Μάθημα 11ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης) 10/12/2019

$A\vec{u}_x + B\vec{u}_t = \vec{c}$ $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det B \neq 0$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$a_{ij} = a_{ij}(x,t,u_1,\dots,u_n)$

$b_{ij} = b_{ij}(x,t,u_1,\dots,u_n)$

$c_{ij} = c_{ij}(x,t,u_1,\dots,u_n)$

$F(\lambda) := \det(A-\lambda B)$, $\deg F = n$

Οι ρίζες του $F(\lambda)$ είναι:

- n πραγματικές — Υπερβολικό σύστημα
- n πραγματικές και η εξίσωση $(A-\lambda B)\vec{u} = 0$ έχει n γραμμικά ανεξ. λύσεις. — σχεδόν γραμμικών εξισώσεων.

$$\begin{cases} A\vec{u}_x + B\vec{u}_t = 0, & x \in \mathbb{R}, t>0 \\ \vec{u}(x,0) = \vec{f}(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$ με σταθερούς συντελεστές

Διαδικασία Επίλυσης

1. $F(\lambda)$
2. λ_j
3. $P_{n\times n} : \det P \neq 0$: $A^{tr}\vec{p}_j = \lambda_j B^{tr}\vec{p}_j$, $\vec{p}_j \neq 0$
4. $Q = PB$
5. $\vec{g}(x) = Q\vec{f}(x)$
6. $\begin{cases} z_t + \lambda z_x = 0 \\ z(x,0) = g(x) \end{cases}$: $z(x,t) = g(x-\lambda t)$ $\forall \lambda_j$
7. $Q\vec{u} = \vec{z}$

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_x + v_x \\ v_t &= 3u_x - v_x \end{aligned}\right\} x>0, t>0$$

αρχικές συνθήκες: $\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ v(x,0) &= v_0(x) \end{aligned}\right\} x>0$

συνοριακή συνθήκη: $u(0,t) + b\,v(0,t) = \varphi(t)$, $t>0$ ($b \neq 1/3$ σταθ)

Τι γίνεται αν $b = 1/3$;

$u^{(1)} = u$, $u^{(2)} = v$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_0^{(1)}(x) \\ u_0^{(2)}(x) \end{pmatrix}}_{f(x)}$$

1. $F(\lambda) = \det(A-\lambda B) = \lambda^2 - 4$
2. $F(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2 \implies$ Το σύστημα είναι υπερβολικό
3. $A^{tr} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

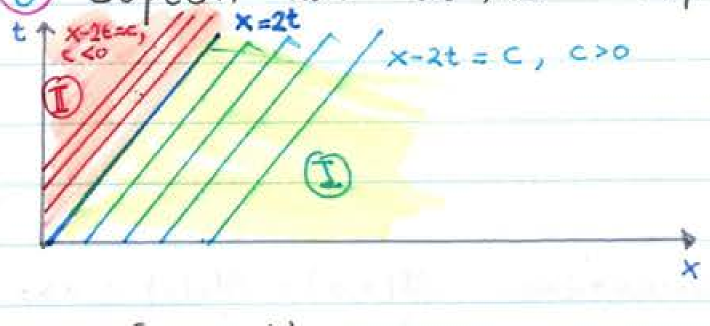
   $A^{tr}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}, \quad A^{tr}\begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} \to P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $Q = PB = P$
5. $\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0^{(1)}(x) \\ u_0^{(2)}(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} g_1(x) = 3u_0^{(1)}(x) + u_0^{(2)}(x) \\ g_2(x) = u_0^{(1)}(x) - u_0^{(2)}(x) \end{matrix}$
6. $Z_1(x,t) = g_1(x-\lambda t) = 3u_0^{(1)}(x+2t) + u_0^{(2)}(x+2t)$

   $Z_2(x,t) = g_2(x-\lambda t) = u_0^{(1)}(x-2t) - u_0^{(2)}(x-2t)$
7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\left[3u_0^{(1)}(x+2t) - u_0^{(1)}(x-2t) + u_0^{(2)}(x+2t) + u_0^{(2)}(x-2t)\right]$$

$$v(x,t) = \frac{1}{4}\left[3u_0^{(1)}(x+2t) + 3u_0^{(1)}(x-2t) + u_0^{(2)}(x+2t) - 3u_0^{(2)}(x-2t)\right]$$

8. Εύρεση των $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}$ (χρήση της συνοριακής συνθήκης)



Στην (I) $\left.\begin{matrix} u_0^{(1)}(x+\lambda t) = u_0(x+\lambda t) \\ u_0^{(2)}(x+\lambda t) = v_0(x+\lambda t) \end{matrix}\right\} \lambda = -2, 2$

Στην (II) $\begin{matrix} u_0^{(1)}(x+2t) = u_0(x+2t) \\ u_0^{(2)}(x+2t) = v_0(x+2t) \end{matrix}$ $(\lambda = 2)$, για $\lambda = -2$ $\left|\begin{matrix} u_0^{(1)}(x-2t) = \\ u_0^{(2)}(x-2t) = \end{matrix}\right.$ πρέπει να τα βρώ.

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 10/12/2019

Η συνοριακή συνθήκη δίνει $u^{(1)}(0,t)+6u^{(2)}(0,t)=\varphi(t)$, $t>0$

$$(1+6)\left(3u_0(2t)+v_0(2t)\right)+(36-1)\left(u_0^{(1)}(-2t)-u_0^{(2)}(-2t)\right)=4\varphi(t) \quad (*)$$

$$u_0^{(1)}(-2t)-u_0^{(2)}(-2t)=\frac{1}{36-1}\left[4\varphi(t)-(1+6)(3u_0(2t)+v_0(2t))\right]$$

$$u_0^{(1)}(t)-u_0^{(2)}(t)=\frac{1}{36-1}\left[4\varphi\left(\frac{-t}{2}\right)-(1+6)\left(3u_0(-t)+v_0(-t)\right)\right]$$

$$u_0^{(1)}(x-2t)-u_0^{(2)}(x-2t)=\frac{1}{36-1}\left[4\varphi\left(\frac{2t-x}{2}\right)+(1+6)\left(3u_0(2t-x)+v_0(2t-x)\right)\right]$$

Άρα η λύση είναι για $6\neq 1/3$

$$u(x,t)=\frac{3}{4}u_0(x+2t)+\frac{1}{4}v_0(x+2t)+\frac{1}{1-36}\left[\varphi\left(\frac{2t-x}{2}\right)-\frac{1+6}{4}\left(3u_0(2t-x)+v_0(2t-x)\right)\right]$$

$$v(x,t)=\frac{3}{4}u_0(x+2t)+v_0(x+2t)+\frac{1}{1-36}\left[\varphi\left(\frac{2t-x}{2}\right)-\frac{1+6}{4}\left(3u_0(2t-x)+v_0(2t-x)\right)\right]$$

Για $6=1/3$ απο την $(*)\Longrightarrow$

$3u_0(2t)+v_0(2t)=3\varphi(t)$, για $x=0\Longrightarrow$

η $u_0^{(1)}(x-2t)-u_0^{(2)}(x-2t)$ δεν ορίζεται

Άρα το Π.Σ.ΑΤ δεν είναι καλά τοθετημένο.

Άσκηση: $\begin{cases} u_t=3u_x+2v_x \\ v_t=-u_x-v \end{cases}$ $x>0, t>0$, αρχικές συνθήκες $\begin{cases} u(x,0)=0 \\ v(x,0)=x^2 \end{cases}$

συνοριακή συνθήκη $v(0,t)=t^2$

(καλώς τοποθετημένο)

Άσκηση: $\begin{cases} u_t=3u_x+2v_x \\ v_t=-u_x-v \end{cases}$ $x>0, t>0$, αρχικές συνθήκες $\begin{cases} u(x,0)=0 \\ v(x,0)=x^2 \end{cases}$

συνοριακή συνθήκη $u(0,t)=t$

(Μη καλώς τοποθετημένο)

Άσκηση: $\begin{cases} u_t=3u_x+2v_x \\ v_t=-u_x-v \end{cases}$ $x>0, t>0$, αρχικές συνθήκες $v(x,0)=x^2$

συνοριακές συνθήκες $u(0,t)=t$, $v(0,t)=t^2$

(Μη καλώς τοποθετημένο)

Άσκηση:

$$\begin{cases} u_t + u_x + \alpha v_x = 0 \\ v_t + \beta u_x + v_x = 0 \end{cases} \quad x \in (0,1),\ t > 0$$

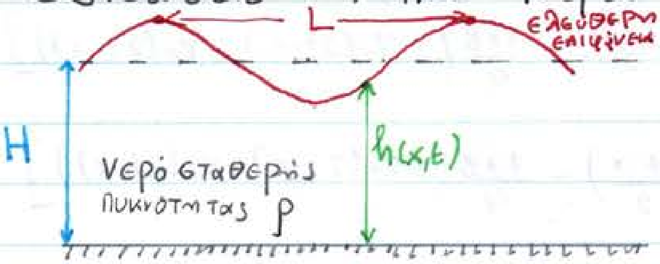
$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

$$u(0,t) = v(0,t) = 0 \quad , t \geq 0$$

(i) ; α, β έχουμε καλή τοποθέτηση $(0 < \alpha\beta < 1)$

(ii) για τις τιμές των α, β του (i) να διατυπωθούν συνθήκες επί των $u_0(x), v_0(x)$ ώστε η λύση του Π.Ι.Α.Τ να είναι C^1

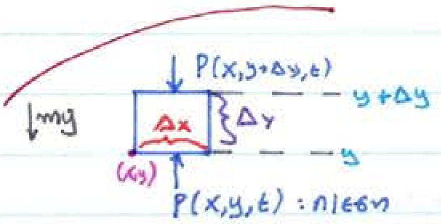
Εξισώσεις Ρηχού Νερού



μη διαταραγμένη επιφάνεια

$u(x,t)$: ταχύτητα , $y = h(x,t)$

$\boxed{H << L}$ (υπόθεση ρηχού νερού)



$$P(x,y,t) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{P_0}} + \rho g (h(x,t) - y)$$

Νόμος ισορροπίας της μάζας: $\dfrac{d}{dt}\left(\int_\alpha^\beta h(x,t)\,dx\right) = u(\alpha,t)h(\alpha,t) - u(\beta,t)h(\beta,t)$

$$\boxed{h_t + (hu)_x = 0}$$

Ισορροπία της ορμής στην x-διεύθυνση

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\alpha^\beta h(x,t)u(x,t)\,dx\right) = h(\alpha,t)u^2(\alpha,t) - h(\beta,t)u^2(\beta,t) + \frac{g}{2}\left(h^2(\alpha,t) - h^2(\beta,t)\right)$$

$$\boxed{(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right)_x = 0}$$

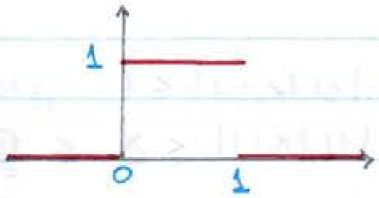
Εξισώσεις Ρηχού νερού: $\begin{cases} h_t + uh_x + hu_x = 0 \\ u_t + uu_x + gh_x = 0 \end{cases}$

Ερωτήματα: (i) Είναι υπερβολικό; (ii) αν είναι να λυθεί με μέθοδο χαρακτηριστικών.

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 10/12/2019

$u_t + u u_x = 0 \quad , x \in \mathbb{R}, t>0$

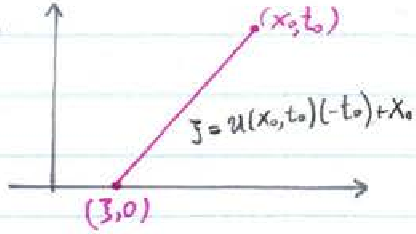
$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} 1 & , 0<x<1 \\ 0 & , \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$



χαρακτηριστική εξίσωση

$\frac{dt}{ds} = 1, \quad t(0) = t_0 \qquad , \quad t(s) = s + t_0$

$\frac{dx}{ds} = z, \quad x(0) = x_0 \qquad , \quad x(s) = u(x_0,t_0)(t-t_0) + x_0$



$\frac{dz}{ds} = 0, \quad z(0) = u(x_0,t_0) \qquad , \quad z(s) = u(x_0,t)$

$x(t) = u(x_0,t_0)(t-t_0) + x_0 \qquad \underset{u(x_0,t_0)}{\overset{}{z(0)}} = u(x(0),0) = u(\xi,0) = f(\xi)$

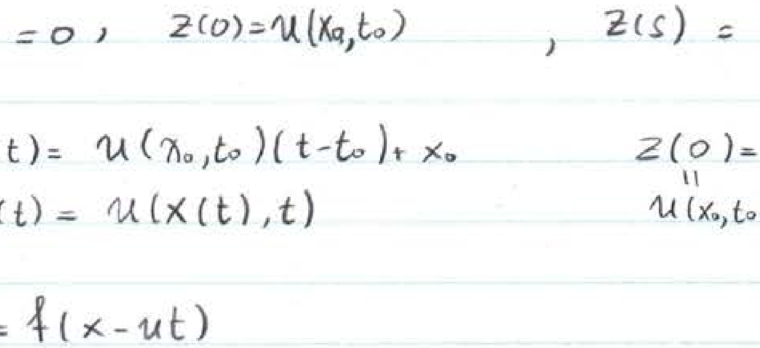
$z(t) = u(x(t),t)$

$u = f(x-ut)$

- κύμα αραίωσης μεταξύ $x=0$ και $x=t$
- shock λόγω του ότι οι ευθείες $x=t+x_0$, $0<x<1$ και $x=1$ τέμνονται

$(x = s(t))$

$$\left.\begin{array}{l} s'(t) = \dfrac{[\frac{u^2}{2}]}{[u]} = \dfrac{\frac{1}{2}-0}{1-0} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow s(t) = \dfrac{1}{2}t + c \\ s(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow s(t) = \frac{t}{2} + 1, \quad 0 \le t \le 2$$



$$s'(t) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2 - 0}{\frac{x}{t} - 0}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x/t & , 0<x<t \\ 1 & , t<x<1+t/2 \\ 0 & , x>1+t/2 \end{cases} \quad \text{για } (0<t\le 2)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x/t & , 0<x<\sqrt{2t} \\ 0 & , \sqrt{2t}<x \end{cases} \quad \text{για } t \ge 2$$

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = 0$$

Παρατηρήσεις: • $|u(x,t)| \le 1$ για $0 \le t \le 2$

• $|u(x,t)| \le \frac{x}{t} \le \frac{\sqrt{2t}}{t} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ για $t \ge 2$

Άρα πάντα $|u(x,t)| \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $t > 0$