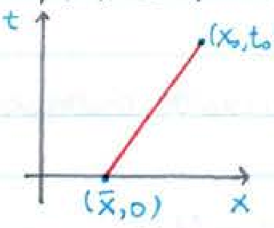
Μάθημα 5ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 29/10/2019

Π.Α.Τ για τη γενικευμένη Εξίσωση Burgers

$$\begin{cases} u_t + \alpha(u) u_x = 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0 & \alpha \in C^1(\mathbb{R}) \ , \ \alpha' > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \ x \in \mathbb{R} & f \in C^1(\mathbb{R}) \ , \ f' > 0 \end{cases}$$



$x(t) = \alpha(u(x_0,t_0))(t-t_0) + x_0$: ευθείες (όχι αναγκαστικά)

$\bar{x} = -\alpha(u(x_0,t_0))t_0 + x_0 \quad (= x(0))$

$$z(t) = u(x(t),t)$$

$$\underset{u(x_0,t_0)}{\overset{}{\underset{\parallel}{z(0)}}} = u(x(0),0) = u(\bar{x},0) = f(\bar{x})$$

$u(x,t) = f(x_0 - \alpha(u(x,t)t))$: Η λύση του Π.Α.Τ σε πεπλεγμένη μορφή

Παραγωγίζω τη u ως προς x $\Longrightarrow$

$$u_x = f'(x-\alpha(u)t)(1-\alpha'(u)u_x t) \Longrightarrow u_x = \frac{f'(x-\alpha(u)t)}{1+f'(x-\alpha(u)t)\alpha'(u)t}$$

αντίστοιχα $\quad u_t = \dfrac{-\alpha(u) f'(x-\alpha(u)t)}{1+f'(x-\alpha(u)t)\alpha'(u)t}$

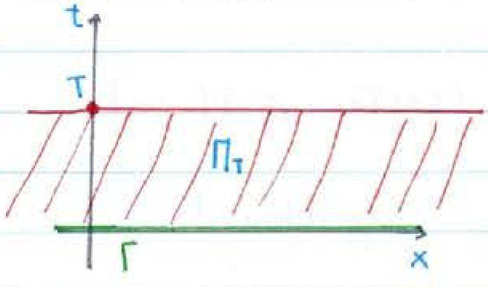
παρατηρώ ότι $\quad 1 + f'(x-\alpha(u))t)\alpha'(u)t > 0$

Θεώρημα: Με τις δοθείσες υποθέσεις η λύση του Π.Α.Τ δίνεται από τη σχέση:

$$u(x,t) = f(x_0 - \alpha(u(x,t)t))$$

Το πρόβλημα μπορεί να το δούμε και στη μορφή

$\alpha(u) = F'(u) \qquad u_t + (F(u))_x = 0 \qquad F \in C^2, \ F'' > 0$



$\Pi_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R} \ , \ t \in (0,T)\}$

$\Gamma = \{(x,t) : x = s, \ t = 0 \ , \ s = (-\infty,\infty)\}$

$\tilde{\Gamma} = \{(x,t,u) : x = s, t = 0, z = u(x(s),t(s)) = f(s)\}$

$$J := \begin{vmatrix} F' & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$ το ΠΑΤ στην Π_T έχει μοναδική κλασσική λύση

Η λύση δίνεται από τη $u = f(x - F'(u)t)$

Ποιο είναι το μέγιστο T ώστε η λύση να είναι κλασσική;

Δηλαδή το μεγαλύτερο $T>0$ ώστε η εξίσωση

$$\Phi(x,t,u) := u - f(x - F'(u)t) = 0$$

να έχει μοναδική λύση (ως προς u) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε σταθεροποιημένο $t \in [0,T)$

$$\Phi(x,0,u) = u(x,0) - f(x) \quad \text{αύξουσα ως προς } u$$

Τότε από θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης $\Longrightarrow \Phi_u > 0 \quad \forall (x,t,u): \Phi(x,t,u) = 0, t \in [0,T)$

$$\Phi_u = 1 + f'(x - F'(u)t) \cdot F''(u)t$$

Αν $|F''(u)| \leq L$, $|f'(x)| \leq K$ το $\Phi_u > 0$ όταν $1 - KLt > 0$

$T: \frac{1}{KL} > 0$

$y := x - F'(u)t$

$u = f(y)$

$1 + f'(y) \cdot F''(f(y))t > 0$

$$T = \begin{cases} \dfrac{1}{-\inf\limits_{y \in \mathbb{R}} \{ f'(y) F''(f(y)) \}} & , \text{αν το } \inf < 0 \\ +\infty & , \text{αν το } \inf \geq 0 \end{cases}$$

Για την απλή Burgers $\alpha(u) = u$: $u_t + u u_x = 0$

$$T = \begin{cases} -\dfrac{1}{\inf\limits_{y \in \mathbb{R}} \{ f'(y) \}} & , \inf < 0 \\ +\infty & , \inf \geq 0 \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Cole - Hopf

$u_t + u u_x = \varepsilon u_{xx}$ Εξ. Burgers με ιξώδες (σχεδόν γραμμική)

$\downarrow$

$z_t - \varepsilon z_{xx} = 0$ Εξ. θερμότητας (διάχυσης) (γραμμική)

$\hookrightarrow u_t = \left(\varepsilon u_x - \frac{1}{2} u^2 \right)_x$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 29/10/2019

Θεώρημα: Έστω P και Q, C^1 συναρτήσεις. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη "συνάρτησης δυναμικού" $\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε $\Theta_x = P$ και $\Theta_t = Q$ είναι $P_t = Q_x$

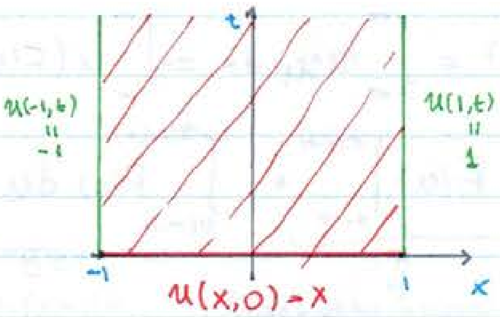
Άρα από το θεώρημα $\exists$ δυναμικό U δηλαδή
$U_x = u$ και $U_t = \varepsilon u_x - \frac{1}{2} u^2$

$$U_t + \frac{1}{2}(U_x)^2 = \varepsilon U_{xx} \qquad U(x,t) = -2\varepsilon \ln z(x,t)$$
$$z(x,t) = \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_\alpha^x u(\xi,t)\,d\xi\right\}$$

προκύπτει λοιπόν ότι
$$U_t = -2\varepsilon \frac{z_t}{z} \qquad U_x = -2\varepsilon \frac{z_x}{z} \qquad U_{xx} = -2\varepsilon\left(\frac{z_{xx}}{z} + \frac{(z_x)^2}{z}\right)$$

και έτσι οδηγούμαστε στην $z_t - \varepsilon z_{xx} = 0$

Παράδειγμα:
$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, & x \in (-1,1),\ t>0 \\ u(x,0) = x, & x \in [-1,1] \\ u(-1,t) = -1 \\ u(1,t) = 1 \end{cases} \quad t>0$$



Η λύση του Π.Α.Τ. δίνεται από
$$u(x,t) = \frac{x}{1+t}, \quad t \in [0,\infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

Θέτω
$$\left.\begin{aligned} x=-1 &: \ u(-1,t) = -\frac{1}{1+t} = -1 \\ x=1 &: \ u(1,t) = \frac{1}{1+t} = 1 \end{aligned}\right\} \text{ άτοπο}$$

Άρα το Π.Α.Σ.Τ. δεν έχει λύση

Ορισμός: Έστω $v = v(x,t) \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$. Φορέας (support) της v είναι η κλειστότητα του συνόλου στο οποίο αυτή δεν μηδενίζεται

$$\operatorname{supp} v = \overline{\{(x,t) : x\in\mathbb{R},\, t\in[0,\infty) : u(x,t)\neq 0\}}$$

Ορισμός: $v\in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ λέγεται συνάρτηση δοκιμής αν το $\operatorname{supp} v$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}\times[0,\infty)$

Συμβολίζουμε: $C_c^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ ή $C_0^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

Παράδειγμα: ΠΑΤ
$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \quad (F\in C^2,\ F''>0) \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbb{R} \quad (f\in C^1,\ f'>0) \end{cases}$$
, επιπλέον υποθέτουμε ότι $f\in C_c^1(\mathbb{R})$

- Το ΠΑΤ έχει κλασσική λύση σε κάποιο διάστημα $[0,T]$
- Για κάθε σταθεροποιημένο t, έχει συμπαγή φορέα
- Ορίζω την Κινητική Ενέργεια: $E(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx < +\infty$

Τότε $E(t) =$ σταθερή.

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u u_t\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u(F(u))_x\,dx = -uF(u)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)u_x\,dx$$

$$= \underbrace{-uF(u)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{\substack{=0 \\ \text{(αφού έχει συμπαγή φορέα)}}} + \underbrace{\int_{u(-\infty,t)}^{u(+\infty,t)} F(u)\,du}_{\substack{=0 \\ u(-\infty,t)=u(+\infty,t)}} = 0 \rightsquigarrow E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,0)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx$$