ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργασία Θεωρίας Ελέγχου Ι

Εισαγωγή: Θεωρήστε δορυφόρο μάζας m. Οι συντεταγμένες του δορυφόρου είναι (x, y) ως πρός Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η ισοδύναμα (r, θ) ως προς σύστημα πολικών συντεταγμένων. Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρούμε τον δορυφόρο ως υλικό σημείο με $m = 1$ και υποθέτουμε ότι η κυκλική κίνηση περιορίζεται σε επίπεδο με κέντρο τη γη. Ο δορυφόρος ελέγχει την τροχειά του με δύο ανεξάρτητες δυνάμεις u_1 και u_2 στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα. Ο νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\underline{\ddot{r}} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{f}_g$$

όπου $\underline{f}_g$ η δύναμη του πεδίου βαρύτητας

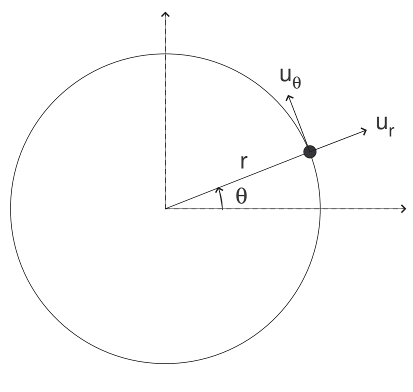
$$\underline{f}_g = -\frac{k}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$

και $k > 0$ σταθερά. Έστω σύστημα πολικών συντεταγμένων με κέντρο τον δορυφόρο που ορίζεται απο τα μοναδιαία διανύσματα $\underline{u}_r$ και $\underline{u}_\theta$ στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα, δηλ.

$$\underline{u}_r = (\cos\theta \quad \sin\theta)^T, \quad \underline{u}_\theta = (-\sin\theta \quad \cos\theta)^T$$

Επομένως

$$\underline{r} = r\underline{u}_r, \;\; \underline{u}_1 = u_1\underline{u}_r, \;\; \underline{u}_2 = u_2\underline{u}_\theta, \;\; \underline{f}_g = -\frac{k}{r^2}\underline{u}_r$$



Σχήμα 1: Δορυφόρος σε κυκλική τροχειά

Άσκηση 1 - Παραγωγή μοντέλου καταστάσεων χώρου, γραμμικοποίηση (αναλυτική λύση): (α) Αναλύοντας την διανυσματική εξίσωση που αντιστοιχεί στον νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, δείξτε ότι:

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{k}{r^2(t)} + u_1(t)$$
$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{2\dot{r}(t)\theta(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t)$$

Αν $u_1(t) = u_2(t) = 0$, $t \geq 0$ και οι αρχικές συνθήκες είναι $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ και $\dot{\theta}(0) = \omega_0$, δείξτε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν λύση:

$$r(t) = r_0, \;\; \dot{\theta}(t) = \omega_0 \Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0, \;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0^3}}$$

που αντιστοιχεί σε κυκλική τροχειά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. (β) Αν οι μεταβλητές κατάστασης επιλεγούν ως: $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, δείξτε οτι:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + u_1 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{u_2}{x_1}
\end{aligned}$$

και ότι η γραμμικοποιημένη μορφή των εξισώσεων αυτών γύρω από την λύση του συστήματος που ορίστηκε στο (α) με $u_1(t) = u_2(t) = 0$ είναι:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2 - Ιδιοτιμές, (γενικευμένα) ιδιο-διανύσματα και εκθετικός πίνακας (αναλυτική/υπολογιστική λύση): (α) Υπολογίστε αναλυτικά την παραγωντοποίηση Jordan του πίνακα A του γραμμικοποιημένου μοντέλου και τον εκθετικό πίνακα e^{At}. Εξετάστε αν το αυτόνομο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ευσταθές κατά Lyapunov. (β) Υπολογίστε αναλυτικά τις μεταβλητές κατάστασης $z(t)$ του γραμμικοποιημένου συστήματος ως συνάρτηση τοψ χρόνου, αν: (ι) $u_1(t) = v_1(t) = \delta(t)$ και $u_2(t) = v_2(t) = 0$, και (ιι) $u_1(t) = v_1(t) = 0$ και $u_2(t) = v_2(t) = \delta(t)$, όπου $\delta(t)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση κρούσης (ώθησης). Υποθέστε ότι $\theta(0) = 0$ (και επομένως $z(0) = 0$). (γ) Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα σας με χρήση των εντολών της Matlab: jordan.m και expm.m για επιλεγμένες τιμές των μεταβλητών r_0 και ω_0. Χρησιμοποιήστε τα αρχεία askhsha.m και askhshb.m.

Άσκηση 3 - Ελεγξιμότητα, Παρατηρησιμότητα: Κατασκευάστε τους πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας του συστήματος. Εξετάστε τις ιδιότητες ελεγξιμότητας με χρήση των παρακάτω εισόδων: (α) αποκλειστικά ακτινικής ώθησης, (β) αποκλειστικά εφαπτομενικής ώθησης, (γ) ταυτόχρονα ακτινικής και εφαπτομενικής ώθησης. Εθετάστε επίσης τις ιδιότητες παρατηρησιμότητας του συστήματος με μετηρήσεις των μεταβλητών: (α) $r(t)$, (β) $\dot{\theta}(t)$, και (γ) $r(t)$ και $\dot{\theta}(t)$.

Σημείωση: (Γραμμικοποίηση Δυναμικού Συστήματος Antsaklis, Michel): Έστω δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

όπου $f : \mathbb{R} \times D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^n$ και $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $f \in C^1(\mathbb{R} \times D_1 \times D_2, \mathbb{R}^n)$ και αν $\phi(t)$ είναι λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, πού οριζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αρχική συνθήκη x_0 και δοσμένη συνάρτηση $\psi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, δηλ.

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t), \psi(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

τότε το σύστημα γραμμικοποιείται ως εξής: Ορίζουμε $z(t) = x(t) - \phi(t)$ και $v(t) = u(t) - \psi(t)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{dz(t)}{dt} &= \dot{z} = \dot{x} - \dot{\phi}(t) = f(t, x, u) - f(t, \phi(t), \psi(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t), \psi(t))z + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \phi(t), \psi(t))v + F_1(t, z, u) + F_2(t, v)
\end{aligned}$$

όπου

$$F_1(t, z, u) = f(t, z + \phi(t), u) - f(t, \phi(t), u) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t), \psi(t))z$$

είναι τάξης $o(\|z\|)$ καθώς $\|z\| \to 0$, ομοιόμορφα ως προς t σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ γιά σταθερό u, δηλ. για σταθερό u και κάθε συμπαγές υποσύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lim_{\|z\|\to 0}\left(\sup_{t\in I}\frac{\|F_1(t,z,u)\|}{\|z\|}\right) = 0,$$

και όπου

$$F_2(t,v) = f(t,\phi(t),v+\psi(t)) - f(t,\phi(t),\psi(t)) - \frac{\partial f}{\partial u}(t,\phi(t),\psi(t))v$$

είναι τάξης $o(\|v\|)$ καθώς $\|v\| \to 0$, ομοιόμορφα ως προς t σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δηλ. για κάθε συμπαγές υποσύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\left(\sup_{t\in I}\frac{\|F_2(t,v)\|}{\|v\|}\right) = 0,$$

και όπου $\partial f/\partial x(\cdot)$ και $\partial f/\partial u(\cdot)$ είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες της f ως προς x και u, αντίστοιχα, δηλ.,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x,u) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,x,u) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t,x,u) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t,x,u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(t,x,u) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(t,x,u) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(t,x,u) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}(t,x,u) \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,\phi(t),\psi(t)) = A(t) \quad \frac{\partial f}{\partial u}(t,\phi(t),\psi(t)) := B(t)$$

έχουμε:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t) + F_1(t,z,u) + F_2(t,v)$$

και

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t)$$

είναι το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από την λύση $\phi(t)$ και την συνάρτηση εισόδου $\psi(t)$.

Στην περίπτωση της άσκησης έχουμε (θέτοντας $\theta_0 = 0$):

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \omega_0 t \\ \omega_0 \end{pmatrix} \Rightarrow z(t) = \begin{pmatrix} r(t) - r(0) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) - \omega_0 t \\ \dot{\theta}(t) - \omega_0 \end{pmatrix} \Rightarrow z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και $\psi(t) = 0 \Rightarrow v_1(t) = u_1(t)$ και $v_2(t) = u_2(t)$.

Γ. Χαλικιάς, Απρίλης 2013