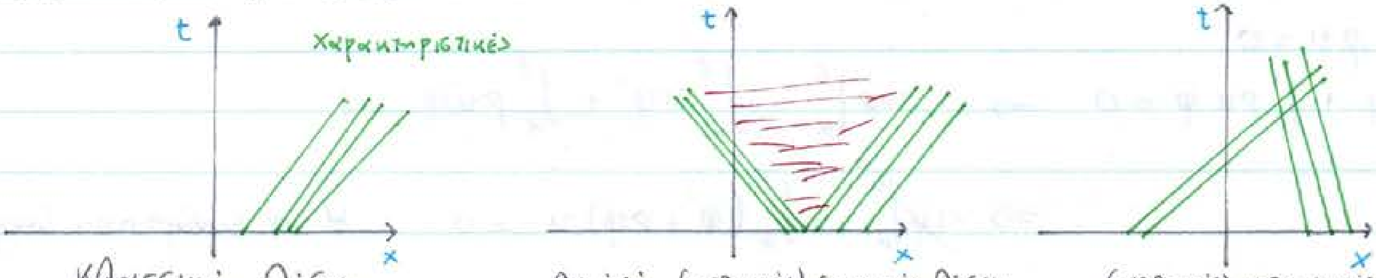
Μάθημα 6ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 5/11/2019

$$\begin{cases} u_t + \alpha(u)\, u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Κλασσική λύση (από κάθε σημείο περνάει 1 χαρακ.) | θα έχω (ασθενείς) συνεχείς λύσεις (Υπάρχουν σημεία χωρίς χαρακ.) | (ασθενείς) ασυνεχείς λύσεις (από σημεία περνάνε πολλά)

Συναρτήσεις Δοκιμής

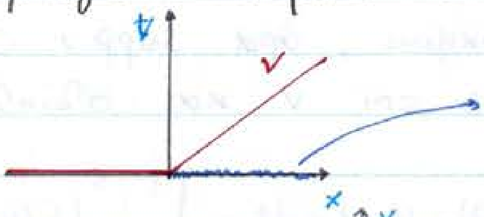
$v = v(x,t) \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

$\operatorname{supp} v := \overline{\{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty) : v(x,t)\neq 0\}}$

$v \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$: $\operatorname{supp} v$ συμπαγές : συνάρτηση δοκιμής $C^1_c(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

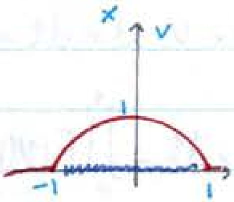
Παραδείγματα

1) $v(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$



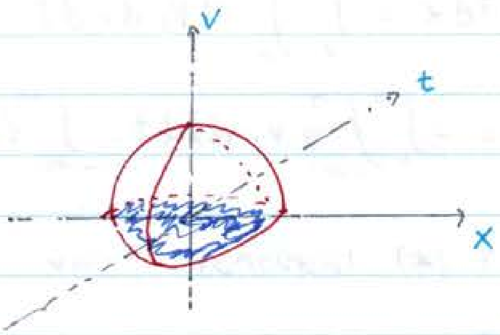
$\operatorname{supp} v = [0,\infty)$ δεν είναι συμπαγής

2) $v(x) = \begin{cases} 1-x^2, & -1<x<1 \\ 0, & x\le -1 \ \&\ x \ge 1 \end{cases}$



$\operatorname{supp} v = [-1,1]$ συμπαγές η v είναι συνάρτηση δοκιμής

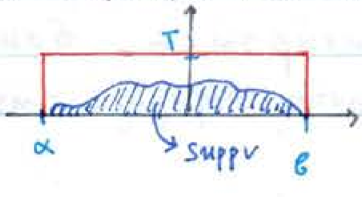
3) $v(x,t) = \begin{cases} 1-(x^2+t^2), & x^2+t^2<1 \\ 0, & x^2+t^2 \ge 1 \end{cases}$



$\operatorname{supp} v = \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x^2+t^2\le 1\}$ συμπαγής φορέας.

Πρόταση: Έστω $\operatorname{supp} v$ συμπαγής στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$. Τότε υπάρχει ορθογώνιο: $\operatorname{supp} v \subset (\alpha,\beta)\times[0,T)$

$\alpha = \inf\{x\in\mathbb{R} : (x,t)\in \operatorname{supp} v\} - 1$



$b = \sup\{ x \in \mathbb{R} : (x,t) \in \operatorname{supp} v \} + 1$

$T = \sup\{ t \geq 0 : (x,t) \in \operatorname{supp} v \} + 1$

$u' + pu = 0$

$\int_a^b u'\varphi + \int_a^b pu\varphi = 0 \Rightarrow u\varphi\Big|_a^b - \int_a^b u\varphi' + \int_a^b pu\varphi = 0$

$\Rightarrow \cancel{u\varphi\Big|_a^b}^{\,0} - \int_a^b (\varphi' + p\varphi)u = 0 \quad \forall\ \varphi$ συνάρτηση δοκιμής

Θεωρώ στο αρχικό πρόβλημα ότι η $\alpha(u)$ συνεχής

Θέτω $F'(y) = \alpha(y)$ τότε έχω το εξής

$$(*)\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Έστω v συνάρτηση δοκιμής, άρα $\operatorname{supp} v \subset [a,b] \times [0,T)$

• Πολλαπλασιάζω την δ.ε επί v και ολοκληρώνω στο $\mathbb{R} \times [0,\infty)$

τότε

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + (F(u))_x)\, v \, dx\, dt = \underbrace{\int_0^T \int_a^b (F(u))_x \cdot v \, dx\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T \int_a^b u_t\, v \, dx\, dt}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^T \int_a^b (F(u)v)_x - F(u)v_x \, dx\, dt = \underbrace{\int_0^T \left[F(u(b,t))\cancel{v(b,t)} - F(u(a,t))\cancel{v(a,t)}\right] dt}_{=0} - \int_0^T \int_a^b F(u)\, v_x \, dx\, dt$$

$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)\, v_x \, dx\, dt$$

$$I_2 = \int_0^T \int_a^b [(uv)_t - uv_t]\, dx\, dt = \int_a^b \int_0^T (uv)_t \, dt\, dx - \int_0^T \int_a^b u v_t \, dx\, dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^T (uv)_t \, dt \right) dx - \int_0^T u v_t \, dx\, dt = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\, v_t \, dx\, dt - \int_{-\infty}^\infty f(x)\, v(x,0)\, dx$$

Πρόταση: Η κλασσική λύση του π.α.τ $(*)$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική σχέση:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + F(u) v_x)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty f(x)\, v(x,0)\, dx = 0 \quad (**)$$

για κάθε συνάρτηση δοκιμής v.

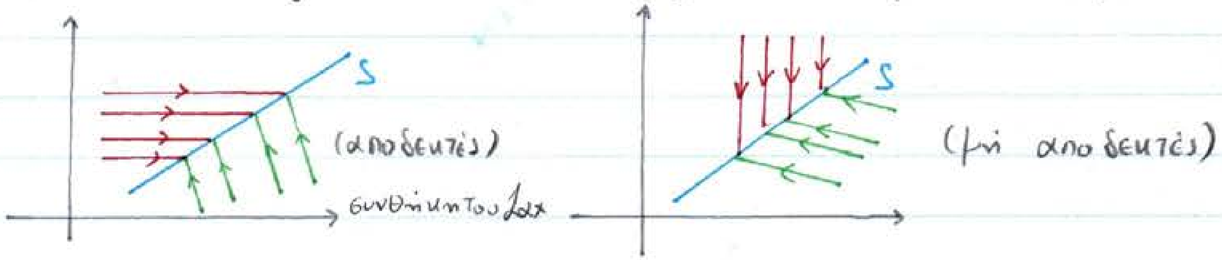
Παρατήρηση: Δεν εμφανίζονται παράγωγοι της u και της $F(u)$

Ε2 Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 5/11/2019

Ορισμός: Μια συνάρτηση u ορισμένη στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ λέγεται Ασθενής λύση του Π.Α.Τ $(*)$, αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε ορθογώνιο της μορφής $[\alpha,b]\times[0,T]$ και ικανοποιεί την $(**)$ για κάθε συνάρτηση δοκιμής.

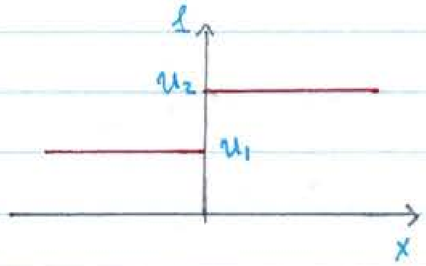
Σχόλια:
(1) Επιτρέπονται και ασυνεχείς λύσεις
(2) Το σύνολο των "υποψήφιων" λύσεων περιορίζεται
(3) Αν επιτρέψω συναρτήσεις δοκιμής που για το φορέα τους ισχύει $\operatorname{supp} V$ συμπαγής στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, τότε $V(x,0)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ η $(**)$ γίνεται $\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}(uv_t+F(u)v_x)\,dx\,dt=0$.

Θεωρούμε f φραγμένη και κατά τμήματα ομαλή.
Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:
Να βρεθεί φραγμένη και κατά τμήματα ομαλή (μετρήσιμη) $u(x,t)$ ώστε να ισχύει η $(**)$ για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση V.
Επιπλέον, μας ενδιαφέρουν ασθενείς λύσεις των οποίων οι μόνες ασυνέχειες οδηγούν στην αποφυγή πλειότιμων συναρτήσεων.



Καμπύλη ασυνεχειών $x=S(t)$ είναι τέτοια ώστε οι χαρακτηριστικές "από διαφορετικές πλευρές" τέμνονται επί της $S(t)$ καθώς αυξάνεται το t

Πρόβλημα Riemann



$u_1<u_2$

$$(*):\ f(x)=\begin{cases} u_1, & x<0, \quad u_1 \text{ σταθερή} \\ u_2, & x>0 \quad u_2 \text{ σταθερή}\end{cases}$$

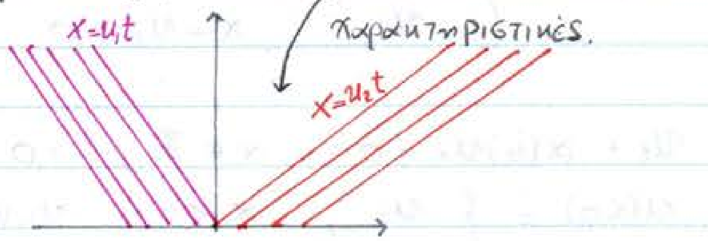
Μάθημα 7ο ΕΞ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 12/11/2019

$u_t + u u_x = 0 \quad , x \in \mathbb{R} \, , t > 0$ (B)

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1 , & x < 0 \\ u_2 , & x > 0 \end{cases} \qquad u_1, u_2 : \text{σταθερές}, \quad u_1 < u_2$$

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών δίνει

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 , & x - u_1 t < 0 \\ u_2 , & x - u_2 t > 0 \end{cases} \quad t \geq 0$$



Αυτό - όμοιες λύσεις.

Υπενθύμιση: $(P(kt, ky) = k^m P(t,y) \; k \in \mathbb{R})$

$M(t,y) + N(t,y) y' = 0 \quad M, N$ ομογενείς συναρτήσεις ίδιου βαθμού m

$\zeta = t/y \quad \Downarrow$ Σ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{d\zeta}{\zeta + Q(\zeta)} = -\frac{dt}{t} \qquad \text{όπου} \quad Q(\zeta) := \frac{M(1,\zeta)}{N(1,\zeta)}$$

Η (B) παραμένει αναλλοίωτη από τον μετασχηματισμό $\begin{matrix} x \to kx \\ t \to kt \end{matrix}$ $(k>0)$ ενώ η αρχική συνθήκη παραμένει αναλλοίωτη από τον μετασχηματισμό $x \to kx \quad (k>0)$.

Αν ισχύει η μοναδικότητα λύσεων για το Π.Α.Τ τότε $u(kx, kt) = u(x,t) \;\; \forall k > 0$. Δηλαδή η u παραμένει σταθερή πάνω σε κάθε ευθεία $x = \zeta t$, $t > 0$ που διέρχεται από το $(0,0)$, άρα η λύση εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή $\zeta = x/t$

$$u(x,t) = u(\zeta t, 1t) = u(\zeta, 1)$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,t) = u(x/t) \; , \; t > 0 \qquad \text{αυτοόμοια}$$

Η (B) παίρνει τη μορφή

$$-\frac{x}{t^2} u'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} u\left(\frac{x}{t}\right) u'\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} \underbrace{u'\left(\frac{x}{t}\right)}_{\neq 0 \Rightarrow u \text{ σταθ}} \overbrace{\left[u\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t} \right]}^{=0} = 0$$

$$\Rightarrow u\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & x - u_1 t \leq 0 \\ x/t, & u_1 t < x < u_2 t, \ t>0 \quad \text{συνεχής} \\ u_2, & x - u_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$u_t + \alpha(u) u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t>0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x<0 \\ u_2, & x>0 \end{cases} \quad u_1, u_2 = \text{σταθ.} \quad u_1 < u_2$$

$$\alpha(u) = F'(u)$$

$$u_t + (F(u))_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t>0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x<0 \\ u_2, & x>0 \end{cases} \quad u_1, u_2 \ \text{σταθ} \quad u_1 < u_2$$

Υποθέτουμε $F \in C^2$ & κυρτή $(F''>0) \Rightarrow F'$ γν. μονότονη $\Rightarrow \exists (F')^{-1}$

$$0 = -\frac{x}{t^2} u' + \frac{1}{t} F'(u) u' = \frac{1}{t} u'\left(\frac{x}{t}\right) \overbrace{\left[F'\left(u\left(\frac{x}{t}\right)\right) - \frac{x}{t} \right]}^{\overset{0}{\prime\prime}}$$

$$\Rightarrow u(\xi) = g(\xi) \quad \xi = \frac{x}{t} \qquad u(x,t) = g\left(\frac{x}{t}\right), \ g \in C^1$$

$$F'(g) = \xi \Rightarrow g = (F')^{-1}, \ g' \neq 0$$

Παρατήρηση: Πάνω στις ευθείες $x = F'(u_j) t$, $j=1,2$ ισχύει

$$u(F'(u_j)t, t) = g(F'(u_j)) = u_j \quad j=1,2.$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & x - F'(u_1) t \leq 0 \\ g(x/t), & F'(u_1) t < x < F'(u_2) t \quad t>0 \\ u_2, & x - F'(u_2) t \geq 0 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

1. Η κυρτότητα της F απαιτείται μόνο στο $[u_1, u_2]$
2. Αν $u_1 > u_2$ δεν υπάρχει συνεχής λύση (Θα ορίσουμε ασθενείς ασυνεχείς λύσεις, shock)
3. Αν η F είναι γνήσια κοίλη $(F''<0)$ τότε "εναλλάσσονται" τα συμπεράσματα του (2), δηλαδή αν $u_1 > u_2$ έχουμε ασθενή συνεχή λύση, αν $u_2 > u_1$ έχουμε ασθενή ασυνεχή λύση
4. Αν η F δεν είναι ούτε γνήσια κυρτή, ούτε γνήσια κοίλη, τότε εξακολουθεί να αντιμετωπίζεται το π.α.τ με χρήση της κυρτής θήκης (κοίλης)

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 12/11/2019

Παράδειγμα: $u_t + u^2 u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

$\alpha(u) = u^2$

$F'(u) = \alpha(u) \implies F(u) = u^3/3 \implies u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \le t \\ \sqrt{x/t}, & t < x < 4t \\ 2, & x \geq 4t \end{cases}$

$F''(u) = 2u$ και $g(y) = \sqrt{y}$

Παράδειγμα: $u_t + u^2 u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ 2, & x > 3 \end{cases}$$

η μόνη διαφορά από το προηγούμενο είναι που αλλάζει η λύση
έτσι θα έχουμε

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x-3 \le t \\ \sqrt{\frac{x-3}{t}}, & t \le x-3 < 4t \\ 2, & x-3 > 4t \end{cases} \quad (\text{μεταφορά το 0 στο 3})$$

Παράδειγμα: $u_t + u u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x+2, & x < 0 \end{cases}$$

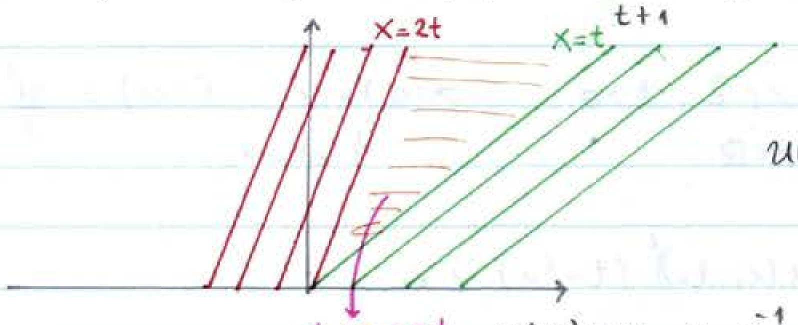
μέθοδο χαρακτηριστικών

$f(x) = x+1, \quad x < 0$

$u = f(x - \alpha(u)t)$ δηλαδή $u = (x - ut) + 1 \implies u(x,t) = \frac{x+1}{t+1}, \quad x < t$

$f(x) = x+2, \quad x > 0$

$u = (x - ut) + 2 \implies u(x,t) = \frac{x+2}{t+1}, \quad x > 2t$



$x = t \implies u(x,t) = 1$

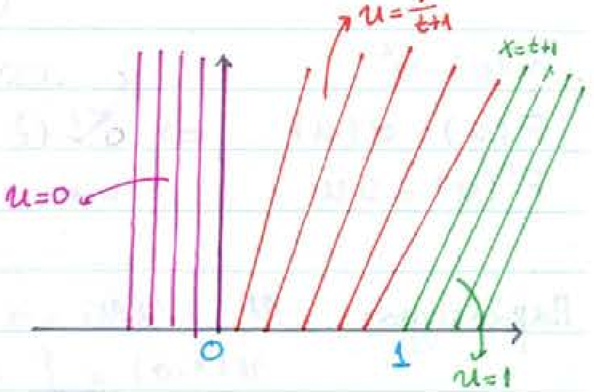
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{x+1}{t+1}, & x \le t \\ \frac{x}{t}, & t < x < 2t \quad t > 0 \\ \frac{x+2}{t+1}, & x \geq 2t \end{cases}$$

$x = 2t \implies u(x,t) = 2$

$t < x < 2t \quad \alpha(u) = u,\ g = \alpha^{-1} \implies g(u) = u$

Παράδειγμα: $u_t + u u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$



Μέθοδος χαρακτηριστικών για τα

$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = 0, \ x \le 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = 1, \ x>1 \end{cases}$

$u(x,t) \equiv 0, \ x<0$ $\qquad$ $u(x,t) = 1, \ x > t+1$

αυτο-όμοια λύση για $0<x<1$

$u(x,t) = \dfrac{x}{t+1}, \quad 0 \le x < t+1$

Παράδειγμα: $u_t + u u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x/\varepsilon, & 0<x<\varepsilon \\ 1, & x>\varepsilon \end{cases}$$

όπως πριν

$$u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/(t+\varepsilon), & 0<x<t+\varepsilon \\ 1, & x \geq t+\varepsilon \end{cases}$$

αν μας ζητήσουν το $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/t, & 0<x<t \\ 1, & x \geq t \end{cases}$

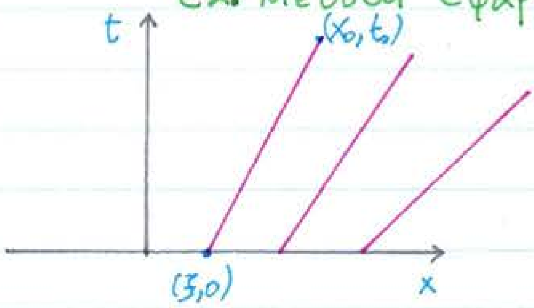
είναι η λύση του π.α.τ

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \end{cases}$$

Παράδειγμα: $\begin{cases} u_t + u^2 u_x & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad a(u) = u^2 \quad F(u) = \dfrac{u^3}{3}$, $\quad f(x) = x$

χαρακτηριστικές $\quad x = (u(x_0,t_0))^2 (t-t_0) + x_0$

Ε2: Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ 12/11/2019



$$\xi = -(u(x_0,t_0))^2 t_0 + x_0$$

Κλασσική λύση

$$u(x_0,t_0) = f(x_0 - \alpha(u(x_0,t_0))t) \Rightarrow t u^2 + u = 0 \Rightarrow u_{\pm}(x,t) = \frac{\pm\sqrt{1+4xt}-1}{2t}, \quad {}^{1+4xt>0}_{t>0}$$

Η λύση u_- είναι αρνητική $\forall x$ άρα απορρίπτεται αφού η $u(x,0)=x$ είναι θετική για $x>0$.

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{1+4xt}-1}{2t}, \quad 1+4xt>0, \ t>0$$ συνεχής (ασθενής) λύση

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \dots = x = u(x,0) \quad x\in\mathbb{R}$$ παντού συνεχής

$$T = \frac{1}{\inf\limits_{y\in\mathbb{R}} [f'(y)F''(f(y))]}, \text{ αν } \inf<0 \qquad T=+\infty \text{ αν } \inf \geq 0$$

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} [f'(y)F''(f(y))] = 2\inf_{y\in\mathbb{R}}[y] = \begin{cases} 0, & y\geq 0 \\ +\infty, & y<0 \end{cases} \quad \text{άρα } \geq 0$$

Ορίζεται για κάθε $t\in[0,+\infty)$