# Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα

25.02.2020
1º Μάθημα

Πρόβλημα Εφαρμογών

↓

Π1 → Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων $Ax=b$ (Μετ/σμοί πινάκων)

Π2 → Εύρεση Ιδιοτιμών Πίνακα

(πχ μέθοδος Cramer)

Ερώτημα: Η υπάρχουσα θεωρητική μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος οδηγεί σε αριθμητική μέθοδο υλοποιήσιμη σε Η/Υ?

Π1

γίνεται η αριθμητική μέθοδος; → Κριτήριο της αριθμητικής μεθόδου:

πολυπλοκότητα (complexity) επηρεάζεται από τη διάσταση:

$A: n \times n \rightarrow O(n!)$

↳ order

(Δεν υλοποιείται αριθμητικά το παραγοντικό)

Παραγοντοποίηση πινάκων (matrix factorisation)

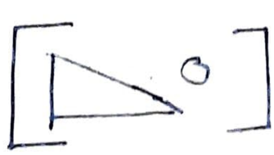
Δοσμένου πίνακα: $A: n\times n$

πχ $A = LU$, αν A αντιστρέψιμος μοναδικό!

L: κάτω τριγωνικός, U: άνω τριγωνικός

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \leftarrow \text{κάτω τριγωνικό σύστημα} \\ Ux=y \leftarrow \text{άνω τριγωνικό σύστημα} \end{cases}$$

ουσιαστικά είναι η απαλοιφή του Gauss με μερική οδήγηση με $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$ (δηλαδή $\frac{n^3}{3}$ πράξεις)

 → πολυπλοκότητα $O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

πράξεις μέχρι $n^3/3$ (μπορώ να υπολογίσω)

Upper bound: $O(n^3)$ (απαιτουμενων πραξεων)

Π2 Οι ιδιοτιμες αντιστοιχουν σε ριζες χαρακτηριστικου πολυωνυμου η βαθμου
(Δυσκολο προβλημα αριθμητικα unstable)

Παραγοντοποιηση πινακα $n \times n$ $A = QR$ (QR factorisation)

Q: $n \times n$ ορθογωνιος
R: ανω τριγωνικος

(μπορει να εφαρμοσθει και σε λυση συστηματων. αλλα συνηθως η Gaussian και η LU μας καλυπτει)

## Βασικα Χαρακτηριστικά Αλγοριθμου ή Αριθμητικής Μεθοδου

A. Γενικου Σκοπού (General Purpose)
(καλυπτει την οποιαδηποτε περιπτωση

B. Αξιοπιστη (Reliable)
(Ανιχνευση πιθανων μαθηματικων προβληματων)
πχ. ανιχνευση μηδενικου στοιχειου με το οποιο εκτελειται διαιρεση.

Γ. Πολυπλοκοτητα (Complexity)
Αποδεκτη ως $O(n^3)$ για γραμμική αλγεβρα

Δ. Ευσταθεια Αλγοριθμου (Stability)

$x \to \hat{x}$

Η αριθμητική του υπολογιστη ειναι πεπερασμενη (πεπερασμενοι αριθμοι μηχανης)

Rounding Errors

Πραγματικό Σφαλμα $|x-\hat{x}|$ $\rightsquigarrow$ ποσο μικρή θα ειναι αυτή η διαφορα;

- Η υπολογιζόμενη τιμή αποτελεί μικρή διαταραξη της θεωρητικά αναμενόμενης (ευστάθεια)

$\downarrow$

$Ax = b$ : Δοσμένου A και b τσεκάρω το x ( δηλαδή γνωρίζω το αποτέλεσμα για να ελέγξω)

Error $\xrightarrow{}$ Analysis: Παίρνω ένα φράγμα του σφάλματος για να τσεκάρω το stability είναι κοντά στην θεωρητική τιμή.

(Wilkinson, "Rounding Error in Algebric Processes")

Backward Error Analysis → Οπισθοδρόμηση

- Διαταραξη της θεωρητικά αναμενόμενης
- Λύση του διαταραγμένου συστήματος

$(A+E)\hat{x} = b$ , $\|E\| \leq f(yn)$

↳ πίνακας διαταραχής (μικρή διαταραχή)

↳ η διάσταση του προβλήματος unit roundoff error

## Αριθμητική Υπολογιστή

Ταυτίζεται με: υπολογισμούς κινητής υποδιαστολής

Οποιοσδήποτε $x \in \mathbb{R}$ στον υπολογιστή παρίσταται

$\sigma(.a_1,\dots,a_t)_\beta\, \beta^e$ → Μορφή κανονικοποιημένου αριθμού υποδιαστολής

σ → πρόσημο

$a_1,\dots,a_t$ → t ψηφία (mantissa) $a_i \in \{0,1,\dots,\beta-1\}$

β → βάση αριθμητικής (Συνήθως $\beta=2$) και $a_1 \neq 0$ (έχει να κάνει με το normalized)

e → εκθέτης δεδομένου εύρους $m \leq e \leq M$

$\mathcal{M}(\beta, t, m, M) \rightarrow$ Συστημα αριθμων κινητης υποδιαστολης

$\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$
συνολο αριθμων μηχανης

Βασικά Χαρακτηριστικά του $\mathcal{M}$

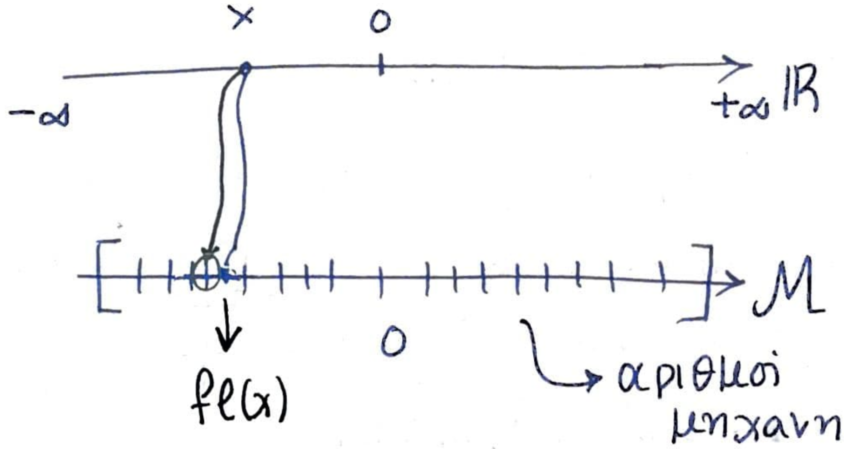
- $M \subset \mathbb{R}$
- Πεπερασμένο
  - ↳ $(\beta-1)$ επιλογες του $a_1$
  - → $\beta^{t-1}$: επιλογη $a_2, \dots, a_t$

Ισχυει για καθε μια εκθετη δηλαδη $(M-m+1)$

Αρα $2(\beta-1)\beta^{t-1}(M-m+1)+1$ (για δεδομενη $\beta$)

↓ θετικοι & αρνητικοί

↳ $0 \in M$




ΣΥΝΕΧΕΣ ⇓ ΔΙΑΚΡΙΤΟ

Θα ξεκινησω απο την αρχη απο $x \in \mathbb{R}$ και κάνοντας τον υπολογισμο εχω ενα floating point $\in M$ (Σφαλμα) $fl(x)$

Σημαντικό να γνωριζω $|x - fl(x)|$

(Αν εισαγω τους αριθμους διατεταγμενα βελτιωνω την ποσοστητα των επιστημονικων υπολογισμων)
(ΣΦΑΛΜΑ)

- Δεν ειναι κλειστο σε βασικες αριθμητικές πράξεις

πχ $M(10, 3, -1, 2)$

$$\begin{array}{cccc} 10 & 3 & -1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \beta & t & m & M \end{array}$$

$a = 11.2 \rightsquigarrow 0.112 \cdot 10^2$
$b = 113 \rightsquigarrow 0.113 \cdot 10$ $\in M$

"Propagation of error"

$a \cdot b = 0.126|56 \cdot 10^2 \notin M$

$0.127 \cdot 10^2 \leftarrow$ στρογγυλευση

Αυτο συμβαινει γιατι δουλευουμε με υπολογισμους t-ψηφιων (t-digit computation)

## Ευρος Κατανομης των Αριθμων στο M

Οποιοσδηποτε floating point αριθμος μπορει να γραφει οπως ειπαμε

$$x = \sigma \bar{x} \beta^e$$

$\bar{x} \hookrightarrow (0.a_1 a_2 \ldots a_t)_\beta$

$m \le e \le M$

Για να βρουμε το ευρος λοιπον εχουμε:

$$\underbrace{(0.10\ldots0)_\beta}_{t \text{ ψηφια}} \le \bar{x} \le \underbrace{(0.(\beta-1)(\beta-1)\ldots(\beta-1))_\beta}_{t \text{ ψηφια}}$$

$\downarrow$ μικροτερη mantissa

$\downarrow$ μεγαλυτερη mantissa

$(d_1 d_2 \dots d_k . d_\ell \dots d_z)_\beta$

$$= \sum_{i=1}^{k} d_i \beta^{i} + \sum_{i=\ell}^{z} d_i \beta^{-i} \rightarrow \text{πολυωνυμική μορφή αριθμού}$$

Άρα, $\frac{1}{\beta} \le \bar{x} \le (\beta-1)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots + \frac{1}{\beta^t}\right) = 1 - \beta^{-t}$

$\beta^{e-1} \le \bar{x}\beta^e \le \beta^e - \beta^{e-t} < \beta^e$

$\Rightarrow \beta^{e-1} \le x\beta^e \le \beta^e$

$\Downarrow$

$\beta^{e-1} \le |x| < \beta^e$

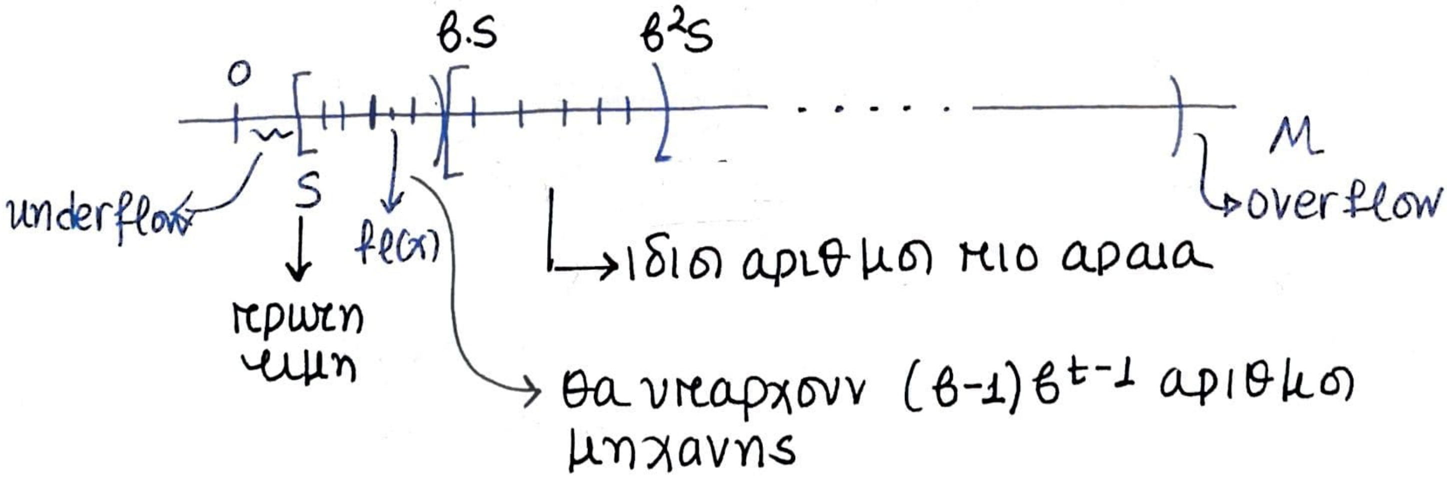
Για κάθε $e$: θετικοί: $[\beta^{e-1}, \beta^e)$ — $(\beta-1)\beta^{t-1}$ κλασματικά μέρη

αρνητικοί: $(-\beta^e, -\beta^{e-1}]$

Σε κάθε διάστημα $[\beta^{e-1}, \beta^e)$ υπάρχουν $(\beta-1)^{t-1}$ κλασματικά μέρη

Συνεπώς το εύρος κατανομής: $\frac{\beta^e - \beta^{e-1}}{\beta^{t-1}(\beta-1)} = \beta^{e-t}$ → βήμα κατανομής

Για κάθε $e = m, m+1, \dots, M-1, M$ θα υπάρχουν αριθμοί μηχανής κατανεμημένοι με βήμα $\beta^{e-t}$



Αρα τα διαστηματα μεγαλωνουν και οι αριθμοι ειναι πολυ πιο αραιοι μεταξυ τους

Στα μικρα διαστηματα το floating point ειναι πιο κοντα στη θεωρητικη τιμη αρα το σφαλμα ειναι μικροτερο

Συμπερασματα

1) Οι αριθμοι μηχανης ειναι πιο πυκνοι κοντα στο 0 και αραιωνουν οσο απομακρυνονται απ'αυτο

Συνεπως καλυτερη ποιοτητα αριθμητικων υπολογισμων με μικρες τιμες (scaling δεδομενων)

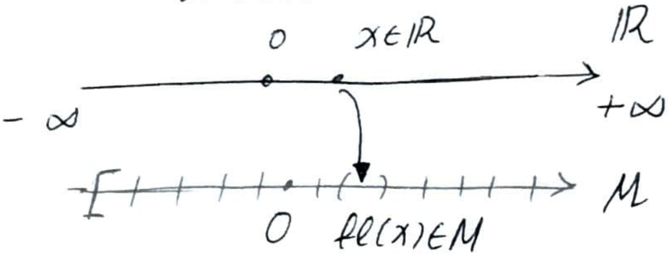
2) Οσο μεγαλυτερο t (mantissa) τοσο πιο πυκνοι οι αριθμοι μηχανης. Αντιθετα, οσο μεγαλυτερο το ευρος του εκθετη τοσο πιο πολυ ειναι το ευρος αναπαραστασης των αριθμων.

27.02.2020
Μάθημα 2º

# Βασική Αριθμητική Υπολογιστή

$$\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{M}(\beta, t, m, M)$$

σύστημα αριθμών κινητής υποδιαστολής




<u>Θεώρημα</u>: Έστω $fl(x)$, η floating point αναπαράσταση ενός $x \in \mathbb{R}$. Τότε το σχετικό σφάλμα που προκύπτει από αυτή την αναπαράσταση δίνεται από τη σχέση

$$Rel = \left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \begin{cases} \frac{1}{2} \beta^{1-t}, & \text{στρογγύλευση} \\ \beta^{1-t}, & \text{αποκοπή} \end{cases}$$

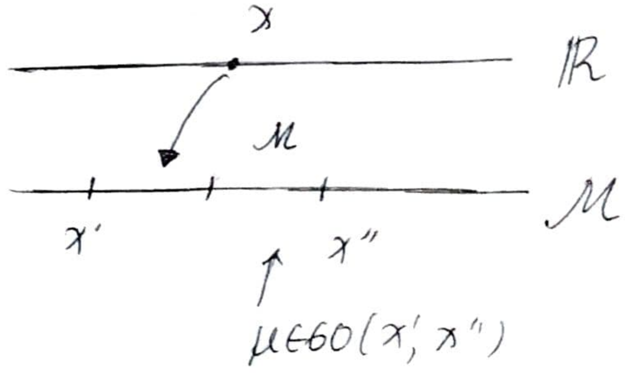
<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x \in \mathbb{R}$

Εκφράζεται σαν κανονικοποιημένος floating point αριθμός σε $\mathcal{M}(\beta, t, m, M)$ ως εξής:

$$x = \sigma(.a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1} \dots)_\beta \, \beta^e$$

$$\downarrow$$

$$fl(x) = \begin{cases} x' = \sigma(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta \, \beta^e, & 0 \leq a_t < \frac{\beta}{2} \\ x'' = \sigma\left[(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta + \beta^{-t}\right] \beta^e, & \frac{\beta}{2} \leq a_{t+1} < \beta \end{cases}$$



$$|x-x'| \le \frac{1}{2}|x'-x''| = \frac{1}{2}\beta^{e-t}$$

↳ βημα κατανομης $\beta^{e-t}$

οποτε το Relative error

$$Rel = \left|\frac{x-x'}{x}\right| \le \frac{\frac{1}{2}\beta^{e-t}\beta^{e-t}}{(.a_1a_2..a_ta_{t+1}..)_\beta \beta^e} \le \frac{1}{2}\frac{\beta^{-t}}{\beta^{-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

ο min αριθμος: $(.1000...)_\beta$

$u$ unit roundoff error

Συμπερασμα:

Απο την αναγνωση (αριθμ) δεδομενων, το σχετικο σφαλμα ειναι $\le u$

$x \to fl(x)$

Σχετικο σφαλμα $O(u)$

- i) IEEE 754 standard
  $M(2, 23, -127, 128)$ $u = 10^{-7}$ } απλη ακριβεια
  η διπλη ακριβεια
  $M(2, 52, -1028, 1028)$ $u = 10^{-16}$
  ↳ mantissa
  χρησιμοποιουνε για τα μοντελα

ii) Με αποκοπη το σφαλμα $u = \beta^{1-t}$

Εαν θεσουμε

$$\varepsilon = \frac{fl(x) - x}{x} \Rightarrow fl(x) = x(1+\varepsilon),\ |\varepsilon| \le u$$

Βασικη αρχη στην αναλυση σφαλματος

Η αναπαρασταση δεδομενων ειναι ευσταθης (stable) γιατι η υπολογιζομενη τιμη ειναι μικρη διαταραξη της θεωρητικα αναμενομενης αρα, $|\varepsilon| \le u = \frac{1}{2} \beta^{1-t} = 10^{-16}$

1ο Βημα: Αναγνωση δεδομενων

$$fl(x) = x(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \le u$$

2ο Βημα: Εκτελεση πραξεων σε $M(\beta,t,m,M)$

(δηλ σε συστημα πεπερασμενης ακριβειας)

δηλ το συνεχες ⇒ διακριτο και πεπ ακριβειας

Μειονεκτηματα:

- Δεν ειναι κλειστο (αναγκαστικα στρογγυλευση)
- Παιζει ρολο η σειρα εκτελεσης των πραξεων

πχ. εκτελεση προσθεσης σε $M(10,6,-3,3)$

$$123 + 456 * 10^{-2} = 123 * 10^{0} + 456 * 10^{-2}$$

αριθμ μηχ $0.123 * 10^{3} + 0.456 * 10^{3} * 10^{-2}$

▶ Ευθυγραμμιση εκθετων προς το μεγαλυτερο

Επεξεργαστης στη CPU εχει mantissa 2t

αρα εχουμε,

$$\begin{array}{r} 0.\overbrace{123}^{t}\overbrace{000}^{t} * 10^{3} \\ +\ 0.004560 * 10^{3} \\ \hline 0.127|560 * 10^{3} \end{array}$$

εκτελεση πραξης ← μεσα στη CPU

Πριν το διωξει προς την οθονη:

1ον κανονικοποιηση: (non zero το 1° digit)

2ον στρογγυλευση

Αρα θα επιστρεψει $0.128 * 10^{3}$ στη RAM.

## Άσκηση (J Wilkinson)

Σ' ένα σύστημα $M(10,4,m,M)$ δίνονται οι εξής αριθμοί μηχ

$$s_1 = 0.4462 * 10^{-3}$$

$$s_2 = 0.6412 * 10^{-3}$$

$$s_3 = 0.2413 * 10^{-3}$$

$$s_4 = 0.1234 * 10^{0}$$

Θεωρητική τιμή $s_1+s_2+s_3+s_4 = 0.1247287$

1) $fl(\underbrace{\underbrace{\underbrace{(s_1+s_2)}_{z_1}+s_3)}_{z_2}+s_4)}_{z_3}$ (εκτέλεση πρόσθεσης από αριστερά προς τα δεξιά)

2) $fl(((s_4+s_3)+s_2)+s_1)$ (εκτέλεση πρόσθεσης από δεξιά προς αριστερά)

### Υπολ 1)

$z_1 = fl(s_1+s_2)$

$$\begin{array}{r} 0.4462 * 10^{-3} \\ +\ 0.6412 * 10^{-3} \\ \hline 1.0874 * 10^{-3} \end{array}$$

εκθέτες ευθυγραμμισμένοι

εκτέλεση πράξης

κανονικοποίηση $\longrightarrow$ $0.10874 * 10^{-2}$

$\longrightarrow$ $0.1087 * 10^{-2} = z_1$

στρογγύλευση

Rounding error $= -0.4 * 10^{-6}$

Στη μηχανή: ανά 2 αριθμοί $\longrightarrow$ πράξη

$\longrightarrow$ αποτέλεσμα RAM $\longrightarrow$ κτλ.

$Z_2 = fl(Z_1 + S_3)$ $\quad 0.1087 * 10^{-2}$ $\quad$ ευθυγραμμιση
$\quad 0.2413 * 10^{-3}$ $\quad$ εκθετων
(2t mantissa)

$$
\begin{array}{r}
0.10870000 * 10^{-2} \\
+\ 0.02413000 * 10^{-2} \\
\hline
0.1328 \vdots 3000 * 10^{-2}
\end{array}
\xrightarrow{\text{στρογγύλευση}} Z_2 = 0.1328 * 10^{-2}
$$

εκτελεση πραξης

Rounding error $= -0.3 * 10^{-6}$

$Z_3 = fl(Z_2 + S_4)$ $\quad \left.\begin{array}{l} 0.1328 * 10^{-2} \\ 0.1234 * 10^{0} \end{array}\right\}$ ευθυγραμμιση εκθετων

$$
\begin{array}{r}
0.12340000 * 10^{0} \\
0.00132800 * 10^{0} \\
\hline
0.1247 \vdots 2800 * 10^{0}
\end{array}
\xrightarrow{\text{στρογγύλευση}} Z_3 = 0.1247 * 10^{0}
$$

εκτελεση πραξη

Rounding error: $= -0.28 * 10^{-4}$

Αρα $fl(((S_1+S_2)+S_3)+S_4) = 0.1247 * 10^{0}$
Αθροισμα rounding errors $= 0.287 * 10^{-3}$
$Rel = 0.00023$

Υπολ 2

$Z_1 = fl(S_4 + S_3)$ $\quad 0.1234 * 10^{0}$ $\quad 0.2413 * 10^{-3}$ $\longrightarrow$ ευθυγραμμιση εκθετων

$$
\begin{array}{r}
0.12340000 * 10^{0} \\
0.00024130 * 10^{0} \\
\hline
0.1236 \vdots 4130 * 10^{0}
\end{array}
\xrightarrow[\text{(στρογγύλευση)}]{\text{Rounding}} Z_1 = 0.1236 * 10^{0}
$$

εκτελεση πραξης

Rounding error $= -0.413 * 10^{-4}$ μεγαλυτερο σφαλμα απο το αντιστοιχο του αθροισματος 1

$z_2 = fl(z_1 + s_2)$ $\quad 0.1236 * 10^0$

$\quad 0.6412 * 10^{-3}$ → ευθυγραμμιση εκθετων

$$\begin{array}{r} 0.12360000 * 10^0 \\ 0.00064120 * 10^0 \\ \hline 0.1242\,|\,4120 * 10^0 \end{array} \xrightarrow{\text{Rounding}} 0.1242 * 10^0 = z_2$$

→ εκτελεση πραξη

Rounding error $= -0.412 * 10^{-4}$

$z_3 = fl(z_2 + s_1)$ $\quad 0.1242 * 10^0$

$\quad 0.4462 * 10^{-3}$ → ευθυγραμμιση εκθετων

$$\begin{array}{r} 0.1242000 * 10^0 \\ 0.0004462 * 10^0 \\ \hline 0.1246\,|\,462 * 10^0 \end{array} \xrightarrow{\text{Rounding}} z_3 = 0.1246 * 10^0$$

→ εκτελεση πραξεων

Rounding error $= -0.462 * 10^{-4}$

Total Rounding error $= -0.413 * 10^{-4} - 0.412 * 10^{-4} - 0.462 * 10^{-4} =$

$= -1.287 * 10^{-4}$

Αρα, $fl(((s_4 + s_3) + s_2) + s_1) = 0.1246 * 10^0$

Rel $= 0.0010318$

## Ασκηση (Wilkinson)

1) Σε συστημα κινητης υποδιαστολης

$M(10, 4, m, M)$

$s_1 = 0.1025 * 10^4$

$s_2 = -0.9123 * 10^3$

$s_3 = -0.9663 * 10^2$

$s_4 = -0.9315 * 10$

Θεωρητικη τιμη: $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 6.755$

Να υπολογιστουν οι ποσοτητες

1) $fl(((s_1 + s_2) + s_3) + s_4)$
2) $fl(((s_4 + s_3) + s_2) + s_1)$

Ποια ειναι πιο ακριβης;

2) Σε ενα συστημα $M(\beta, t, e)$ ισχυουν τα εξης

1) $fl(1 + \beta^{-t}) = 1$, δηλ αγνοειται το $\beta^{-t}$
2) $fl(1 + \beta^{t}) = \beta^{t}$, δηλ αγνοειται το 1
3) $fl(1 - \beta^{t+1}) = -\beta^{t+1}$, » » 1
4) $fl(1 - \beta^{-(t+1)}) = 1$, » » $\beta^{-(t+1)}$

Ελεγχος για $M(10, 3, e)$ (δηλ $\beta = 10$, $t = 3$)

δηλ $fl(1 + 10^{-3})$

03/03/2020
3º Μάθημα

↗ Βασική Αριθμητική Υπολογισμού
Με αριθμητική κινητής υποδιαστολής

$$fl(x) = x(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \le u$$

εΜ ... $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ... $u = \frac{1}{2}\beta^{1+t}$

$fl(x)$ → υπολογιστική τιμή
$x$ → θεωρητική τιμή

IEEE 754_standard
single pres → $u \simeq O(10^{-7})$
doubee pres → $u \simeq O(10^{-16})$

Η υπολογιστική τιμή είναι μικρή διαταραχή της θεωρητικά αναμενόμενης
⇒ ευσταθεια στην αναγνωση δεδομένων.
(stability)

↘ Ανάλυση Σφάλματος
Propagation of error
Backward stability (J. Wilkinson)

Βασικό Αξίωμα: $fl(x_1 \square x_2) = (x_1 \square x_2)(1+\varepsilon)$

$\square \in \{+, -, *, /\}$ $\qquad |\varepsilon| \le u$

$$fl(x_1+x_2) = (x_1+x_2)(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \le u$$

Τις βασικές πράξεις δυο ορισματων τις θεωρουμε ευσταθεις

Βασικές πράξεις (n ορισματων)

$$fl(x_1 x_2 x_3) = fl(\underbrace{fl(x_1 x_2)}_{(x_1x_2)(1+\varepsilon_2)} \cdot x_3) = x_1 x_2 (1+\varepsilon_2) x_3 (1+\varepsilon_3)$$

απο αριστερα προς τα δεξια

$$= \underbrace{x_1 x_2 x_3}_{\text{θεωρητική τιμή}} \underbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_2)}_{\text{παράγοντες σφαλματος}}$$

$|\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \le u$

Οσο αφορα στη συσσωρευση του σφαλματος παιζει ρολο η σειρα εκτελεσης? Δεν παιζει ρολο εδω

1) Γινόμενο n-όρων (είναι το γινόμενο αριθμών)

$P_n = fl(x_1 x_2 \ldots x_n)$

<u>ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ</u>

$P_1 = x_1$

$P_r = fl(P_{r-1} x_r) = P_{r-1} x_r (1+\varepsilon_r), \quad |\varepsilon_r| \leq u$

$r = 2, \ldots, n$

Τελικά, θα έχω

$$P_n = x_1 x_2 \ldots x_n \underbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\ldots(1+\varepsilon_n)}_{\text{propagation of error}}, \quad |\varepsilon_i| \leq u, \; i = 2, \ldots, n$$

$\overset{\shortparallel}{(1+\varepsilon)}$

Θέτω όλο το παραπάνω γινόμενο $(1+\varepsilon_2)\ldots(1+\varepsilon_n)$ ως $1+\varepsilon$. Άρα,

$fl(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n (1+\varepsilon)$

$1+\varepsilon = \prod_{i=2}^{n} (1+\varepsilon_i)$ (θέλω να το φράξω)

$1-u \leq 1+\varepsilon_r \leq 1+u, \quad r = 2, 3, \ldots, n$

$(1-u)^{n-1} \leq 1+\varepsilon \leq (1+u)^{n-1}$

Το φράγμα αυτό δεν είναι καθόλου καλό

Δεν είναι εύκολα υλοποιήσιμο

Ιδανικά θα ήθελα $|\varepsilon| \leq f(n,u) \to n u_1$

$u_1 = 1.01 u_1$

Θα χρησιμοποιήσω τα παρακάτω λήμματα

<u>Λήμμα 1:</u>

Εάν $0 \leq u < 1$ και εάν $n = 1, 2, \ldots$ τότε,

$1 - nu \leq (1-u)^n$

(Απόδειξη με Taylor)

Λημμα 2: Εαν $n=1,2,\dots$ , $0 \le nu < 0.01$

ΤΟΤΕ $(1+u)^n \le 1+1.01nu$

(με ιδιοτητες αυθοσιωνης η αποδειξη)

$u \simeq 10^{-16}$

$n \geq 10^{15} \rightarrow$ για να μην ισχυει το λημμα 2

(διασταση) (πραγματικα αδυνατο)

Ρεαλιστικη υποθεση.

Απο Λημμα 1,2

$$\downarrow$$

$$(1-u)^n \le (1+\varepsilon) \le (1+u)^n$$

$$\Downarrow$$

$$|\varepsilon| \le n \underbrace{u_1}_{= 1.01u}$$

Επομενως, επιστρεφοντας στο φραγμα των γινομενων εχω $|\varepsilon| \le (n-1)u$

Τελικα για γινομενο n-ορων:

$$fl(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n (1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \le (n-1)u_1$$

$$Rel = \frac{|fl(x_1 \dots x_n) - (x_1 x_2 \dots x_n)|}{|x_1 x_2 \dots x_n|} =$$

$$= \frac{|\varepsilon| \cancel{|x_1 \dots x_n|}}{\cancel{|x_1 \dots x_n|}} \le |\varepsilon| \le n u_1$$

$$\Downarrow$$

ΠΑΝΤΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

2) Προσθεση $n$-ορων

$$fl(x_1+x_2+x_3) = fl(\underbrace{fl(x_1+x_2)}_{=(x_1+x_2)(1+\varepsilon_2)}+x_3) =$$

$$=((x_1+x_2)(1+\varepsilon_2)+x_3)(1+\varepsilon_3) =$$

$$= \underbrace{(x_1+x_2)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}_{\text{συσσωρευση σφαλματος}} + x_3(1+\varepsilon_3)$$

Συμπεραινουμε οτι στη συσσωρευση παραγοντων σφαλματος η ποιοτητα αποτελεσματος καλυτερευει εάν οι αριθμοι διατεταχθουν κατ' αυξουσα σειρα και απολυτη τιμη (λιγοτερη συσσωρευση σφαλματος)

$$S_n = fl(x_1+x_2+\dots x_n)$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$$S_1 = x_1$$
$$S_r = fl(S_{r-1}+x_r) \equiv (S_{r-1}+x_r)(1+\varepsilon_r), \quad |\varepsilon_r| \leq u$$

Τελικα

$$S_n = x_1 \underbrace{\prod_{i=2}^{n}(1+\varepsilon_i)}_{(1+\eta_1)} + \sum_{r=2}^{n}\Big(x_r \underbrace{\prod_{i=r}^{n}(1+\varepsilon_i)}_{(1+\eta_r)}\Big), \quad |\varepsilon_i| \leq u, \; i=2,\dots,n$$

$$S_1 = x_1(1+\eta_1)+x_2(1+\eta_2)+\dots+x_n(1+\eta_n)$$

(Διαταραξεις των θεωρητικως αναμενομενων)

Φραγμα:

$$(1-u)^{n-1} \leq 1+\eta_1 \leq (1+u)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$(1-u)^{n-r+2} \leq 1+\eta_r) \leq (1+u)^{n-r+2}, \quad r=2,3,\dots$$

$$|n_i| \leq (n-r+2)u_1, \quad i=1,2,\dots n$$

$$\text{Rel} \; \frac{|fl(x_1+\dots+x_n)-(x_1+x_2+\dots+x_n)|}{|x_1+x_2+\dots+x_n|} =$$

$$= \frac{|x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots x_n n_n|}{|x_1+x_2+\dots+x_n|}$$

$$\leq (n+1)u_1 \frac{|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|}{|x_1+x_2+\dots+x_n|} \gg 1$$

(Αθροισμα απολυτων τιμων)

ΔΕΙΚΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ δεδομένων

Συμπερασμα: Πανελα ευσταθης αν ειναι ομοσημος
Εαν ετεροσημος τοτε ενδεχεται να μην ειναι ευσταθες.

3) Εσωτερικο γινομενο n-ορων

$$ip_n = fl(a_1b_1+\dots+a_nb_n)$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$$t_r = fl(a_r b_r) = a_r b_r (1+\xi_r), \quad |\xi_r| \leq u$$

$$ip_1 = t_1$$

$$ip_r = fl(ip_{r-1}+t_r) = (ip_{r-1}+t_r)(1+n_r), \quad |n_r| \leq u$$

Τελικα,

$$ip_n = a_1b_1(1+\varepsilon_1)+a_2b_2(1+\varepsilon_2)+\dots+a_nb_n(1+\varepsilon_n)$$

$$1+\varepsilon_1 = (1+\xi_1)(1+n_2)\dots(1+n_n)$$

$$1+\varepsilon_r = (1+\xi_r)(1+n_r)\dots(1+n_n), \quad r=2,3,\dots,n$$

$$(1-u)^n \leq 1+\varepsilon_1 \leq (1+u)^n \Rightarrow |\varepsilon_1| \leq n u_1$$

$$\vdots$$

$$(1-u)^{n-r+2} \leq 1+\varepsilon_r \leq (1+u)^{n-r+2} \Rightarrow |\varepsilon_r| \leq (n-r+2)u_1 \quad r=2,\dots,n$$

$|\varepsilon_i| \leq (n-r+2)u_1 \quad , i = 1,2,\dots,n$

$$Rel \leq (n+1)\,u \left(\frac{|a|^t |b|^t}{|a^t b|}\right)$$ → Δείκτης κατάστασης δεδομένων

Το εσωτερικό γινόμενο ευσταθές κατά συνθήκη
Εάν $|a|^t|b|^t >> |a^t b|$ ενδέχεται να προκύψει αστάθεια.

Άσκηση

$M(10, 4, m, M)$

$|s_1+s_2+s_3| = 0.1$

$|s_1|+|s_2|+|s_3| = 0.23361 * 10^4$

Εκτέλεση πράξης

$s_1 = 0.8134 * 10^3$

$s_2 = 0.3547 * 10^3$

$s_3 = -0.1168 * 10^4$

$fl(s_1+s_2+s_3)$

Η θεωρητική τιμή 0.1

$fl(\underbrace{s_1+s_2}+s_3) = 0$

$fl(s_1+s_2) \longrightarrow$

$$\begin{array}{r} 0.8134 * 10^3 \\ 0.3547 * 10^3 \\ \hline 1.1681 * 10^3 \end{array}$$

↓ κανονικοποίηση

$0.1168|1 * 10^4$

rounding

$0.1168 * 10^4$

Τεράστιο relative error

$Rel = 1$ !! "Καταστροφική Διαγραφή"

4. Πραξεις πινακων

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$fl(\underset{\substack{\downarrow \\ k \in \mathbb{R}}}{k} A) = B$

$b_{ij} = fl(k a_{ij})$

$= k a_{ij} (1 + \varepsilon_{ij}) =$

$= \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ακριβης} \\ \text{τιμη}}}{k a_{ij}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{επιβαρυνση} \\ \text{με σφαλμα}}}{k a_{ij} \varepsilon_{ij}}$

$fl(kA) = kA + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{πινακας} \\ \text{σφαλματος}}}{E}$

με στοιχεια $k a_{ij} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}'$

$|\varepsilon_{ij}'| \leq k u |a_{ij}|$

$fl(kA) = kA + E, \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{φραγμα} \\ \text{καθε} \\ \text{εισοδον}}}{|E| \leq k u |A|}$

$|E| \to \|E\|$

$Rel \leq u$

Νορμες Πινακων

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ευκλειδια νορμα: $\|A\|_E = \left( \sum_{i,j}^{n} (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ → ΟΧΙ ΕΠΑΓΟΜΕΝΗ

→ $\|A\|_2 = (\max \text{eigen}\, A^T A)^{1/2}$

Επαγομενη νορμα πινακα απο διανυσμα (φυσικη) $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

→ $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

→ $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|I\| = 1$

$\|y\| = \|Ax\|$

$\leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Σχόλια: 1) Ευκλείδια όχι επαγόμενη

$\|I\|_E = \sqrt{n}$

2) $|||A|||_E = \|A\|_E$ , ισχύει ανισ. για επαγόμενη $1, \infty$

↓

νόρμα επαγόμενης τιμής

3) $|||A|||_2 \neq \|A\|_2$

4) $\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt[2]{n} \, \|A\|_2$

5) $\|A\|_2 \leq |||A|||_E = \|A\|_E \leq \sqrt{n} \, \|A\|_2$

Άσκηση: $fl(A+B) = (A+B) + E$

υπο συνθήκη σφάλμα

---

$fl(A \cdot B) \leftarrow$ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ

$y = A \cdot x$

$fl(y) = fl(A \cdot x)$ ← inner product

$y_i = fl(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) =$

$= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \varepsilon_i$ ,

$|\varepsilon_i| \leq u_1 \, [n|a_{i1}||x_1| + n|a_{i2}||x_2| \dots + 2|a_{in}||x_1|]$

Τελικά $y = Ax + \mathcal{E}$

↳ διάνυσμα σφάλματος

$|\mathcal{E}| \leq u_1 |D| |A| \cdot |x|$

↳ διαγώνιος πίνακας $\begin{bmatrix} n & & & 0 \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \end{bmatrix}$

$\| |E| \|_a \leq u_1 \| |D| \|_a \| |A| \|_a \| |x| \|_a$

Για $a = 1, \infty$, (E)

$\|E\|_a \leq n u_1 \|A\|_a \|x\|_a$

πχ για $a = \infty$

$\|E\|_\infty \leq n u_1 \|A\|_\infty \|x\|_\infty$

$$Rel \leq n u_1 \frac{\|A\|_\infty \|x\|_\infty}{\|Ax\|_\infty}$$ → υπο συνθηκη ευαισθ(-)

Αν $\| |E| \|_2 \leq u_1 \underbrace{\| |A| \|_2}_{\leq \sqrt{n}\|A\|_2} \underbrace{\| |D| \|_2}_{\sqrt{n}\|D\|_2} \|x\|_2$

$\leq n^2 u_1 \|A\|_2 \|x\|_2$

05/03/2020
4º Μάθημα

# Γινόμενο Πινάκων

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$fl(AB) = AB + E$

$\hookrightarrow$ πίνακας σφάλματος

$\|E\|_\infty \leq n u_1 \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

$\|E\|_2 \leq n^2 u_1 \|A\|_2 \|B\|_2$

$Rel \leq n u_1 \dfrac{\|A\|_\infty \|B\|_\infty}{\|AB\|_\infty}$ υπο συνθήκη ενσταθές

# Ορθογώνιοι Πίνακες

$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογωνιος εαν

$V^T V = V V^T = I$

## Ιδιοτητες

1. $V^{-1} = V^T$
2. Γινομενο ορθογωνιων = ορθογωνιος
3. $\|V\|_2 = 1$ (εξ' ορισμου της φασματικης νορμας)

## Λήμμα

Η φασματική νορμα ειναι ορθογωνια αναλλοιωτη

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. $\|PA\|_2 = \|A\|_2$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογωνιος
2. $\|AQ\|_2 = \|A\|_2$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογωνιος
3. $\|PAQ\|_2 = \|A\|_2$, $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογωνιοι

## Απόδειξη

1. $\|PA\|_2 = \sqrt{\rho[\underbrace{(PA)^T PA}_{A^T \underbrace{P^T P}_{=I} A}]} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$

2. $\|AQ\|_2 = \sqrt{\rho(Q^T A^T A Q)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$

$Q^T = Q^{-1}$

μετασχηματισμος ομοιοτητας διατηρει ιδιοτιμες

3. Να ιδω

- $fl(QA)$, $Q$ ορθογωνιος

Ειναι ευσταθες το γινομενο ενος ορθογωνιου μ' εναν $A$;

$fl(QA) = QA + E$

$\|E\|_2 \leq n^2 u_1 \|Q\|_2 \|A\|_2$

$$Rel \leq n^2 u_1 \frac{\|Q\|_2 \|A\|_2}{\|QA\|_2} = n^2 u_1$$

Το γινομενο ενος ορθογωνιου πινακα με εναν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ειναι ευσταθες.

## Παραγοντοποιηση Πινακων

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $A = LU$: $L$ κατω τριγωνικος (μοναδες στη διαγωνιο), $U$ ανω τριγωνικος
- $A = QR$: $R$ ανω τριγωνικος, $Q$ ορθογωνιος

## Μετασχηματισμος Gauss

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^{(0)}$$

Αρχικα δρω με τετοιο τροπο ωστε τα στοιχεια κατω απο το διαγωνιο στοιχειο στη στηλη να ειναι 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \neq 0 \text{ pivot} \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{x_2}{x_1} \qquad -m x_1 + x_2$$

## Ορισμός (Μετ/σμος Gauss)

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k \neq 0$, $m^t = [0, \ldots, 0, m_{k+1}, \ldots, m_t]$

Διάνυσμα Gauss

$$m_i = \frac{x_i}{x_k}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

Ο κάτω τριγωνικός πίνακας $M_k = I - m e_k^t$ λέγεται μετασχηματισμός Gauss. Τα στοιχεία λέγονται πολλαπλασιαστές

$$M_k \cdot x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{pivot}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & -m_{k+1} & \ddots & & \\ & & -m_{k+2} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & 1 \\ & & -m_n & & & \end{bmatrix}$$

## Παραγοντοποίηση LU (LU factorisation)

Βήμα 1: Προσδιόρισε μετασχηματισμό Gauss $M_1$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -m_{n1} & & & \end{bmatrix}, \quad m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \; i = 2, \dots, n$$

$a_{11}$ → pivot $\neq 0$

πολλαπλασιαστες στην πρωτη στηλη

$$A^{(1)} = M_1 A^{(0)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

→ επαναλαμβανω την ιδια διαδικασια $n-1 \times n-1$

**Βημα 2:** Προσδιορισε μετασχηματισμο Gauss $\hat{M}_2$

$$\hat{M}_2 = \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix}$$

Θετουμε $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$ εξ' αριστερων επεκταση

$$A^{(2)} = M_2 A^{(1)}$$

Μετα απο ποσα βηματα θα εχει επιτευχθει η ανω τριγωνοποιηση;

Σε $n-1$ βηματα.

Αρα $A^{(n-1)} = U$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} A^{(n-2)}$$

Στο τελικο μου βημα

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$U$$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} A^{(n-2)} = M_{n-1} M_{n-2} A^{(n-3)} = \cdots$$

$$= M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 \underset{A}{\underset{\parallel}{A^{(0)}}}$$

$$U = L_1 A \Rightarrow A = \underset{L}{\underset{\parallel}{L_1^{-1}}} U \Rightarrow \boxed{A = LU}$$

$U = L_1 A$ ↓ αντιστρ

$$\left.\begin{array}{l} M_k = I - m_k e_k^t \\ M_k^{-1} = I + m_k e_k^t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A = LU$ ↓ κατω τριγωνικος με μοναδες στη διαγωνιο και στοιχεια τους πολλαπλασιαστες

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}$$

## Θεώρημα LU

Εστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με ολες τις κυριες υποοριζουσες
Τοτε ο $A$ εχει μοναδικη LU παραγοντοποιηση

$A = LU$ → $U$: ανω τριγωνικος, $L$: κατω τριγωνικος με στοιχεια διαγωνιου 1

και $\det A = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

Σημειωση: Αν ο πινακας Α ειναι μη αντιστρεψιμος τοτε η LV μπορει να υπαρχει αλλα δεν θα ειναι μοναδικος

## Παραδειγμα

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Υπαρχουν απειρες LV παραγοντοποιησεις

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ δεν εχει LV

## Αποδειξη (θεωρηματος)

Υπαρξη: κατασκευαστικη

Εστω οτι εχουν γινει $(k-1)$ βηματα

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & * & \cdots & & * \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & & * \\ \vdots & & a_{kk}^{(k-1)} & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$a_{11}a_{22}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

οριζουσα του $k \times k$ πανω αριστερα

$\Downarrow$

$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

Μοναδικοτητα:

$$\left. \begin{aligned} A &= L_1 V_1 \\ A &= L_2 V_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_1 V_1 = L_2 V_2$$

$$\underbrace{L_2^{-1} L_1}_{\text{μοναδ κατω τριγωνικος}} = \underbrace{V_2 V_1^{-1}}_{\text{ανω τριγωνικος}} = I$$

$L_2 = L_1$

$V_2 = V_1$

# Προσδιορισμός Βασικών Χαρακτηριστικών του A

1) Προσδιορισμος Οριζουσας
2) Κριτήριο Αντιστρεψιμοτητας Πινακα
   (εαν η LU $\exists \Rightarrow$ αντιστρ)
   (μοναδικη)
3) Προσδιορισμός του U οδηγει στη λυση του

$$\left.\begin{matrix} Ax = b \\ \parallel \\ LU \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} Ly = b \\ Ux = y \end{matrix}$$

## Αλγοριθμος LU (Απαλοιφη Gauss)

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ m_{21} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

U                πολλαπλασιαστες

$A^{(1)} = M_1 A^{(0)}$ (επιπεδο πινακων)

$\downarrow$

επιπεδο συντεταγμενων
(σε καθε γραμμη αφαιρω πολ/σιο της πρωτης)

**ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ**

for $k = 1, 2, \ldots, n$

B1] Δημιουργια πολλαπλασιαστων $\rightarrow$ απλως διαιρεση καταχρηστικα 1 flop

(n-k flops) $\rightarrow a_{ik} [\equiv m_{ik}] = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}, \; i = k+1, \ldots, n$

B2] Ενημερωση εισοδων

$(n-k)^2$ flops $\rightarrow \underbrace{a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}}$ $i = k+1, .., n$
$j = k+1, .., n$

Πολυπλοκοτητα (complexity) 3 δεικτες $n^3$
Εχω ενα γινομενο και μια αφαιρεση

1 flop (floating point operation)

$k = \lambda + mx$ 1 flop

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{ (n-k) + (n-k)^2 \} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

γεωμ σειρα

↳ κρατάω το μεγαλυτερο.

Αρα $O\left(\frac{n^3}{3}\right) \rightarrow$ complexity Gauss LU

order

$A \longrightarrow U \rightsquigarrow$ ανω τριγωνικος
$n \times n$ $O(n^3/3)$ → Ανω φραγμα αποδεκτης πολυπλοκοτητας για γραμ. αλγεβρα

Ασκηση: 1) Εσωτερικο Γινομενο
$x, y \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow x^t y \rightsquigarrow O(n)$ inner product

2) Πιν. διανυσμα $y = Ax \rightsquigarrow$ matrix vector product (mvp) $O(n^2)$

3) Πολ/σμος Πινακων $C = AB \rightsquigarrow O(n^3)$.
matrix product.