Διακριτά Δυναμικά Συστήματα (Ιανουάριος 2020).

Θέμα 1°

Νά λυθεί τό ΠΑΤ: $\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k + \underline{b}\, u_k$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

καί $u_k = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Θέμα 2°

(α) Έστω ότι (b_k) καί (c_k), $k \in \mathbb{N}_0$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών καί ψ_k λύση της εξίσωσης $y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = 0$, με $\psi_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Έστω ότι v_k είναι λύση του ΠΑΤ

$$v_{k+1} + \left(1 + b_k \frac{\psi_{k+1}}{\psi_{k+2}}\right) v_k = 0, \quad v_0 = 1$$

καί έστω ότι u_k είναι λύση της εξίσωσης: $u_{k+1} - u_k = v_k$. Αν $\hat{\psi}_k = u_k \psi_k$ δείξτε ότι $\hat{\psi}_k$ είναι λύση της εξίσωσης $y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = 0$ καί ότι οι ακολουθίες (ψ_k) καί $(\hat{\psi}_k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(β) Δίνεται η εξίσωση: $y_{k+2} - \frac{k+3}{k+2} y_{k+1} + \frac{2}{k+2} y_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Δείξτε ότι $\xi_k = 2^k/k!$ είναι λύση της εξίσωσης καί βρείτε δεύτερη λύση, ψ_k, γραμμικά ανεξάρτητη από την ξ_k.

Θέμα 3ο

Δίδεται η εξίσωση: $y_{k+2} + p_1 y_{k+1} + p_2 y_k = \alpha$, όπου $1+p_1+p_2 \neq 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τό μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης είναι: $y^* = \alpha(1+p_1+p_2)^{-1}$. Έστω $p(r) = r^2 + p_1 r + p_2 = (r-\lambda_1)(r-\lambda_2)$. Δείξτε ότι $y_k \to y^*$ καθώς $k \to \infty$ γιά κάθε $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$, ή ισοδύναμα, αν: $1+p_1+p_2 > 0$, $1-p_1+p_2 > 0$ καί $1-p_2 > 0$. Δείξτε επίσης ότι: $|p_1|+|p_2| < 1$ είναι ικανή συνθήκη γιά την καθολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου y^* (αλλά όχι αναγκαία).

Θέμα 4ο

Έστω οι εξισώσεις διαφορών:

(α) ~~$y_{k+2}+\alpha y_{k+1}$~~ $y_{k+1} = \tan^{-1}(y_k)$, $k \geq 0$
$(\tan^{-1}(\cdot) \equiv$ τοξεφ$(\cdot))$.

(β) $y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k^3 + y_k)$, $k \geq 0$.

(γ) $y_{k+1} = \dfrac{a y_k}{1+b y_k}$, $k \geq 0$, $a > 1$, $b > 0$.

Να βρείτε τά σημεία ισορροπίας καί νά τά χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθεια.

Θέμα 5ο

Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$ αύξουσα συνάρτηση καί $g = f \circ f$ (δηλ. $g(x) = f(f(x))$.). (α) Δείξτε ότι a είναι σημείο ισορροπίας της εξίσωσης: $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, αν καί μόνο αν a

είναι σημείο ισορροπίας της εξίσωσης $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. (β) Έστω ότι $a = f(a)$ και $|f'(a)| < 1$. Δείξτε ότι a είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας της εξίσωσης $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Θέμα 6°

Να λυθεί η εξίσωση: $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 3^k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Θέμα 7°

Γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{G}(z) = \left[\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})} \;\middle|\; \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \right]^T$$

όπου $\alpha \neq \beta$.

(α) Να βρεθεί πραγματοποίηση του συστήματος (δηλ. να γραφεί το σύστημα σε μορφή: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B u_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D u_k$)

(β) Να βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος (δηλ. την ακολουθία εξόδου (y_k) αν η ακολουθία εισόδου είναι $u_k = 1$ $(k=0)$ και $u_k = 0$ $(k \neq 0)$). Θεωρείστε ότι $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \underline{0}$.

Θέμα 8°: Να βρεθεί το διακριτό ισοδύναμο του συστήματος ~~με~~ συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T = \ln(2)$.

Θέμα 9°

Δίνεται τό σύστημα : $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(α) Δείξτε ότι τό σύστημα (A, B) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν τό σύστημα (A, BB^T) είναι πλήρως ελέγξιμο

(β) Δείξτε ότι τό σύστημα (A, B) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν τό σύστημα $(A+BF, BG)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, όπου ~~Gε~~ $\det(G) \neq 0$.

(γ) Έστω ότι:

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

όπου $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_j}$

Δείξτε ότι τό σύστημα (A, B, C) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο ούτε πλήρως παρατηρήσιμο. Νά βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και η ακολουθία Markov (στήν απλούστερη μορφή τους).

Θέμα 10°

Δίνεται τό σύστημα : $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(α) Νά ~~αξα~~ αναλύσετε τίς ιδιότητες ευστάθειας, ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας του συστήματος.

(β) Νά σχεδιάσετε ανάδραση καταστάσεων (της μορφής $\underline{u}_k = F \underline{x}_k$) έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα "κλειστού βρόγχου" $A+BF$ νά είναι ίσες μέ 0.

(γ) Νά σχεδιάσετε παρατηρητή έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $A+LC$ (όπου L ο πίνακας κέρδους του παρατηρητή) νά είναι ίσες μέ 0.

(δ) Μέ χρήση της "αρχής διαχωρισμού" νά σχεδιάσετε δυναμικό αντισταθμιστή που συνδυάζει τίς ιδιότητες στά υποερωτήματα (β) και (γ). ~~Νά βρείτε τήν συνάρτηση. Επιβεβαιώστε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα Acl~~

Καλή επιτυχία