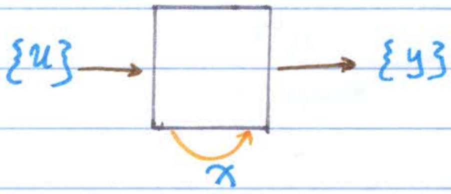
Μάθημα 1ο   Ε12. Θεωρία Ελέγχου   2/10/2018

Σύστημα



u: χώρος εισόδου
y: χώρος εξόδου
x: χώρος καταστάσεων (state-space)

Κατηγορίες Ταξινόμησης Συστημάτων

Ντετερμινιστικά — Στοχαστικά

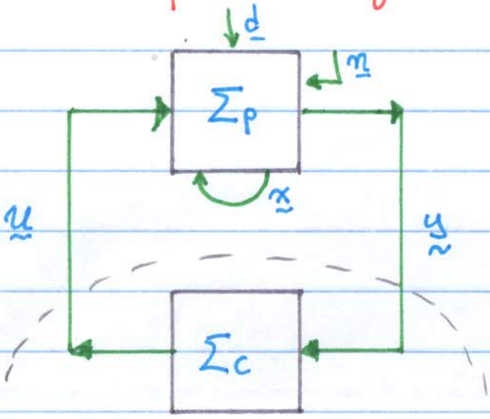
Χρονικά Συνεχή — Συστήματα διακριτού χρόνου — Υβριδικά
(περιγράφονται απο διαφορικές εξισώσεις) (περιγράφονται απο εξισώσεις διαφορών)

Μη Γραμμικά — Γραμμικά

Χρονικά μεταβαλλόμενα — Χρονικά ανεξάρτητα

Απείρων διαστάσεων — Πεπερασμένων διαστάσεων
"distributed" "lumped - parameter"

Συστήματα Ελέγχου (μέσω ανάδρασης/feedback)



Σp : "plant" (Δωσμένο)

Σc : αντισταθμιστής (Εμείς το σχεδιάζουμε)
ρυθμιστής
"Compensator"
"Controler"

$$\Sigma_p : \quad \underset{\sim}{x}' = f(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{d}), \quad \underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{x}_0$$
$$\underset{\sim}{y} = h(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{n})$$
αρχική συνθήκη

$$\Sigma_c : \quad \underset{\sim}{\xi}' = p(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{y})$$
$$\underset{\sim}{u} = q(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{y})$$

$\underset{\sim}{x}$: διάνυσμα συναρτήσεων κατάστασης
$\underset{\sim}{u}$: διάνυσμα εισόδου
$\underset{\sim}{d}$: διάνυσμα διαταραχών
$\underset{\sim}{y}$: διάνυσμα εξόδου
$\underset{\sim}{n}$: διάνυσμα θορύβου από αισθητήρες.

Πρόβλημα Ελέγχου Ανάδρασης

Να σχεδιαστούν συναρτήσεις $p()$ και $q()$, έτσι ώστε το σύστημα "Κλειστού βρόγχου" να έχει επιθυμητές ιδιότητες:

- Ευστάθειας
- Επίδοσης (Performance)
- "Ευρωστείας" (Robustness)

- **Δυναμικά Μη-γραμμικά**

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x, u, t) \\ y &= g(x, u, t) \end{aligned}\right\} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p$$

(χρονικά μεταβαλλόμενα)

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned}\right\}$$

(χρονικά ανεξάρτητα)

- **Γραμμικά**

$$\begin{aligned} x' &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

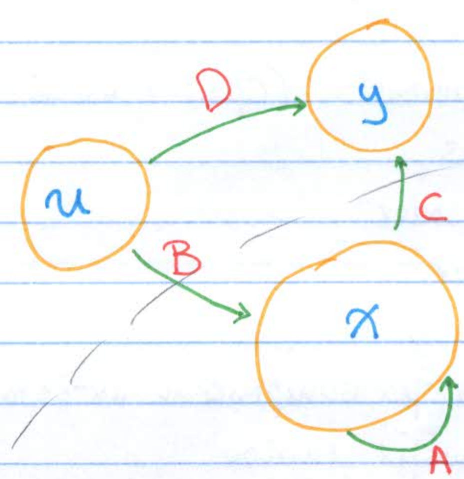
$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

ή

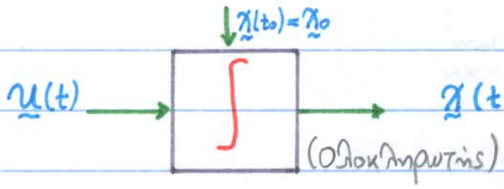
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ p \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x' &= A x + B u \\ y &= C x + D u \end{aligned}$$

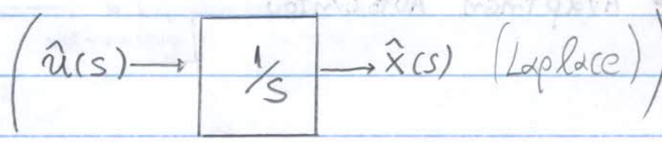
(χρονικά ανεξάρτητο)

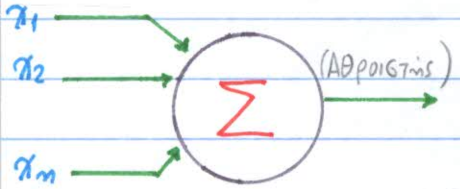


E12. Θεωρία Ελέγχου 2/10/2018

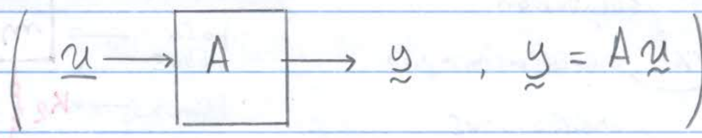


$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{u}(r)\,dr$$



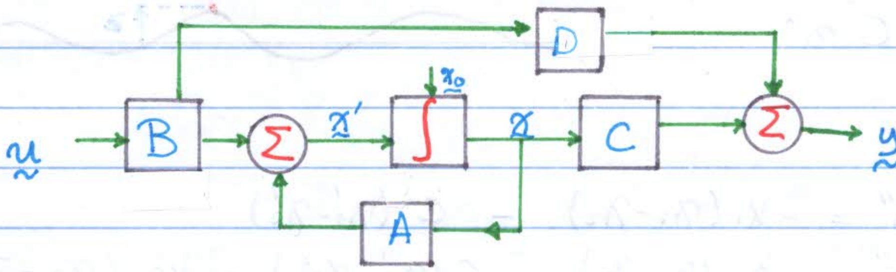


$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

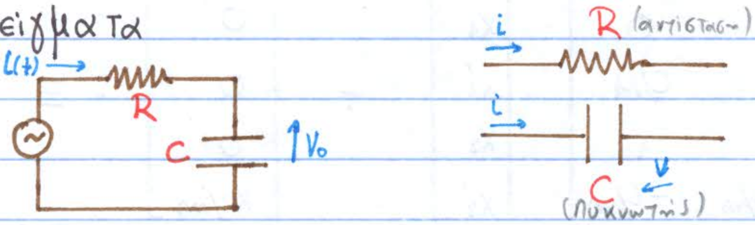


$$\underset{\sim}{y} = A\underset{\sim}{u}$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{x}' &= A\underset{\sim}{x} + B\underset{\sim}{u} \\ \underset{\sim}{y} &= C\underset{\sim}{y} + D\underset{\sim}{u} \end{aligned}\right\}$$



Παραδείγματα

• 

$$V = i \cdot R$$

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow V = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + V(t_0)$$

$$V_i(t) = i \cdot R + V_o(t) \implies V_i = RC\frac{dV_o}{dt} + V_o$$

$$\implies \frac{dV_o}{dt} = -\frac{1}{RC}V_o + \frac{1}{RC}V_i$$

$$x \equiv V_o$$

$$A = -\frac{1}{RC}$$

$$x' = Ax + Bu$$

$$B = 1/RC$$

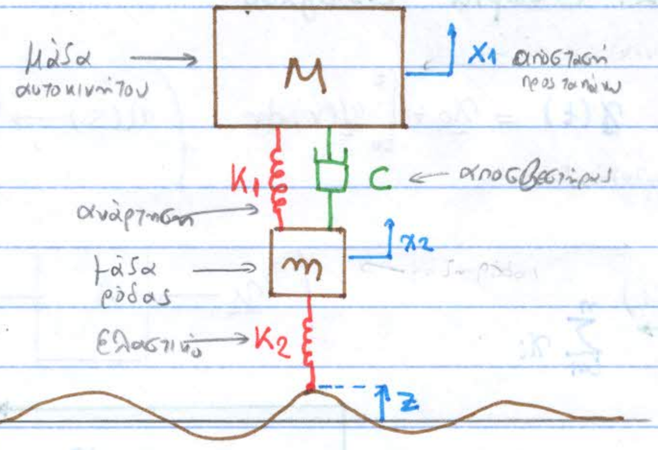
$$C = 1$$

$$y = Cx$$

$$D = 0$$

$$V_o = 1 \cdot V_o$$

• Ανάρτηση Αυτοκινήτου



$$\underset{\text{Δύναμη}}{F} = k\,\underset{\text{επιμήκυνση}}{x} \quad \text{σταθερά ελατηρίου}$$

$$F = \underset{\text{αποσβεστήρας}}{C}\,x'$$

$$\left.\begin{aligned} M x_1'' &= -k_1(x_1 - x_2) - C(x_1' - x_2') \\ m x_2'' &= k_1(x_1 - x_2) + C(x_1' - x_2') - k_2(x_2 - z) \end{aligned}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/M & -C/M & k_1/M & C/M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1/m & C/m & -(k_1+k_2)/m & -C/m \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2/m \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{z}_{z}$$

Έστω ότι έχω και 2 μετρήσεις από αισθητήρες

$$y_1 = x_1''$$
$$y_2 = x_1 - x_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1/M & -C/M & k_1/M & C/M \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot z$$

$$y = C \cdot x + D \cdot z$$

Μάθημα 2ο   Ε12. Θεωρία Ελέγχου   4/10/2018

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

$\underline{x}' = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) \quad , \underline{x}(t_0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n, A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n}), B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times m}), u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$

Η λύση του Π.Α.Τ είναι μοναδική $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^m$. Εξετάζουμε το αυτόνομο σύστημα $(B \equiv 0)$
$\underline{x}' = A(t)\underline{x}(t)$ και έστω $\mathcal{L}$ το σύνολο των λύσεων, τότε $\mathcal{L}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n.

Έστω $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$ βάση του $\mathcal{L}$ ορίζουμε τον θεμελιώδη πίνακα λύσεων (θπλ)
$\psi(t) = [\underline{\psi_1}(t) \dots \underline{\psi_n}(t)]$ τότε $\det[\psi(t)] \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Έστω $\tilde{\psi}(t)$ ένας πίνακας λύσεων $\tilde{\psi}(t) = [\tilde{\psi}_1(t) \dots \tilde{\psi}_n(t)]$ τότε από το θεώρημα Liouville $\det[\tilde{\psi}(t)] = \det[\tilde{\psi}(t_0)] \exp\{\underbrace{\int_{t_0}^t trace(A(\sigma))d\sigma}\}$
$>0 \ \forall t, t_0$

Επομένως $\left.\begin{array}{l} \det[\tilde{\psi}(t)] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \det[\tilde{\psi}(t)] \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ ή

Θεώρημα: (i) Αν $\psi(t)$ είναι θ.π.λ. τότε $\psi(t)\cdot C$ είναι ένας επίσης θ.π.λ $\forall C \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det(C) \neq 0$
(ii) Αν $\psi(t)$ και $\psi_1(t)$ είναι επίσης δύο θ.π.λ., τότε $\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\det(C_1) \neq 0 : \psi_1(t) = \psi(t)C_1$

Απόδειξη:
(i) $\psi'(t) = A(t)\psi(t) \Rightarrow (\psi C)' = \psi' C = A(\psi C) \Rightarrow \psi C$ πίνακας λύσεων και εφόσον $\det(\psi(t)C) = \det(\psi(t))\det(C) \neq 0$ και επομένως επιπλέον θ.π.λ
(ii) Αντίστροφα ορίζουμε $y(t) = \psi^{-1}(t)\psi_1(t) \Leftrightarrow \psi(t)y(t) = \psi_1(t)$. Παραγωγίζοντας
$(\psi y)' = \psi' y + \psi y' = \psi_1' \Leftrightarrow A\psi y + \psi y' = A\psi_1 \Rightarrow A\psi y + \psi y' = A\psi y$
$\Rightarrow \psi y' = 0 \Rightarrow y' = 0$ Επομένως $y = C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\det(C_1) \neq 0$.

Ορισμός: Ο πίνακας $\Phi(t, t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$ ονομάζεται πίνακας μεταφοράς του $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$

Παρατήρηση: Ο $\Phi(t,t_0)$ δεν εξαρτάται από τον $\psi(t)$ ο οποίος τον όριζε

$(\psi_1(t)\psi_1^{-1}(t_0)) = \psi(t)\cdot C[\psi(t) C]^{-1} = \psi(t)\, C\cdot C^{-1}\psi(t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0).)$

Θεώρημα: (i) $\Phi(t,t) = I_n \quad \forall\ t\in\mathbb{R}$

(ii) $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t) \quad \forall\ t,t_0\in\mathbb{R}$

(iii) $\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\cdot\Phi(t_1,t_0) \quad \forall\ t_0,t_1,t_2\in\mathbb{R}$

Απόδειξη: (i) $\Phi(t,t) = \psi(t)\psi^{-1}(t) = I_n$

(ii) $\Phi^{-1}(t,t_0) = [\psi(t)\psi^{-1}(t_0)]^{-1} = \psi(t_0)\psi^{-1}(t) = \Phi(t_0,t)$

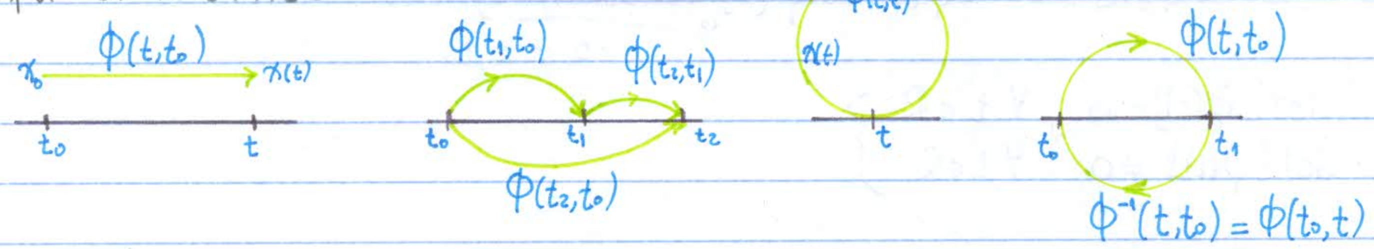
(iii) $\Phi(t_2,t_0) = \psi(t_2)\psi^{-1}(t_0) = \psi(t_2)\psi^{-1}(t_1)\cdot\psi(t_1)\cdot\psi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2,t_1)\ \Phi(t_1,t_0)$

Έστω $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$. Αν $\underline{x}$ είναι λύση του $\underline{x}' = A\underline{x}$, τότε $\underline{x}(t) = \psi(t)\underline{c}$, $\underline{c}\in\mathbb{R}^n$

Ποιό $\underline{c}\in\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί στην λύση του Π.Α.Τ;

$\underline{x}(t_0) = \psi(t_0)\cdot\underline{c} \Rightarrow \underline{c} = \psi^{-1}(t_0)\underline{x}(t_0) \Rightarrow \underline{x}(t) = \underbrace{\psi(t)\psi^{-1}(t_0)}_{\Phi(t,t_0)}\underline{x}_0$

Άρα οι ιδιότητες



Επίλυση γραμμικών συστημάτων με είσοδο

$$\underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t) + B(t)\,\underline{u}(t) \quad , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$$

Λύση με την μέθοδο μεταβολής παραμέτρων

Αν $B\equiv 0$ η λύση: $\underline{x}(t) = \Phi(t,t_0)\,\underline{x}_0$,

Τώρα $(B\neq 0)$ ψάχνω λύσεις της μορφής $\underline{x} = \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}(t)$

Τότε

$\underline{x}' = \Phi'(t,t_0)\,\underline{\psi}(t) + \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}'(t) = A(t)\,\Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}(t) + \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t) + B(t)\,\underline{u}(t)$

$\Rightarrow \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}'(t) = B(t)\,\underline{u}(t) \Rightarrow \psi'(t) = \Phi(t_0,t)\,B(t)\,\underline{u}(t)$

$\Rightarrow \int_t^{t_0}\psi'(\tau)\,d\tau = \int_t^{t_0}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)\,d\tau$

$\underline{\psi}(t) - \underline{\psi}(t_0) = \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \Rightarrow \underline{\psi}(t) = \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)\,d\tau$ (*)

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 4/10/2018

Από $\boxed{\underline{x} = \Phi(t,t_0)\cdot \underline{\psi}(t)} \xRightarrow{t=t_0} \underline{x}(t_0) = \overbrace{\Phi(t_0,t_0)}^{I_n}\cdot \underline{\psi}(t_0)$

$\Downarrow$

$\psi(t) = \Phi(t_0,t)\,x(t)$

Άρα η $(*) \Longleftrightarrow \Phi(t_0,t)\,\underline{x}(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow \underline{x}(t) = \Phi(t,t_0)\underline{x}_0 + \int^{t} \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow \underline{x}(t) = \Phi(t,t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$

Για το χρονικά ανεξάρτητο αυτόνομο σύστημα

$\underline{x}' = A\underline{x} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad , \quad \underline{x}(t) = \Phi(t,0)x_0$

Ορίζουμε $e^{At} \equiv \Phi(t,0)$

• $\Phi(0,0) = I_n \Rightarrow e^{A0} = I_n$ • $\Phi'(t,0) = A\,\Phi(t,0) \Rightarrow (e^{At})' = Ae^{At}$

Θεώρημα (Ιδιότητες e^{At})

(1) $e^{A(t+s)} = e^{At}\cdot e^{As} \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R}$

(2) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

(3) $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}\cdot A$

(4) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

Έστω το χρονικά ανεξάρτητο σύστημα

$\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} \quad , \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$

τότε $\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \equiv e^{At}\cdot\underline{x}_0 + e^{At}B * \underline{u}(t)$

$$\underline{y}(t) = C\cdot e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t C\,e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = C\cdot e^{At}\underline{x}_0 + [\underbrace{C\cdot e^{At}B + D\delta(t)}_{h(t)\ \text{"κρουστική απόκριση"}}] * \underline{u}(t)$$