Μάθημα 1ο Εξ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 2/10/2013

David Logan : Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Π.Ε.Κ) κεφάλαια 5-6

I) Ολοκληρωτικές Εξισώσεις (Ο.Ε)
(α) Ολοκληρωτική εξίσωση Voltera (γραμμικές) και σε πραγματικές συναρτήσεις (ολοκλήρωμα από α έως x)
(β) Ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm (ολοκλήρωμα από α έως β)

II) Συναρτήσεις Green
(α) Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών Sturm-Liouville
(β) Ιδιοτιμές - Ιδιοσυναρτήσεις

III) Κατανομές
(α) Σύγκλιση ακολουθιών κατανομών, παράγωγος
(β) Ασθενής λύση

IV) Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Εφαρμογές)
(α) Συναρτήσεις Green για προβλήματα ελλειπτικού τύπου
(β) Κατανομές βραδείας αύξησης (Fourier)

Stakgold, Green's Functions & boundary value problems

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

$p, f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$
$k : [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ | συνεχείς

- Ο.Ε Voltera: $p(x)u(x) + \int_\alpha^x k(x,y)u(y)\,dy = f(x)$ (α)
- ΟΕ Fredholm: $p(x)u(x) + \int_\alpha^\beta k(x,y)u(y)\,dy = f(x)$ (β)

Αν $f=0$, τότε (α),(β) ομογενείς (και γραμμικές)
Αν $p=0$, τότε (α),(β) πρώτου είδους (α' είδους)
Αν $p\neq 0$, τότε (α),(β) β' είδους

Η k: πυρήνας της Ο.Ε.

Ολοκληρωτική Εξίσωση Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_\alpha^x k(x,y)\,u(y)\,dy \quad ,(1)$$
$$u = f + \lambda K u \quad , (2) \qquad \text{όπου} \quad Ku(x) = \int_\alpha^x k(x,y)\,u(y)\,dy \quad (3)$$

ειδική περίπτωση: $u(x) = f(x) + \lambda \int_\alpha^x \boxed{k(x-y)}\, u(y)\,dy \quad (4)$ πυρήνας συνελικτικού τύπου

(συνέλιξη: $h(x) * g(x) = \int_\alpha^x h(x-y)\,g(y)\,dy$, $\mathcal{L}\{h*g\} = \alpha \cdot h \mathcal{L} g$

Εφαρμόζουμε στη (4) μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}f + \lambda \cdot \mathcal{L}k\, \mathcal{L}u \Rightarrow (1-\lambda \mathcal{L}k)\mathcal{L}u = \mathcal{L}f \Rightarrow u = \dots$$

Παράδειγμα: $u(x) = x - \int_0^x (x-y)\,u(y)\,dy$

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}u \Rightarrow \mathcal{L}u = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow u(x) = \sin x$$

Πρόβλημα: Να διατυπωθεί ως Ο.Ε. το πρόβλημα αρχικών τιμών
(α) Πρώτης τάξης:
$u' = f(x,u)$,
$u(\alpha) = u_0$, f συνεχής

$$u(x) - \underbrace{u(\alpha)}_{u_0} = \int_\alpha^x f(y,u(y))\,dy$$

(β) Δεύτερης τάξης
$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x)$ $\quad p,q,f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς
$u(\alpha) = u_0$, $u'(\alpha) = u_1$

Για να μετατραπεί σε Ο.Ε θα χρειαστεί 2 φορές ολοκλήρωση (δηλ. διαδοχικά ολοκληρώματα).

ΕΩ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ 2/10/2019

Λήμμα: Για $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής, τότε
$$\int_\alpha^x \int_\alpha^s f(y)\,dy\,ds = \int_\alpha^x (x-y)\,f(y)\,dy$$

Απόδειξη:

Θέτουμε $F(s) = \int_\alpha^s f(y)\,dy$, τότε

$$\int_\alpha^x \int_\alpha^s f(y)\,dy\,ds = \int_\alpha^x F(s)\,ds = \int_\alpha^x s' F(s)\,ds = s\cdot F(s)\Big|_\alpha^x - \int_\alpha^x s F'(s)\,ds =$$
$$= x F(x) - \alpha \overset{0}{\cancel{F(\alpha)}} - \int_\alpha^x s f(s)\,ds = x\int_\alpha^x f(y)\,dy - \int_\alpha^x y f(y)\,dy = \int_\alpha^x (x-y) f(y)\,dy$$

Επίλυση του β. $u'' = -p(x)\cdot u' - q(x)u + f(x)$ ολοκληρώνω από α εώς x

$$u'(x) - \overbrace{u'(\alpha)}^{u_1} = -\int_\alpha^x p(y)u'(y)\,dy - \int_\alpha^x q(y)u(y)\,dy + \int_\alpha^x f(y)\,dy \Rightarrow$$

$$u'(x) = u_1 - p(x)u(x) + p(\alpha)u(\alpha) + \int_\alpha^x p'(y)u(y)\,dy - \int_\alpha^x q(y)u(y)\,dy + \int_\alpha^x f(y)\,dy$$

$$\Rightarrow u'(x) = \overbrace{(u_1 + p(\alpha)u(\alpha))}^{A} - p(x)u(x) + \int_\alpha^x (p'(y) - q(y))u(y)\,dy + \int_\alpha^x f(y)\,dy$$

ολοκληρώνω από α εως x $\Rightarrow$

$$u(x) = u_0 + (u_1 + p(\alpha)u_0)(x-\alpha) - \int_\alpha^x p(y)u(y)\,dy + \underbrace{\int_\alpha^x\int_\alpha^s (p'(y)-q(y))u(y)\,dy\,ds}_{(\text{Λήμμα})} + \int_\alpha^x\int_\alpha^s f(y)\,dy\,ds$$

$$\Rightarrow u(x) = u_0 + (u_1 + p(\alpha)u_0)(x-\alpha) - \int_\alpha^x \left[p(y) - (p'(y)-q(y))(x-y)\right]dy + \int_\alpha^x f(y)(x-y)\,dy$$

Ασκήσεις

(1) Να μετατραπεί σε Ο.Ε το ΠΑΤ.

$$u'' - 4u' + 3u = e^{2x}$$
$$u(0) = 1,\ u'(0) = 0$$

(2) Να αποδειχθεί ο τύπος του Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,y)\,dy = F(x,\beta(x))\cdot\beta'(x) - F(x,\alpha(x))\cdot\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F_x(x,y)\,dy$$