ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, Εαρ. 2019

Ασκήσεις Νο. 1

(Οι Ασκήσεις 1–3 είναι από τό Κεφ. 3 των μεταπτυχιακών σημειώσεων Αριθμητικής Ανάλυσης).

1. Ασκ. 3.1.1

2. Ασκ. 3.1.4

3. Ασκ. 3.1.5

4. Μέθοδος τού Euler μέ μεταβλητό βήμα.

Έστω $a=t^0<t^1<\dots<t^N=b$ ένας οποιοσδήποτε διαμερισμός τού $[a,b]$, καί έστω $h_n:=t^{n+1}-t^n$, $0\le n\le N-1$, με $h:=\max\limits_{0\le n\le N-1} h_n$.

Έστω $f\in C^1([a,b]\times\mathbb{R})$ μια συνάρτηση που πληροί ολική συνθήκη Lipschitz μέ σταθερά L ως προς y, δηλ. τέτοια ώστε γιά κάποιο $L>0$:

$$|f(t,x)-f(t,z)|\le L|x-z|,\ \forall t\in[a,b],\ \forall x,z\in\mathbb{R},$$

καί έστω $y\in C^2[a,b]$ η λύση του π.α.τ.

$$(*)\ \begin{cases} y'=f(t,y), & a\le t\le b,\\ y(a)=y_0. \end{cases}$$

Αν $\{y^n\}_{n=0}^N$ είναι οι προσεγγίσεις των $y(t^n)$ που δίνει η μέθοδος τη Euler <u>με μεταβλητό βήμα</u>, δηλ.

$$y^0 = y_0$$

για $n=0,\dots,N-1$:

$$y^{n+1} = y^n + h_n f(t^n, y^n),$$

Δείξτε ότι $\max\limits_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)}-1\right)h$, $M := \max\limits_{a\le t\le b}|y''(t)|$.

(<u>Υπόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, $0\le n\le N$. Όπως στην απόδειξη της εκτίμησης του σφάλματος για την μέθοδο του Euler με σταθερό βήμα, δείξτε ότι

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1+h_nL)|\varepsilon^n| + \frac{Mh}{2}h_n, \quad 0\le n\le N-1.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και το ότι $\varepsilon^0=0$ δείξτε ότι έχουμε

$$\begin{aligned}|\varepsilon^{n+1}| &\le \frac{Mh}{2}\Big[h_n + (1+h_nL)h_{n-1} + (1+h_nL)(1+h_{n-1}L)h_{n-2} \\ &\quad + \dots + (1+h_nL)(1+h_{n-1}L)\cdots(1+h_1L)h_0\Big] \\ &\le \frac{Mh}{2}\Big[h_n + e^{L(t^{n+1}-t^n)}(t^n-t^{n-1}) + e^{L(t^{n+1}-t^{n-1})}(t^{n-1}-t^{n-2}) \\ &\quad + \dots + e^{L(t^{n+1}-t^1)}(t^1-t^0)\Big]. \quad (**)\end{aligned}$$

Αποδείξτε τώρα ότι $e^{L(t^{n+1}-t^k)}(t^k-t^{k-1}) \le \int_{t^{k-1}}^{t^k} e^{L(t^{n+1}-s)}\,ds$,

και χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα στο δεύτερο μέλος της (**).)

5. Απόδειξη της εκτίμησης του σφάλματος για την μέθοδο του Euler όταν η f είναι τοπικά Lipschitz.

Έστω ότι το π.α.τ. $(*)$ της Ασκ. 4 έχει μοναδική λύση $y \in C^2[a,b]$ και έστω $m, \ell \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$m \le y(t) \le \ell, \quad a \le t \le b.$$

Έστω $\delta > 0$ και υποθέστε ότι η $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$ πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz:

$$\exists L > 0 \; ; \; \forall t \in [a,b], \; \forall x, z \in [m-\delta, \ell+\delta] :$$

$$|f(t,x) - f(t,z)| \le L|x-z|.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $h_0 > 0$, τέτοιο ώστε, αν $0 < h \le h_0$, η μέθοδος του Euler για το $(*)$ (με ομοιόμορφο διαμερισμό βήματος $h = \frac{b-a}{N}$) δίνει προσεγγίσεις y^n για τις οποίες ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - y(t^n)| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h, \quad M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|.$$

(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι $\frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h_0 < \delta$ και αποδείξτε επαγωγικά ότι $y^n \in [m-\delta, \ell+\delta]$ για $n = 0, 1, \dots, N$.)