Μάθημα 4ο   Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης)   22/10/2013

$\alpha(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \quad U \subset \mathbb{R}^2 \ (*)$

$z(s) := u(x(s),t(s))$

$\frac{dx}{ds} = \alpha(x(s),t(s),z(s)) \ , \ \frac{dt}{ds} = b(x(s),t(s),z(s)) \ , \ \frac{dz}{ds} = c(x(s),t(s),z(s))$

- $(x(s),t(s))$: $\frac{dx}{ds} = \alpha$, $\frac{dt}{ds} = b$: χαρακτηριστική καμπύλη στο xt-επίπεδο

- $(x(s),t(s),z(s))$: $\frac{dx}{ds} = \alpha$, $\frac{dt}{ds} = b$, $\frac{dz}{ds} = c$: χαρακτηριστική καμπύλη στο χώρο

$(x,t,z) \longrightarrow \vec{V}(x,t,z) := (\alpha(x,t,z), b(x,t,z), c(x,t,z))$: χαρακτηριστικό διανυσματικό πεδίο της $(*)$

Το $\vec{V}$ εφάπτεται σε κάθε σημείο μιας καμπύλης C, αν η C είναι χαρακτηριστική καμπύλη.

Θεώρημα 1. Έστω S μια ομαλή επιφάνεια στον xtu-χώρο που ορίζεται από τη σχέση $u = z(x,t)$. Η $z(x,t)$ είναι η λύση της $(*)$ $\Leftrightarrow$ σε κάθε σημείο τη S, το $\vec{V}$ εφάπτεται στην S.

Γεωμετρική Ερμηνεία: Μια ομαλή λύση της $(*)$ μπορεί να θεωρηθεί ως επιφάνεια που αποτελείται από χαρακτηριστικές καμπύλες.

Παρατήρηση: Έστω ότι ισχύει $\boxed{\alpha, b, c \in C_1(U) \ \& \ \alpha \cdot b \neq 0 \quad (\Sigma 1)}$

Τότε μια χαρακτηριστική καμπύλη της $(*)$ είτε βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια λύσεων ή έχει κενή τομή με την επιφάνεια λύσεων.

Θεωρούμε τη καμπύλη $\Gamma: \{(x,t) : x = f(s), t = g(s), s \in (\sigma_1, \sigma_2)\}$ καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

$f, g \in C^1$, έστω $h \in C^1$ και θεωρώ το πρόβλημα που δίνεται από την

$\alpha(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \quad \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$: ισχύει η $(\Sigma 1)$ $\quad (*)$

$u = h$ επί της Γ $\quad (**)$

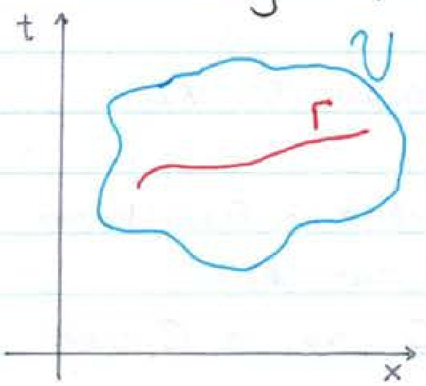
Παρατήρηση: Αν $f(s) = s$, $g(s) = 0$, $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = +\infty$ τότε η $(**)$ γίνεται

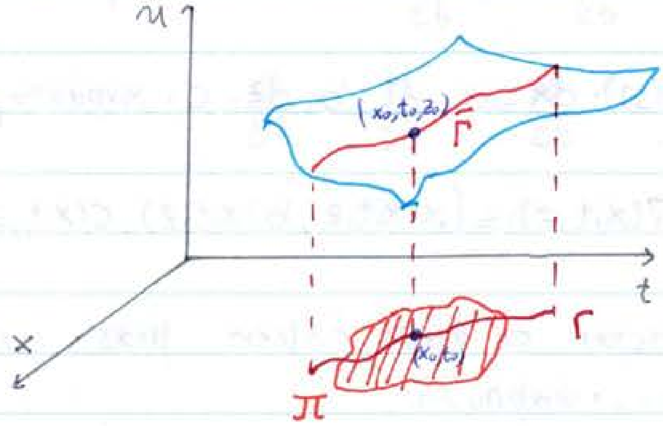
$u(x,0)=h(x)$, $x\in\mathbb{R}$ "κλασσική" αρχική λύση

Γεωμετρική διατύπωση του προβλήματος (*), (**)

Να βρεθεί επιφάνεια λύσεων της (*) που να περιέχει δοθείσα καμπύλη $\tilde{\Gamma}$ στον $\mathbb{R}^3$, όπου η $\tilde{\Gamma}$ περιγράφεται παραμετρικά ως:

$x=f(s)$, $t=g(s)$, $z=u(x(s),t(s))=h(s)$: $s\in(\sigma_1,\sigma_2)$





Θεώρημα 2: $a,b,c\in C^1(\tilde{U})$, $\tilde{U}\subseteq\mathbb{R}^3$, $(x_0,t_0,z_0)\in\tilde{U}$, $f,g,h\in C^1$

έστω ότι ισχύει η συνθήκη:

$$\begin{vmatrix} f'(s) & g'(s) \\ a(f(s),g(s),h(s)) & b(f(s),g(s),h(s)) \end{vmatrix}\neq 0 \quad \forall\ s\in(\sigma_1,\sigma_2) \qquad (\Sigma 2)$$

(συνοπτικά: $a\,g'(s)\neq b\,f'(s)$ επί της Γ)

Τότε σε μια περιοχή Π του (x_0,t_0) υπάρχει μοναδική (κλασσική) λύση της (*) που ικανοποιεί την (**) σε κάθε σημείο της Γ που βρίσκεται εντός της Π

Παράδειγμα: Έχουμε το πρόβλημα

$a(x,t,u)u_x+b(x,t,u)u_t=c(x,t,u)$, $\tilde{U}\subset\mathbb{R}^2$: ισχύει η Σ1

$z(s): u(x(s),t(s))$

$\Gamma=\{(x,t): t=0\}$

$\Sigma 1:\quad a,b,c\in C^1 \ :\ ab\neq 0$

$$\Sigma 2:\quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b\neq 0$$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 22/10/2019

Παρατηρήσεις

1. Το αποτέλεσμα είναι τοπικό
2. Αν α, b, c : σταθερές $\Rightarrow$ ολική ύπαρξη και μοναδικότητα
3. Από κάθε σημείο μιας μη-χαρακτηριστικής διέρχεται μια χαρακτηριστική

$\boxed{\Theta 1:}$ $\Sigma_1 + \Sigma_2 \longrightarrow$ (Τοπική) Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Έστω ότι δεν ισχύει η Σ_2, δηλαδή $\forall\, s \in (\sigma_1, \sigma_2)$

$$\frac{f'(s)}{\alpha(f(s),g(s),h(s))} = \frac{g'(s)}{b(f(s),g(s),h(s))} \quad \text{ή} \quad \longrightarrow \; = \frac{h'(s)}{c(f(s),g(s),h(s))} \quad \boxed{\Theta 2:}\ \nexists \text{ λύση}$$

$$\searrow \; \neq \frac{h'(s)}{c(f(s),g(s),h(s))} \quad \boxed{\Theta 3:}\ \text{Άπειρο πλήθος λύσεων}$$

Παράδειγμα: Έστω η $u_x = 1$

χαρακτηριστικές $x = t + k$, k: αυθαίρετη σταθερά, $(\alpha = 1, b = 0, c = 1)$

και έστω ότι έχω τα προβλήματα:

(i) $u(0,t) = t^2$

$f(s) = 0, g(s) = s, h(s) = s^2$

$\downarrow$

$u(x,t) = x + t^2$ μοναδική λύση

(ii) $u(x,0) = x^2$

$f(s) = s, g(s) = 0, h(s) = s^2$

$\downarrow$

$\nexists$ λύση

(iii) $u(x,0) = x$

$f(s) = s,\ g(s) = 0,\ h(s) = s$

$u(x,t) = x + p(t)$, p αυθαίρετη C'

με $p(0) = 0$. Άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα: $u_x = \theta u$, θ σταθερά, και έστω τα προβλήματα:

(i) $u(x,0) = e^{\theta x} \rightsquigarrow u(x,t) = q(t)e^{\theta x}$, $q \in C'$, $q(0) = 1$ (Άπειρες λύσεις)

(ii) $u(x,0) = \sin x \rightsquigarrow \nexists$ λύση

(iii) $u(0,t) = t \rightsquigarrow$ (θα δούμε την γενική περίπτωση πρώτα $u_x = \theta u + d(x,t)$)

Αυτή έχει λύση $u(x,t) = e^{\theta x} \cdot \left[\int_0^x e^{-\theta \xi} d(\xi,t) + u(0,t) \right]$

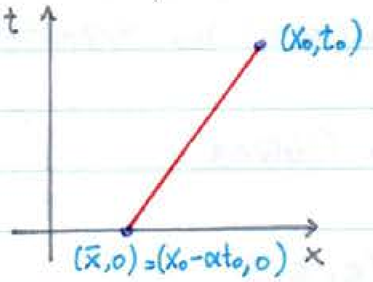
Στη περίπτωσή μας $d(x,t) = 0$. Επομένως $u(x,t) = e^{\theta x} \cdot t$ (μοναδική λύση)

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_x = u^2 & , \alpha > 0 : \text{σταθερά}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \cos x & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ν.Δ.Ο η λύση (κλασσική) παύει να υπάρχει για $t = 1$

$$\begin{aligned} dt/ds &= 1, \quad t(0)=t_0 \\ dx/ds &= \alpha, \quad x(0)=x_0 \\ dz/ds &= z^2, \quad z(0)=u(x_0,t_0) \end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned} dx/dt &= \alpha, \quad x(t_0)=x_0 \\ dz/dt &= z^2, \quad z(t_0)=u(x_0,t_0) \end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned} x(t) &= \alpha(t-t_0)+x_0 \\ z(t) &= \frac{1}{t_0 - t + \frac{1}{u(x_0,t_0)}} \end{aligned}$$



$t=0: \quad \bar{x} = x_0 - \alpha t_0$

$z(t) = u(x(t),t) \Rightarrow z(0) = u(\bar{x},0) = \cos \bar{x}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad z(0) &= \cos(x_0-\alpha t_0) \\ \| \\ \frac{1}{t_0 + \frac{1}{u(x_0,t_0)}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x_0,t_0) = \frac{\cos(x_0-\alpha t_0)}{1 - t_0 \cdot \cos(x_0-\alpha t_0)}$$

$t<1 \Rightarrow$ παρανομαστής >0 $\qquad x_0 = \alpha + m\pi$

Θα μελετήσουμε την εξίσωση με:

$(\alpha(x,t,u)=\alpha(u), \; b(x,t,u)=0, \; c(x,t,u)=0)$

$u_t + \alpha(u)u_x = 0 \quad x\in\mathbb{R}, \; t>0, \; \alpha \in C^1(\mathbb{R})$: Γενικευμένη εξίσωση Burgers

Αν $\alpha(u)=u$: Εξίσωση Burgers $u_t + u\, u_x = 0$

$$\begin{aligned} dt/ds &= 1, \quad t(0)=t_0 \\ dx/ds &= \alpha(z), \quad x(0)=x_0 \\ dz/ds &= 0, \quad z(0)=u(x_0,t_0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x(s) &= \alpha(u(x_0,t_0))\cdot s + x_0 \\ z(s) &= u(x_0,t_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(t) = \alpha(u(x_0,t_0))(t-t_0) + x_0$: ευθείες (όχι αναγκαστικά παράλληλες)

$z(t) = u(x(t),t)$