$= 3^n k \lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_{x_i})}_{\subseteq U}\Big) \leq 3^n k \lambda(U) < \varepsilon$

Τοτε $m(A_k) = m(A_k \cap U) + m(\underbrace{\overset{\circ}{A_k} \cap U^c}_{\subseteq A^c \text{ και } m(A^c)=0}) < \varepsilon$

Το ε ητο ηταν τυχον, αρα $m(A_k) = 0$.

Τοτε $m\left(\left\{x \,/\, \limsup\limits_{r \to 0^+} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} > 0\right\}\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$

L^p - χώροι

μαθημα 20
18/12/18

Ορισμος Εστω $0 < p < \infty$, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χ.μ. και $f: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Λέμε ότι η f είναι p-ολοκληρώσιμη αν $\int |f|^p d\mu < \infty$ και τοτε θέτουμε $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

Η κλάση αυτών των συναρτήσεων συμβολίζεται με $\mathcal{L}^p$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ σ.π.

(1) $a[f] + b[g] = [af + bg]$

Αν $f = f_1$ σ.π. και $g = g_1$ σ.π. θέλουμε $af + bg \sim af_1 + bg_1$

(2) Αν $f \sim f_1$ τοτε $\int |f|^p = \int |f_1|^p$

(3) $f := [f]$

Ετσι ορίζεται ο $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$

Παρατήρηση Αν $0 < p < 1$ τοτε η $\|\cdot\|_p$ δεν είναι νορμα.

π.χ. αν υπάρχουν $E, F \in \mathcal{M}$ με $E \cap F = \emptyset$ και $\mu(E) = a$, $\mu(F) = b$, $0 < a, b < \infty$

τοτε $\|\chi_E + \chi_F\|_p = \left(\int_{E \cup F} d\mu\right)^{1/p} = (a+b)^{1/p} > a^{1/p} + b^{1/p} = \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p$

Χωροι Banach : πλήρεις χώροι με νορμα

Θεώρημα Αν $1 \leq p < \infty$ τοτε ο $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος Banach με νορμα την $\|f\|_p$

απόδειξη $p = 1$ $\|f+g\|_1 = \int |f+g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$

$1<p<\infty$ τριγωνική ανισότητα (Young $\to$ Hölder $\to$ Minkowski)

Holder Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p (δηλ. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)
και αν $f\in L^p$, $g\in L^q$ τότε:

$$\int |fg|\,d\mu \le \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q}$$

δηλ. $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$

Minkowski Αν $f,g\in L^p$ τότε:

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

δηλ. $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Πληρότητα Γενικά για να δείξουμε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι πλήρης αρκεί να δείξουμε το εξής:
Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| <\infty$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x\in X$. (*)

(δηλ. η ακολουθία $y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x\in X$).

απόδειξη Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. $\forall n\geq 1$ μπορούμε να βρούμε $k_n\in\mathbb{N}$: $\forall m,s\geq k_n$ $\|x_m-x_s\|< 1/2^n$
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα.
$k_{n+1}, k_n \geq k_n$ άρα $\|x_{k_{n+1}}-x_{k_n}\| < 1/2^n$
Αν θέσουμε $y_n = x_{k_{n+1}}-x_{k_n}$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}^n <\infty \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

η $Z_N = y_1+\dots+y_N \to u\in X$.
$Z_N = (\cancel{x_{k_2}}-x_{k_1}) + (x_{k_3}-\cancel{x_{k_2}}) + \dots + (x_{k_{N+1}}-\cancel{x_{k_N}}) \to u$
δηλ. $x_{k_{N+1}} - x_{k_1} \to u \Rightarrow x_{k_{N+1}} \to x_{k_1} + u := x$
Η (x_n) ήταν βασική και έχει υπακολουθία $x_{k_n}\to x\in X$
Έπεται ότι $x_n \to x$.

Επαληθεύουμε την (*) για την $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$
Έστω $f_n\in L^p$ με $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p = M<\infty$. Ορίζουμε $S_N = f_1+\dots+f_N$
$t_N = |f_1|+\dots+|f_N|$

Βασική παρατήρηση: $\|f\|_p = \||f|\|_p$

$\forall N$ έχουμε: $\|t_N\|_p \le \|f_1\|_p + \dots + \|f_N\|_p \le M$, δηλαδή
$\forall N$ $\int t_N^p \, d\mu \le M^p$ $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Επίσης $(t_N)\uparrow$ άρα υπάρχει η
$t = \lim t_N$. και από ΘΜΣ $\int t^p d\mu = \lim \int t_N^p d\mu \le M^p < \infty$
δηλ. $t \in L^p$. Ειδικότερα $t = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$ σ.π. $\Rightarrow$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

συγκλίνει σ.π. και έτσι ορίζεται η $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, είναι μετρήσιμη και
πεπερασμένη σ.π. Επίσης $S_N \to S$ κσ.
Μένει ν.δ.ο. $\|S - S_N\|_p^p = \int |S - S_N|^p d\mu \xrightarrow{N \to \infty} 0$
Έχουμε $|S - S_N|^p \to 0$ κσ. και $|S - S_N|^p \le (|S| + |S_N|)^p \le (t + t_N)^p \le$
$\le (2t)^p = 2^p t^p$ και $\int 2^p t^p d\mu < \infty$ δηλ. $2^p t^p \in L^1$.
Από ΘΚΣ $\int |S - S_N|^p d\mu \to 0$ $\Rightarrow \|S - S_N\|_p \to 0$

<u>Πρόταση</u> Η κλάση Σ των απλών μετρήσιμων $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ που
ικανοποιούν $a_j \ne 0 \Rightarrow \mu(E_j) < \infty$
είναι πυκνή στον $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Δηλαδή ισχύει ότι:
$\forall f \in L^p$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in \Sigma$ τ.ω. $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$

<u>απόδειξη</u> Έστω $f \in L^p$. Υπάρχουν απλές μετρήσιμες φ_n: $\varphi_n \to f$
και $0 \le |\varphi_n| \le |\varphi_{n+1}| \le \dots \le |f|$. Δείχνουμε ότι $\int |f - \varphi_n|^p \to 0$
(Έχουμε $|f - \varphi_n|^p \to 0$ και $|f - \varphi_n|^p \le (|f| + |\varphi_n|)^p \le 2^p |f|^p \in L^1$
γιατί $f \in L^p$)
Από ΘΚΣ $\int |f - \varphi_n|^p d\mu \to 0 \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_p \to 0$
Αν $\varphi_n = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ και $a_{j_0} \ne 0$ τότε:

$$\mu(E_{j_0}) \cdot |a_{j_0}|^p = \int_{E_{j_0}} |\varphi_n|^p d\mu \le \int \underbrace{|\varphi_n|^p}_{\sum |a_j|^p \chi_{E_j}} d\mu \le \int |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow \mu(E_{j_0}) < \infty$$

<u>Ορισμός του $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$</u>
Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Ορίζουμε $\|f\|_\infty = \inf\{a > 0 \,/\, \mu(\{|f| > a\}) = 0\}$
Αν $\forall a > 0$ έχουμε $\mu(\{|f| > a\}) > 0$, θέτουμε $\|f\|_\infty = \infty$.

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\|f\|_\infty < \infty$ τότε το inf είναι min. Δηλαδή:
$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0 \Rightarrow |f| \le \|f\|_\infty$ σ.π.
<u>απόδειξη</u>: $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \varepsilon\}) = 0$

Υπάρχει $a < \|f\|_\infty + \varepsilon$ τω. $\mu(\{|f|>a\}) = 0$ (χαρ/μός του infimum)
$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \varepsilon\}) \leq$

Γράφουμε $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}$ ⇝ έχουν μέτρο μηδέν

$\Rightarrow \mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$

Σημείωση $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$

Πρόταση (α) Ο $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος Banach

(β) Αν $f \in L^1$ και $g \in L^\infty$ τότε $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

(γ) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff \exists E \in \mathcal{M}$ τω. $\mu(E^c) = 0$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα

(δ) Οι απλές μετρήσιμες είναι πυκνές στον L^∞

απλές προτάσεις

Πρόταση 1 Αν $0 < p < q < r \leq \infty$ τότε $L^q \subseteq L^p + L^r := \{g + h \,/\, g \in L^p, h \in L^r\}$

απόδειξη Έστω $f \in L^q$. Ορίζουμε $E = \{|f| > 1\}$ και $g = f \cdot \chi_E$ και $h = f \cdot \chi_{E^c}$. Προφανώς $f = g + h$

$$\int |g|^p = \int_E |f|^p \leq \int_E |f|^q \leq \int |f|^q < \infty$$

(αν $x \in E$ τότε $|f(x)| > 1$ και αφού $p < q$ έχουμε $|f(x)|^p < |f(x)|^q$)

$$\int |h|^r = \int_{E^c} |f|^r \underset{\substack{|f| \leq 1 \text{ στο } E^c \\ \text{και } q<r}}{\leq} \int_{E^c} |f|^q \leq \int |f|^q < \infty$$

Πρόταση 2 Αν $0 < p < q < r \leq \infty$, τότε $L^p \cap L^r \subseteq L^q$ και $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda} + \|f\|_r^{1-\lambda}$ όπου $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$

απόδειξη $$\int |f|^q \overset{q = \theta p + (1-\theta) r}{=\!=} \int |f|^{\theta p} |f|^{(1-\theta) r} \leq \left(\int |f|^p\right)^{\theta} \left(\int |f|^r\right)^{1-\theta}$$

$$\Rightarrow \|f\|_q \leq \|f\|_p^{\frac{p\theta}{q}} \cdot \|f\|_r^{\frac{r(1-\theta)}{q}} < \infty$$

Θέτω $\lambda = \frac{p\theta}{q}$, $1 - \lambda = \frac{r(1-\theta)}{q}$. Τότε $\frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{q}$

για $r = \infty$ έχω: $\int |f|^q \leq \int |f|^p \|f\|_\infty^{q-p} \Rightarrow \|f\|_q^q \leq \|f\|_p^p \|f\|_\infty^{q-p} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{1-p/q}$

Πρόταση 3. $(A, \mathcal{P}(A), \mu)$: μ το μέτρο αρίθμησης, $\ell^p(A) := L^p(A, \mathcal{P}(A), \mu)$
$\|f\|_p = \left(\sum_{a\in A} |f(a)|^p\right)^{1/p}$. Τότε $\forall A$ και $0<p<q\le\infty$ ισχύει

$\ell^p(A) \subseteq \ell^q(A)$

απόδειξη $p<q<\infty$. Από την πρόταση 2 $\|f\|_q \le \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{1-p/q} \le$
[Όμως $\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} |f(a)| \le \left(\sum_{a\in A} |f(a)|^p\right)^{1/p} = \|f\|_p$]

$\le \|f\|_p^{p/q} \|f\|_p^{1-p/q} = \|f\|_p \Rightarrow \|f\|_q \le \|f\|_p$
άρα αν $\|f\|_p<\infty$ $(f\in L^p)$ τότε $\|f\|_q<\infty$ $(f\in L^q)$ και μάλιστα $\|f\|_q \le \|f\|_p$

μάθημα 21°
20/12/18

Δυϊσμός στους χώρους L^p

X χώρος με νόρμα. Μια συνάρτηση $\varphi: X\to\mathbb{R}$ λέγεται γραμμικό συναρτησοειδές αν $\varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$ $\forall x,y\in X$, $a,b\in\mathbb{R}$
Το φ λέγεται φραγμένο αν $\exists M>0: \forall x\in X$ $|\varphi(x)| \le M\|x\|$. (*)
[τότε η φ είναι Lipschitz συνεχής. $|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi(x-y)| \le$
$\le M\|x-y\|$] Ορίζουμε $\|\varphi\|$ = η μικρότερη σταθερά $M>0$ για την οποία ισχύει η (*)
Η $\|\varphi\|$ είναι η νόρμα του φ.
Ο δυϊκός χώρος του X είναι ο γραμμικός χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $\varphi: X\to\mathbb{R}$ και συμβολίζεται με X^*. Η συνάρτηση $\varphi\mapsto\|\varphi\|$ είναι νόρμα.
(*) Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος μέτρου και $1\le p\le\infty$. Θέλουμε να περιγράψουμε τον $(L^p(\mu))^*$
"Θεώρημα" $(L^p(\mu))^* \approx L^q(\mu)$ όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. $(1\le p<\infty)$
Έστω $1\le p<\infty$ και έστω $g\in L^q(\mu)$. Ορίζουμε $\varphi_g: L^p(\mu)\to\mathbb{R}$
$$\varphi_g(f) = \int_X fg\,d\mu,\ f\in L^p(\mu)$$

Το φ_g είναι γρ. συναρτησοειδές και είναι φραγμένο
$$|\varphi_g(f)| = \left|\int_X fg\,d\mu\right| \le \int_X |fg|\,d\mu = \|fg\|_1 \overset{\text{Holder}}{\le} \|g\|_q \|f\|_p$$

Επίσης $\|\varphi_g\| \le \|g\|_q$

Λήμμα $\|g\|_q = \|\varphi_g\| = \max\{ |\int fg\, d\mu| \,/\, \|f\|_p \le 1\}$

<u>απόδειξη</u> Υποθέτουμε ότι $g \neq 0 \Rightarrow \|g\|_q > 0$

Ορίζουμε $f = \dfrac{|g|^{q-1} \cdot sgn(g)}{\|g\|_q^{q-1}}$, $g\, sgn(g) = |g|$

Τότε $\int fg\, d\mu = \dfrac{1}{\|g\|_q^{q-1}} \int |g|^q d\mu = \dfrac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q$

και $\|f\|_p^p = \dfrac{1}{\|g\|_q^{(q-1)p}} \int |g|^{(q-1)p} = \dfrac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = \dfrac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = 1$

άρα $\|\varphi_g\| = \sup\{ |\int fg\, d\mu| \,/\, \|f\|_p \le 1\} \geq \|g\|_q$

Σκοπός μας : $\forall \varphi \in (L^p(\mu))^* \;\exists g \in L^q(\mu)$ τ.ω. $\varphi = \varphi_g$ (υπό προϋποθέσεις)

Αρχική ιδέα Ορίζουμε $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ με $\nu(E) = \varphi(\chi_E)$, $E \in \mathcal{M}$

Αποδεικνύουμε ότι το ν είναι προσημασμένο μέτρο και ότι $\nu \ll \mu$

Απο Radon-Nikodym $\exists g \in L^1(\mu)$ τ.ω. $\underset{\varphi(\chi_E)}{\underset{\parallel}{\nu(E)}} = \int_E g\, d\mu = \int g \chi_E\, d\mu$

Πρόταση Εστω p, q συζυγείς εκθέτες $1 \le p < \infty$ και $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τ.ω.

(i) $\forall f \in \Sigma$ ισχύει $fg \in L^1$ [Σ η κλάση των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων που μηδενίζονται έξω από ένα σύνολο πεπερασμένου μέτρου]

(ii) $M_q(g) = \sup\{ |\int fg\, d\mu| \,/\, \|f\|_p \le 1,\ f \in \Sigma \} < \infty$

Αν επιπλέον το σύνολο $S_g = \{g \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο ή αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $g \in L^q$ και $\|g\|_q = M_q(g)$

Σημείωση Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο και η g ικανοποιεί τα (i) και (ii) τότε το $S_g = \{g \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο

Δείχνουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ το $A_\varepsilon = \{|g| > \varepsilon\}$ έχει πεπερασμένο μέτρο

Εστω ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mu(\{|g| > \varepsilon\}) = +\infty$. Τότε $\forall K > 0$

$\exists B \subseteq \{|g| > \varepsilon\}$ τ.ω. $K < \mu(B) < \infty$. Παίρνουμε $f = \dfrac{1}{\mu(B)^{1/p}} \chi_B \cdot sgn(g) \in L^p$

και $\|f\|_p = 1$

Εχουμε $M_q(g) \geq |\int fg\, d\mu| = \dfrac{1}{\mu(B)^{1/p}} \int_B \underbrace{|g|}_{> \varepsilon} d\mu \geq \dfrac{\varepsilon \mu(B)}{\mu(B)^{1/p}} =$

$= \varepsilon \mu(B)^{1/q} > \varepsilon K^{1/q}$ και το K ήταν τυχόν. Άτοπο απόδειξη της πρότασης Υποθέτουμε ότι το S_g είναι σ-πεπερασμένο

Βήμα 1 Δείχνουμε ότι αν f είναι φραγμένη μετρήσιμη που μηδενίζεται έξω από το σύνολο πεπερασμένου μέτρου τότε $fg \in L^1$ και $\left|\int fg\,d\mu\right| \le M_q(g)\|f\|_p$. Έχουμε ότι το $E=\{f\neq 0\}$ έχει πεπερασμένο μέτρο και $\|f\|_\infty<\infty$. Υπάρχουν απλές μετρήσιμες $\varphi_n \to f$ τ.ω. $\{\varphi_n\neq 0\}\subseteq E$ (δηλ. $\varphi_n\in\Sigma$) και $|\varphi_n|\le|\varphi_{n+1}|\le|f|\le\|f\|_\infty<\infty$

Δείχνουμε ότι $\int \varphi_n g \to \int fg$

Έχουμε $\left|\int\varphi_n g\,d\mu\right| \le M_q(g)\|\varphi_n\|_p \le M_q(g)\|f\|_p$

$\downarrow$

$\left|\int fg\,d\mu\right|$

Είναι $\varphi_n g\to fg$ και $|\varphi_n g|\le|f||g| \le \|f\|_\infty \underbrace{\chi_E\, g}_{\in\Sigma} \in L^1$ από (1)

άρα εφαρμόζω ΘΚΣ και παίρνω $\int\varphi_n g\to\int fg$

Βήμα 2 Για $q<\infty$: Γράφουμε $S_g=\{g\neq0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n\uparrow S_g$ και $\mu(E_n)<\infty$. Θεωρούμε απλές $\varphi_n\to g$ με $0\le|\varphi_n|\le|\varphi_{n+1}|\le|g|$ και ορίζουμε $g_n=\varphi_n\chi_{E_n}\to g$ ($g_n\in\Sigma$, $|g_n|\le|g|$)

$\exists\, f_n = \dfrac{|g_n|^{q-1}\operatorname{sgn}(g_n)}{\|g_n\|_q^{q-1}}$ τ.ω. $\|f_n\|_p=1$ και $\int f_n g_n=\|g_n\|_q$

Έχουμε $|g_n|^q\to|g|^q$. Από Fatou $\|g\|_q\le\liminf\|g_n\|_q =$
$=\liminf\int \underbrace{f_n g_n}_{\ge 0} = \liminf\int|f_n||g_n| \le \liminf\int|f_n g| =$
$=\liminf\int f_n g \overset{(*)}{\le} M_q(g)$ άρα $g\in L^q$

[(*) f_n απλές, $\|f_n\|_p=1$, $\mu(\{f_n\neq0\})<\infty$, $f_n g\ge0$]

Η αντίστροφη ανισότητα: $\left|\int fg\,d\mu\right|\le\|g\|_q\|f\|_p\le\|g\|_q$ αν $\|f\|_p\le1$
$\Rightarrow M_q(g)\le\|g\|_q$

Για $q=+\infty$: Δείχνουμε ότι $\forall\varepsilon>0$ $\mu(\{|g|>M_\infty(g)+\varepsilon\})=0$. Τότε $g\in L^\infty$ και $\|g\|_\infty\le M_\infty(g)$. Έστω ότι για κάποιο $\varepsilon>0$ $\mu(A)>0$ όπου $A=\{|g|>M_\infty(g)+\varepsilon\}$. Βρίσκω $B\subseteq A$ με $0<\mu(B)<\infty$.
Ορίζουμε $f=\dfrac{1}{\mu(B)}\chi_B\cdot\operatorname{sgn}(g)$. Τότε $\|f\|_1=\dfrac{1}{\mu(B)}\int\chi_B=1$, και

$M_\infty(g)\ge\int fg=\dfrac{1}{\mu(B)}\int_B|g|\,d\mu\ge\dfrac{1}{\cancel{\mu(B)}}(M_\infty(g)+\varepsilon)\cancel{\mu(B)}$ Άτοπο.

Θεώρημα Έστω p, q συζυγείς εκθέτες.
(α) Αν $1<p<\infty$ $\forall \varphi \in (L^p)^*$ $\exists g \in L^q$: $\forall f \in L^p$ $\varphi(f) = \int fg\, d\mu$
(β) Αν $p=1$ ισχύει το ίδιο αν το μ είναι σ-πεπερασμένο.

απόδειξη (1) $\mu(X)<\infty$: Ορίζουμε $\nu(E) = \varphi(\chi_E)$. Το ν είναι προσημασμένο μέτρο. Πράγματι, έστω $E_j \subset \mathcal{M}$ ξένα και $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Ζητάμε:

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \iff \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j) \to \nu(E) \iff$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \varphi(\chi_{E_j}) \to \varphi(\chi_E) \overset{\varphi \text{ γρ.}}{\iff} \varphi(\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}) \to \varphi(\chi_E)$$

Λόγω συνέχειας της φ στον L^p αρκεί $\|\chi_E - \chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}\|_p \to 0 \iff$

$$\iff \|\chi_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j}\| \to 0 \quad \text{ισχύει γιατί } \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j \downarrow \emptyset \text{ και } \mu(X)<\infty$$

$$\|\chi_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j}\| = \mu\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\Big)^{1/p}$$

$\|\chi_B\|_p = \mu(B)^{1/p} < \infty$

$\nu \ll \mu$: Αν $\mu(E)=0$ τότε $\chi_E = 0 \Rightarrow \varphi(\chi_E)=0 \Rightarrow \nu(E)=0$

Από Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L^1(\mu)$ τ.ω. $\nu(E) = \varphi(\chi_E) = \int \chi_E g\, d\mu$

$$\Rightarrow \forall f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{E_j} \in \Sigma \quad \text{ισχύει } \varphi(f) \overset{\varphi \text{ γρ.}}{=} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi(\chi_{E_j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int \chi_{E_j} g\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$ Επίσης αν $\|f\|_p \le 1$, $f \in \Sigma$ έχουμε:

$$\left|\int fg\, d\mu\right| = |\varphi(f)| \le \|\varphi\| \cdot \|f\|_p \Rightarrow M_q(g) \le \|\varphi\| < \infty.$$

Από την πρόταση, $g \in L^q$ και $\|g\|_q = M_q(g) \le \|\varphi\|$

Τέλος, αφού $g \in L^q$, αν $\|f\|_p \le 1$, $f \in \Sigma$ τότε $\left|\int fg\, d\mu\right| \underset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{\|g\|_q}_{M} \cdot \|f\|_p$

άρα $\|\varphi\| \le \|g\|_q$

Έστω $f \in L^p$. Οι απλές είναι πυκνές στον $L^p \Rightarrow \exists\, u_n$ απλές τ.ω. $\|u_n - f\|_p \to 0$. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_n) & = & \int u_n g\, d\mu \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi \text{ συνεχής}} & & \downarrow (?) \\ \varphi(f) & = & \int fg\, d\mu \end{array}$$

(?) $\left|\int u_n g\, d\mu - \int fg\, d\mu\right| \le \int |f-u_n||g|\, d\mu \overset{\text{Hölder}}{\le} \|f-u_n\|_p \cdot \|g\|_q \to 0$

μαθημα 22
10/1/19

Ανισοτητες (Χωροι L^p)

Ανισοτητα Chebyshev: Αν $f \in L^p(\mu)$, $0<p<\infty$ τοτε $\forall a>0$:

$$\mu\{x \in X / |f(x)| > a\} \le \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p$$

αποδειξη $E_a = \{|f|>a\}$

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu \geq \int_{E_a} |f|^p d\mu \geq \int_{E_a} a^p d\mu = a^p \mu(E_a)$$

Ολοκληρωτικοι Τελεστες

Εστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-πεπερασμενοι χωροι μετρου.

$K: X \times Y \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ μετρησιμη συναρτηση τ.ω. $\exists C>0$:

$\int |K(x,y)| d\mu(x) \le C$ ν-σπ

$\int |K(x,y)| d\nu(y) \le C$ μ-σπ

Εστω $1 \le p \le \infty$ και $f \in L^p(\nu)$ Οριζουμε $Tf(x) = \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$

Τοτε η Tf οριζεται καλα και $\|Tf\|_{L^p(\mu)} \le C \|f\|_{L^p(\nu)}$

Πραγματι, για $1<p<\infty$ εχω:

$$\int\left(\int |K(x,y)| |f(y)| d\nu(y)\right)^p d\mu(x) = \int\left(\int |K(x,y)|^{1/q} |K(x,y)|^{1/p} |f(y)| d\nu(y)\right)^p d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Holder}}{\le} \int \underbrace{\left(\int |K(x,y)| d\nu(y)\right)}_{\le C}^{p/q} \left(\int |K(x,y)| |f(y)|^p d\nu(y)\right) d\mu(x) \le$$

$$\le C^{p/q} \int\int |K(x,y)| |f(y)|^p d\nu(y) d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= C^{p/q} \int\int |K(x,y)| |f(y)| d\mu(x) d\nu(y) = C^{p/q} \int |f(y)|^p \underbrace{\int |K(x,y)| d\mu(x)}_{\le C} d\nu(y)$$

$$\le C^{p/q+1} \int |f(y)|^p d\nu(y) = C^p \|f\|_p^p$$

Για $p=1$ εχω:

$$\int\int |K(x,y)| |f(y)| d\nu(y) d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int |f(y)| \left(\int |K(x,y)| d\mu(x)\right) d\nu(y) \le$$

$$\le C \int |f(y)| d\nu(y) = C \|f\|_1$$

Για $p=\infty$ εχω:

$|Tf(x)| \le \int |K(x,y)| |f(y)| d\nu(y) \le \|f\|_\infty \int |K(x,y)| d\nu(y) \le$

$\le C \|f\|_\infty$ μ-σπ. Αρα $\|Tf\|_\infty \le C \|f\|_\infty$

Ανισότητα Minkowski Για $f \geq 0$, $1<p<\infty$ ισχύει:

$$\left[\int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right]^{1/p} \leq \int\left(\int f(x,y)^p\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x)$$

απόδειξη [Βασική ιδέα: Για να φράξουμε την $\|h\|_p$ από A αρκεί ν.δ.ο. $\forall g \in L^q$ ισχύει $\int hg\,d\nu \leq A\|g\|_q$

Διότι $\|h\|_p = \max\{\int gh\,d\nu \,/\, \|g\|_q \leq 1\}$]

Έστω $g\in L^q(\nu)$ Έχουμε $\int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)|g(y)|\,d\nu(y) =$

$$= \int\left(\int f(x,y)|g(y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x) \overset{\text{Hölder}}{\leq} \int\left(\int f(x,y)^p\, d\nu(y)\right)^{1/p}\left(\int |g(y)|^q\, d\nu(y)\right)^{1/q} d\mu(x)$$

$$= \|g\|_q \int\left(\int f(x,y)^p\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x)$$

Άρα $\|h\|_p = \left(\int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right)^{1/p} \leq A$

Θεώρημα $k:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη τ.ω. $\forall \lambda>0$ $k(\lambda x,\lambda y)=\frac{1}{\lambda}k(x,y)$ και $\int_0^\infty |k(x,1)|\,x^{-1/p}\,dx = C<\infty$

$\forall f\in L^p(0,\infty)$ και $g\in L^q(0,\infty)$ (όπου $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

ορίζουμε $Tf(y)=\int_0^\infty k(x,y)f(x)\,dx$, $Sg(x)=\int_0^\infty k(x,y)g(y)\,dy$

Τότε $\|Tf\|_p\le C\|f\|_p$, $\|Sg\|_q\le C\|g\|_q$

απόδειξη Φράσσουμε το $\left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty |k(x,y)||f(x)|\,dx\right)^p dy\right]^{1/p} \overset{\text{θέτω } x=yz}{=}$

$$=\left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \underbrace{|k(yz,y)|}_{=\frac{1}{y}|k(z,1)|}\,|f(yz)|\,y\,dz\right)^p dy\right]^{1/p} =$$

$$=\left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty |k(z,1)|\,|f(yz)|\,dz\right)^p dy\right]^{1/p} \overset{\text{Minkowski}}{\le}$$

$$\le \int_0^\infty\left(\int_0^\infty |k(z,1)|^p\,|f(yz)|^p\, dy\right)^{1/p}dz =$$

$$=\int_0^\infty |k(z,1)|\left(\int_0^\infty |f(yz)|^p\, dy\right)^{1/p}dz \overset{u=yz}{=} \int_0^\infty|k(z,1)|\left(\int_0^\infty |f(u)|^p\,\frac{1}{z}\, du\right)^{1/p}dz$$

$$=\int_0^\infty |k(z,1)|\,z^{-1/p}\,\|f\|_p\, dz = C\,\|f\|_p$$

Για την S_g $\left[\int_0^\infty \left(\int_0^\infty |k(x,y)|\, |g(y)|\, dy\right)^q dx\right]^{1/q} \stackrel{y=xz}{=}$

$= \left[\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{x} |k(1,z)|\, |g(xz)|\, x\, dz\right)^q dx\right]^{1/q} \leq$

$\leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty |k(1,z)|^q\, g(xz)|^q\right)^{1/q} dz \stackrel{u=xz}{=}$

$= \int_0^\infty |k(1,z)| \left(\int_0^\infty |g(u)|^q \frac{1}{z} du\right)^{1/q} dz =$

$= \|g\|_q \int_0^\infty |k(1,z)| \frac{1}{z^{1/q}} dz = \|g\|_q \int_0^\infty \frac{1}{z} \left|k\left(\frac{1}{z}, 1\right)\right| \frac{1}{z^{1/q}} dz$

$\stackrel{u=1/z}{=} \|g\|_q \int_0^\infty u\, |k(u,1)|\, u^{1/q} \frac{1}{u^2} du = \|g\|_q \int_0^\infty |k(u,1)| \frac{1}{u^{1-1/q}} du$

$= C \cdot \|g\|_q$

Συνάρτηση κατανομής και ασθενείς - L^p χώροι

Εστω $f: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη $((X, \mathcal{M}, \mu))$ Ορίζουμε:

$\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ με $\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X \,/\, |f(x)| > \alpha\})$

Η λ_f είναι η συνάρτηση κατανομής της f

Βασικές Ιδιότητες

(α) Η λ_f είναι φθίνουσα και δεξιά συνεχής

(β) Αν $|f| \leq |g|$ τότε $\lambda_f \leq \lambda_g$

(γ) Αν $|f_n| \uparrow |f|$ τότε $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_f$

(δ) $\lambda_{f+g}(\alpha) \leq \lambda_f(\alpha/2) + \lambda_g(\alpha/2) \quad \forall \alpha > 0$

απόδειξη (α) Θεωρούμε γνησίως φθίνουσα $a_n \to a$ και δείχνουμε ότι $\lambda_f(a_n) \to \lambda_f(a)$ (αυτό δείχνει ότι $\lim_{t \to a^+} \lambda_f(t) = \lambda_f(a)$)

Θέλουμε $\mu(\underbrace{\{|f| > a_n\}}_{:= E_n}) \to \mu(\underbrace{|f| > a}_{:= E})$ Εχουμε (E_n) αυξουσα

και $E = \bigcup_n E_n$ άρα $\mu(E_n) \to \mu(E)$.

(δ) $\mu(\underbrace{|f+g| > a}_{:= A}) \leq \mu(\underbrace{|f| > a/2}_{:= B}) + \mu(\underbrace{|g| > a/2}_{:= \Gamma})$

Εχουμε $A \subseteq B \cup \Gamma$ γιατί $B^c \cap \Gamma^c \subseteq A^c$ [αν $|f(x)| \leq a/2$ και $|g(x)| \leq a/2$

τοτε $|f(x)+g(x)| \leq a/2 + a/2 = a$]

Πρόταση 1 Αν $f \in L^p(\mu)$ τότε $\int |f|^p d\mu = \int_0^\infty p a^{p-1} \lambda_f(a) da$

[και άλλες παρεμφερείς $\int e^{|f|} d\mu = \int_0^\infty e^a \lambda_f(a) da$, ...]

απόδειξη Το δείχνουμε για $|f| = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ με τα $a_j > 0$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$$\infty > \int |f|^p d\mu = \sum_{j=1}^n a_j^p \mu(E_j) \Rightarrow \forall j \ \mu(E_j) < \infty$$

και μετά παίρνουμε για τυχούσα $f \in L^p(\mu)$ ακολουθία απλών $0 \leq \varphi_n \nearrow |f|$

$$\Rightarrow \int \varphi_n^p d\mu \to \int |f|^p d\mu$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_0^\infty p a^{p-1} \lambda_{\varphi_n}(a) da} \to \int_0^\infty p a^{p-1} \lambda_f(a) da$$

Υπολογίζουμε το $\int_0^\infty p a^{p-1} \lambda_f(a) da = \int_0^{a_n} p a^{p-1} \lambda_f(a) da =$

$$= \int_0^{a_1} p a^{p-1} \underbrace{\lambda_f(a)}_{\mu(E_1 \cup \dots \cup E_n)} da + \int_{a_1}^{a_2} p a^{p-1} \underbrace{\lambda_f(a)}_{\mu(E_2 \cup \dots \cup E_n)} da + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} p a^{p-1} \underbrace{\lambda_f(a)}_{\mu(E_n)} da$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \mu(E_j) a_1^p\right) + \left(\sum_{j=2}^n \mu(E_j)(a_2^p - a_1^p)\right) + \dots + \mu(E_n)(a_n^p - a_{n-1}^p) =$$

$$= \mu(E_1) \cdot a_1^p + \mu(E_2) \cdot a_2^p + \dots + \mu(E_n) a_n^p$$

Άλλος τρόπος: με Fubini

$$\int |f(x)|^p d\mu(x) = \int \left(\int_0^{|f(x)|} p a^{p-1} da\right) d\mu(x) = \int \left(\int_0^\infty p a^{p-1} \chi_{\{a < |f(x)|\}}(a,x) da\right) d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_0^\infty \left(\int p a^{p-1} \chi_{\{a < |f(x)|\}}(a,x) d\mu(x)\right) da = \int_0^\infty p a^{p-1} \left(\int \chi_{\{a < |f(x)|\}}(a,x) d\mu(x)\right) da$$

$$= \int_0^\infty p a^{p-1} \lambda_f(a) da$$

Παρατήρηση Αν $f \in L^p(\mu)$ τότε από Chebyshev $\forall a > 0$ έχουμε $\mu(\{|f| > a\}) \leq \frac{\|f\|_p^p}{a^p}$, δηλ. $a^p \lambda_f(a) \leq \|f\|_p^p \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sup_{a>0} a^p \lambda_f(a) < \infty}$ μάλιστα $\leq \|f\|_p^p$

Μάλιστα, $\boxed{\lim_{a\to\infty} a^p \lambda_f(a) = 0}$ Απόδειξη: $a^p \lambda_f(a) = a^p \mu(|f|>a) \leq$

$\leq \int_{\{|f|>a\}} |f|^p \, d\mu = \int \chi_{\{|f|>a\}} |f|^p \, d\mu \to 0$ επειδή $\chi_{\{|f|>a\}} |f|^p \xrightarrow{a\to\infty} 0$

Ορισμός Η μετρήσιμη f λέγεται ασθενώς-L^p αν $\sup_{a>0} (a^p \lambda_f(a)) < \infty$. Ορίζουμε $[f]_p = \left(\sup_{a>0} a^p \lambda_f(a)\right)^{1/p}$

Σημείωση Αν $f \in L^p$ τότε η f είναι ασθενώς-L^p

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. π.χ. $f(x) = \frac{1}{x^{1/p}}$ στο $(0,1)$

$f \notin L^p$ γιατί $\int_0^\infty f^p \, dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} \, dx = \infty$, όμως

$\lambda_f(a) = \lambda\left(\frac{1}{x^{1/p}} > a\right) = \lambda\left(x < \frac{1}{a^p}\right) = \frac{1}{a^p} \Rightarrow \forall a > 0$

$a^p \lambda_f(a) = 1$. Άρα $f \in$ weak-L^p

Πρόταση 1 Αν $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$ και $f \in$ weak-L^p τότε $\forall\, 0 < q < p$ ισχύει $f \in L^q$

απόδειξη $\int |f|^q \, d\mu = \int_0^\infty q a^{q-1} \lambda_f(a) \, da \leq$

$\left[f \in \text{weak-}L^p \Rightarrow \exists M > 0 : \forall a > 0 \ a^p \lambda_f(a) \leq M \Rightarrow \lambda_f(a) \leq M/a^p \right]$

$\leq \int_0^1 q \cdot a^{q-1} \lambda_f(a) \, da + \underbrace{\int_1^\infty qM \frac{1}{a^{1+(p-q)}} \, da}_{\text{υπάρχει}} \leq$

$\left[\forall a > 0 \ \{|f| > a\} \subseteq \{f \neq 0\} \Rightarrow \forall a > 0 \ \mu(\{|f| > a\}) \leq \mu(\{f \neq 0\}) < \infty \right]$

$\leq \mu(\{f \neq 0\}) \underbrace{\int_0^1 q a^{q-1} \, da}_{=1} + qM \int_1^\infty \frac{1}{a^{1+p-q}} \, d\mu = \mu(\{f \neq 0\}) + \frac{qM}{p-q}$