Μάθημα 8ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 19/11/2019

Συμβολισμός: $[Q] = Q_- - Q_+$ (άλμα κατά μήκος της καμπύλης)

Παράδειγμα:

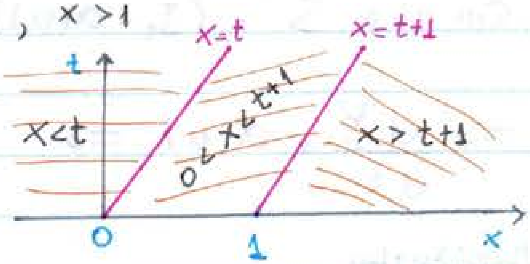
- $\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & f \in C^1 \end{cases}$

  $\exists!$ κλασσική λύση $u(x,t) = f(x-t)$

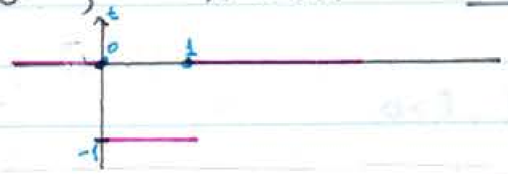
- $\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

ασθενής λύση

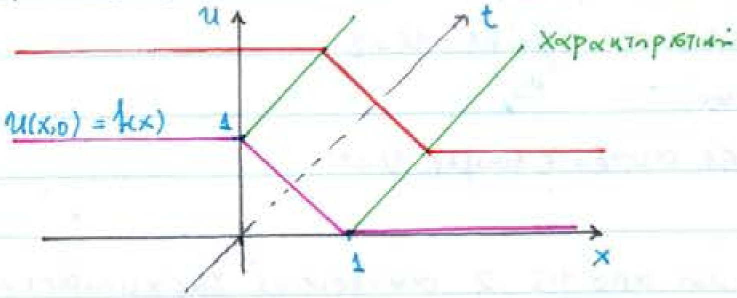
$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ 1-(x-t), & 0 < x < t+1 \\ 0, & x > t+1 \end{cases}$$



Η $f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$



οι ασυνέχειες της $f'(x)$ διαδίδονται επί χαρακτηριστικών.



Πρόταση:

$\Omega = \Omega^- \cup S \cup \Omega^+, \quad \Omega^- \cap \Omega^+ = \emptyset$

S: λεία καμπύλη που δίνεται από τη σχέση $\xi(x,t) = x - X(t) = 0$

Θεωρούμε

$$\left.\begin{aligned} & u_t + a(u)\, u_x = 0, \quad u \in C^1(\Omega^-) \\ & u_t + a(u)\, u_x = 0, \quad u \in C^1(\Omega^+) \\ & u \in C(S) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u \in C(\Omega)$$

Έστω ότι οι παράγωγοι της u έχουν ασυνέχεια άλματος κατά μήκος της S

Τότε η S είναι χαρακτηριστική καμπύλη

Απόδειξη:

Αλλαγή συντεταγμένων $\xi = \xi(x,t)$, $\eta = \eta(x,t)$ $\rightsquigarrow$ $u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t$, $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$

αντικαθιστώ και παίρνω

$u_t + \alpha(u) u_x = (\xi_t + \alpha(u)\xi_x) u_\xi + (\eta_t + \alpha(u)\eta_x) u_\eta = 0$

ισχύει στα χωρία $\{\xi>0\}$ και $\{\xi<0\}$

Από την υπόθεση $u(0^+,\eta) = u(0^-,\eta) \Rightarrow u_\eta(0^+,\eta) = u_\eta(0^-,\eta)$

Επί της S : $(\xi_t + \alpha(u)\xi_x)\underbrace{[u_\xi]}_{\neq \text{ από υπόθεση}} = 0 \Rightarrow \xi_t + \alpha(u)\xi(x) = 0 \Rightarrow$

$\xi(x,t) = x - X(t) = 0 \Rightarrow x = X(t)$

$\Rightarrow \dfrac{dX}{dt} = \alpha(u) \Rightarrow$ $x = X(t)$ χαρακτηριστική

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \end{cases}$$

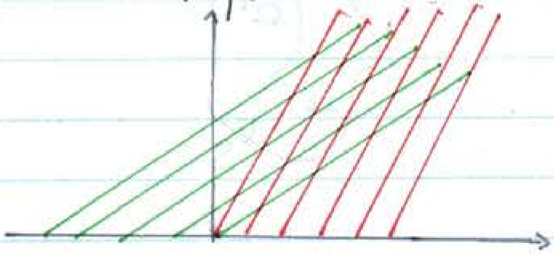
Χαρακτηριστικές από τον αρνητικό x-άξονα:

$\dfrac{dx}{dt} = \alpha(u(x,0)) = \alpha(2) = 2$ και πάνω σε αυτές έχουμε $u=2$.

Χαρακτηριστικές από τον θετικό x-άξονα

$\dfrac{dx}{dt} = \alpha(u(x,0)) = \alpha(1) = 1$ και πάνω σε αυτές έχουμε $u=1$

Άρα το χωρίο $t<x<2t$ καλύπτεται και από τις 2 οικογένειες χαρακτηριστικών



Παράδειγμα:

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \quad (\alpha(u)=u) \\ u(x,0) = \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

Η χαρακτηριστική από το $(0,0)$ δίνεται από τη σχέση $\dfrac{dx}{dt} = \alpha(u(0,0)) = 1$

οπότε είναι η $x=t$ και ισχύει $u(0,0)=1$

Εξ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 19/11/2019

Η χαρακτηριστική από το $(1,0)$ δίνεται από τη σχέση $\frac{dx}{dt} = \alpha(u(1,0)) = \frac{1}{2}$

οπότε είναι η $x = \frac{1}{2}t + 1$, και ισχύει $u(1,0) = \frac{1}{2}$

Αυτές οι ευθείες τέμνονται στο $(2,2)$ οπότε

$u(2,2) = 1$ & $u(2,2) = \frac{1}{2}$

Επί της χαρακτηριστικής $x - ut = \xi$

$$u_x = \frac{-\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}}{1 - \frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}t}$$

Ο χρόνος θραύσης είναι το "πρώτο" $t=0$, $t_{\theta\rho} = \min\left\{t : t(\xi) = \frac{(\xi^2+1)^2}{2\xi}\right\} = \dots = \frac{8}{9}\sqrt{3}$

$x_{\theta\rho} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$

μέχρι εκεί έχουμε:

κλασσική λύση $u = \frac{1}{(x-ut)^2+1} \Rightarrow x - ut = \pm\sqrt{\frac{1}{u} - 1}$

Παράδειγμα:
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

$t_{\theta\rho} = -\frac{1}{(e^{-\xi^2})'|_{\xi_{\theta\rho}}} \simeq 1,16$ $\quad \xi_{\theta\rho}: (e^{-\xi^2})'' = 0 \Rightarrow \xi_{\theta\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u\left(\frac{e}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right) \longrightarrow = 1 \leftrightarrow$ από χαρακτηριστική στο $(0,0)$

$\longrightarrow = 1/e \leftrightarrow$ από χαρακτηριστική στο $(1,0)$

Έστω $(*)$ $u_t + \alpha(u)u_x = u_t + (F(u))_x = $ $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ και

$S: x = S(t)$ καμπύλη του xt-επιπέδου επί της οποίας

κάποια λύση είναι ασυνεχής. Έστω η $(*)$ έχει ασθενή λύση

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & x < s(t) \\ u_2(x,t), & x > s(t) \end{cases}$$ με $u_1(S(t),t) \neq u_2(S(t),t)$

Έστω ότι σε μια περιοχή της S οι $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες

Ορισμός: Λέμε ότι η $S: x = s(t)$ είναι shock αν επί της S ισχύουν

(S1) $-s'(t)[u] + [F(u)] = 0$, συνθήκη άλματος (συνθήκη Rankine-Hugoniot HR)

(S2) $F'(u_1) > s'(t) > F'(u_2)$ συνθήκη εντροπίας. Εξασφαλίζει μοναδικότητα

$\overset{\shortparallel}{\alpha(u_1)} > s'(t) > \overset{\shortparallel}{\alpha(u_2)}$ (συνθήκη Lax, συνθήκη Oleinik)