ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ   ΕΑΡ. 2019

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Θεωρήστε την μέθοδο Heun, η οποία είναι μία άμεση μέθοδος RK με $q = 3$ στάδια και τάξη ακρίβειας $p = 3$ πού δίνεται από το tableau

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$$

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = y^2, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

το οποίο έχει την μοναδική λύση $y(t) = \frac{1}{1-t}$ αν $\beta < 1$.

α) Για $\beta = 1/2$ λύστε αριθμητικά το πρόβλημα (1) με την μέθοδο του Heun για $h = \frac{1}{50}$, $h = \frac{1}{100}$, $h = \frac{1}{200}$, κάντε γραφική παράσταση της αριθμητικής και της ακριβούς λύσης (στο ίδιο γράφημα) και βεβαιωθείτε υπολογιστικά ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι 3.

β) Για $\beta = 0.99$ χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `scipy.integrate.solve_ivp` με μέθοδο `RK23` με `atol` $= 10^{-6}$, `rtol` $= 10^{-3}$ και `rtol` $= 10^{-5}$, λύστε αριθμητικά το πρόβλημα (1). Πως μεταβάλλεται με το n το χρονικό βήμα h_n που η μέθοδος επιλέγει; Κάντε γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης του προβλήματος με τη μέθοδο του Heun με $h = 10^{-2}$, με την `RK23` με `rtol` $= 10^{-3}$ και `rtol` $= 10^{-5}$ και συγκρίνετε με την ακριβή λύση.

γ) Πώς συμπεριφέρεται η `RK23` με `rtol` $= 10^{-5}$ και η μέθοδος του Heun με $h = 10^{-3}$ αν πάρουμε $\beta = 0.999,\ \beta = 1$ και $\beta = 1.01$;

2. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο `RK23` με `atol` $= 10^{-6}$ και `rtol` $= 10^{-3}$, να λύσετε αριθμητικά το π.α.τ.

$$\begin{cases} y' = (4-t)^{-2}\cos((4-t)^{-1}), \quad 0 \leq t \leq 3.99, \\ y(0) = \sin\left(\frac{1}{4}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας το ίδιο πλήθος σημείων t^n με την `RK23`, να λύσετε το π.α.τ. με την μέθοδο του Heun και να συγκρίνετε τις δύο αριθμητικές λύσεις με την ακριβή λύση που είναι $y(t) = \sin((4-t)^{-1})$.

3. Θεωρήστε το πρόβλημα ((Κυνηγού - Θηράματος))

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), & \text{με} \quad x(t) = \text{πληθυσμός θηραμάτων} \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) & \qquad\ \ y(t) = \text{πληθυσμός κυνηγών} \end{cases}$$

όπου $a = 1.0,\ b = 0.002,\ c = 10^{-5},\ d = 0.08$ και αρχικές τιμές $x(0) = 20000, y(0) = 500$.

Βεβαιωθείτε αριθμητικά (με την `RK23`) ότι το πρόβλημα έχει περιοδική λύση $(x(t), y(t))$ δηλ. ότι υπάρχει ένα $T > 0$ (να βρεθεί αριθμητικά το μικρότερο τέτοιο T από τις τιμές $x(t), y(t)$, για $t \geq 0$) τέτοιο ώστε $x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t) \quad \forall t \geq 0$.