Μάθημα 1ο   Ε14   Διακριτά Δυναμικά Συστήματα   8/10/2019

- Εισαγωγικά
- 1ης τάξης
- Ευστάθεια 1ης τάξης
- Γραμμικά n-τάξης $\rightarrow$ z-μετασχηματισμοί
  $\rightarrow$ και μια ακόμα μέθοδος

Δυναμικά Συστήματα (διακριτού χρόνου)

- Εισόδου/Εξόδου
- Καταστάσεων χώρου
- Θεωρία Ευστάθειας (Lyapunov)
- Γραμμικά συστήματα (κατ. χώρου)

Ευστάθεια   Επίλυση   Εφαρμογές

Εφαρμογές $\rightarrow$ Θεωρία Ελέγχου
$\rightarrow$ Ανάλυση Σήματος
$\rightarrow$ Πιστοποίηση Σήματος

Εισαγωγικά

Έστω ότι $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ και $y_{k+n} = f(k, y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \dots, y_k)$ (*)

Η (*) είναι εξίσωση διαφορών.
Αν οι "αρχικές συνθήκες" $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ είναι γνωστές τότε κάθε y_k, $k\in\mathbb{N}_0$ ορίζεται μονοσήμαντα.

Προβλήματα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)
Μοναδική συνάρτηση $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί ταυτοτικά την (*) $(\forall k\in\mathbb{N}_0)$ και τις αρχικές συνθήκες $(y(0)=y_0, \dots, y(n-1)=y_{n-1})$

Ορισμός. Η τάξη της (*) είναι η διαφορά μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου δείκτη.

Παρατήρηση: Αν ο αριθμός αρχικών συνθηκών είναι ίσος με τη τάξη της (*)

τότε η λύση του ΠΑΤ είναι μοναδική.

Ορισμός: Η (*) είναι γραμμική αν είναι της μορφής

$$y_{k+n} + \alpha_1(k)\, y_{k+n-1} + \alpha_2(k)\, y_{k+n-2} + \ldots + \alpha_n(k)\, y_k = R_k$$

Αν $R_k = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$: η εξίσωση είναι ομογενής

Αν $R_k \neq 0$ για κάποιο k : η εξίσωση είναι μη ομογενής

Παρατήρηση: Αν η εξίσωση είναι γραμμική ομογενής, τότε το σύνολο των λύσεων είναι διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$), δηλαδή αν $\varphi_1(k)$ και $\varphi_2(k)$ είναι λύσεις τότε $c_1 \varphi_1(k) + c_2 \varphi_2(k)$ είναι λύση

Παραδείγματα

(i) $y_{k+1} - 3y_k + y_{k-1} = e^k$ Γραμμική 2ης τάξης μη ομογενής

(ii) $y_{k+1} = y_k^2$ Μη γραμμική 1ης τάξης

(iii) $y_{k+4} - y_k = 0$ Γραμμική ομογενής 4ης τάξης

(iv) $y_{k+3} = \cos(y_k)$ Μη γραμμική 3ης τάξης

Παράδειγμα 1: Έστω αρχικό κεφάλαιο A_0 και έστω σταθερό επιτόκιο r (ετήσιο)

1 2 n-1 n

$A_0 \qquad A_0 + A_0 r \qquad A_{n-1} \qquad A_n = A_{n-1} + r A_{n-1} = (1+r) A_{n-1}$

$$A_n = (1+r) A_{n-1} = (1+r)^2 \cdot A_{n-2} = \ldots = (1+r)^n \cdot A_0$$

Παράδειγμα 2: Έστω οικοσύστημα με πληθυσμό N_k τη χρονική στιγμή t_k και έστω ότι στο διάστημα (t_k, t_{k+1}) έχουμε:

$b \cdot N_k$ γεννήσεις και $d \cdot N_k$ θανάτους τότε

- $N_{k+1} = \underbrace{(1+b-d)}_{\lambda} \cdot N_k \implies N_k = \lambda^k \cdot N_0$

- $\lambda > 1 \quad (b > d) \implies N_k \to \infty$
- $\lambda < 1 \quad (b < d) \implies N_k \to 0$

Ε14 Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 8/10/2019

Παράδειγμα 3: Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με δυναμοσειρά

Έστω $y'' + 3ty' + 3y = 0$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα λύσης στο διάστημα $(\alpha, \beta) \to 0$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 + c_1 t + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^{k-2} \implies y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k \, t^{k-2}$$

$$\Downarrow$$

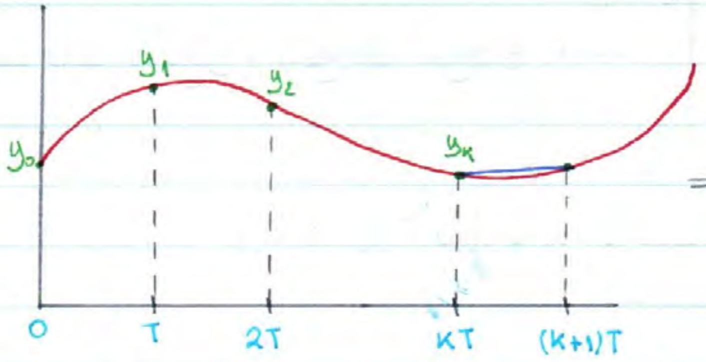
$$t\, y'(t) = t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot c_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} (k-2)\, c_{k-2}\, t^{k-2}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[k(k-1) \cdot c_k + 3(k-2) \cdot c_{k-2} + 3\, c_{k-2} \right] \cdot t^{k-2} = 0 \implies k(k-1) \cdot c_k + 3(k-2) c_{k-2} + 3 c_{k-2} = 0 \ \forall k \geq 2$$

Παράδειγμα 4: Αριθμητική Επίλυση διαφορικών εξισώσεων

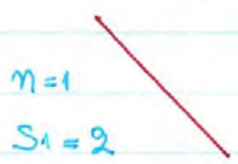
Έστω $y' = f(t,y) = \dfrac{dy}{dt} \simeq \dfrac{y[(k+1) \cdot T] - y[kT]}{T} = f(kT, y_k)$

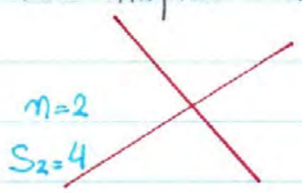


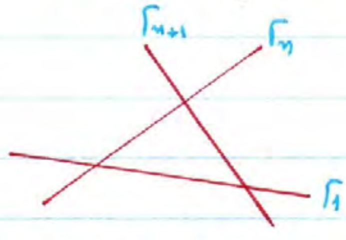
$$\implies y_{k+1} = y_k + \underbrace{T \cdot f(kT, y_k)}_{g(k, y_k)} \implies y_{k+1} - y_k - g(k, y_k) = 0$$

Παράδειγμα 5: Έστω ότι έχουμε n ευθείες στο επίπεδο ("γενική θέση")

Έστω S_n ο αριθμός των χωρίων του επιπέδου







$S_{n+1} = S_n + n + 1$

$$S_n = S_{n-1} + n = S_{n-2} + (n-1) + n \implies$$

$$S_n = \underset{1+1}{\underset{\parallel}{S_1}} + 2 + 3 + \dots + n = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Παραγωγή εξισώσεων διαφορών

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 5^k \\ y_{k+1} &= c_1 2^{k+1} + c_2 5^{k+1} \\ y_{k+2} &= c_1 2^{k+2} + c_2 5^{k+2} \end{aligned}\right\} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_k & 2^k & 5^k \\ y_{k+1} & 2^{k+1} & 5^{k+1} \\ y_{k+2} & 2^{k+2} & 5^{k+2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{0}}$$

Αν $|A| \neq 0 \Rightarrow \underline{x} = 0$ (αδύνατο)

Άρα $|A| = 0$

$$A\underline{x} = 0 \Rightarrow \underbrace{2^k \cdot 5^k}_{\neq 0} \begin{vmatrix} y_k & 1 & 1 \\ y_{k+1} & 2 & 5 \\ y_{k+2} & 4 & 25 \end{vmatrix} \longrightarrow 30y_k - 21y_{k+1} + 3y_{k+2} = 0 \Rightarrow$$

$$y_{k+2} - 7y_{k+1} + 10y_k = 0$$