$

$$= 2z^{-1} + 3z^{-2} + z^{3} + 1 = \frac{2z^2 + 3z + 1 + z^3}{z^3}$$

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

12/11/2019

Ισοδύναμα Συστήματα

Έστω
$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned}\right\}$$

x_k διάνυσμα κατάστασης

Ορίζω $z_k = T^{-1} x_k \quad T \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \Leftrightarrow x_k = T z_k \quad \det(T) \neq 0$

$$T^{-1} x_{k+1} = \underbrace{T^{-1} A T}_{\hat{A}} \underbrace{T^{-1} x_k}_{z_k} + \underbrace{T^{-1} B}_{\hat{B}} u_k$$

$$y_k = \underbrace{C T}_{\hat{C}} z_k + \underbrace{D}_{\hat{D}} u_k$$

$$\Sigma_G(A,B,C,D) \overset{T}{\sim} \Sigma_G(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$$

$$\hat{G}_2(z) = \hat{C}(zI-\hat{A})^{-1}\hat{B}+D = CT\left[zI - T^{-1}AT\right]^{-1} T^{-1}B + D$$
$$= C\left[zI-A\right]^{-1}B + D = \hat{G}_1(z)$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{C}\hat{A}^{k-1}B^k & k \geq 1 \\ \hat{D} & k=0 \end{matrix}\right\} \overset{T}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} CA^k B & k \geq 1 \\ D & k=0 \end{matrix}\right.$$

$$\hat{C}\hat{A}^{k-1}\hat{B} = CT(T^{-1}AT)^k T^{-1}B = CA^k B$$

$$(T^{-1}AT)^2 = T^{-1}ATT^{-1}AT = T^{-1}A^2 T$$

$$\sigma(A) = \sigma(\hat{A})$$