Μάθημα 14ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I   Στρατής   4/6/2019

Συνάρτηση Green

$Lu = f \quad , \; u = L^{-1} f$

Θέλουμε να γράψουμε τη λύση στη μορφή $u(x) = \int G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$

Έστω

$$\boxed{\alpha_2(x)\, y''(x) + \alpha_1(x) y'(x) + \alpha_0(x)\, y(x) = f(x) \;, \quad (NH)}$$

Παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή :

$\alpha_2(x) y''(x) + \alpha_1(x)\, y'(x) + \alpha_0(x) y(x) = 0 \;, \; (H)$

και έστω $y_H = C_1 \phi_1(x) + C_2 \phi_2(x)$ Γενική λύση της (H) , C_1, C_2 σταθερές.

ϕ_1, ϕ_2 : γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς (H)

$y_p(x)$: Ειδική λύση της (NH) τότε

$y_{NH}(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$y_p(x) = C_1(x)\, \phi_1(x) + C_2(x)\, \phi_2(x) \longrightarrow C_1'(x) = -\dfrac{\phi_1(x) f(x)}{W(\phi_1,\phi_2)(x)} \;, \; C_2'(x) = \dfrac{\phi_2(x) f(x)}{W(\phi_1,\phi_2)(x)}$

Την (NH) μπορούμε να τη φέρουμε στη μορφή

$\dfrac{d}{dx}\left(P(x) \dfrac{dy}{dx}\right) + q(x) y(x) = \tilde{f}(x) \quad (SL)$ έχουμε

$$C_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\tilde{f}(\xi)\phi_1(\xi)}{P(\xi) W(\phi_1,\phi_2)(\xi)}\, d\xi \;, \quad C_2(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{\tilde{f}(\xi)\phi_2(\xi)}{P(\xi) W(\phi_1,\phi_2)(\xi)}\, d\xi$$

$$\text{Τότε } y_{SL}(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) \underbrace{- \phi_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\tilde{f}(\xi)\phi_1(\xi)}{P(\xi)W(\phi_1,\phi_2)(\xi)}\, d\xi + \phi_2(x)\int_{x_1}^{x} \frac{\tilde{f}(\xi)\phi_2(\xi)}{P(\xi)W(\phi_1,\phi_2)(\xi)}\, d\xi}_{\int_{\alpha}^{b} G(x,\xi)\tilde{f}(\xi)\, d\xi}$$

Έστω το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{d}{dx}\left(P(x)\dfrac{dy}{dx}\right) + q(x) y}_{Ly} = f(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

, και έστω

$$\begin{cases} L y_H = 0 \\ y_H(0) = y_0 \\ y_H'(0) = 0 \end{cases}$$ το αντίστοιχο ομογενές

και

$$\begin{cases} L y_p = f \\ y_p(0) = 0 \\ y_p'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y = y_H + y_P \quad , \quad y_p(x) = \int_0^x \overbrace{\boxed{\frac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}}}^{G(x,\xi)} f(\xi)\, d\xi$$

$L\varphi_1 = L\varphi_2 = 0$, φ_1, φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες

$$\tilde{L}y := \alpha_2(x)\, y''(x) + \alpha_1(x)\, y'(x) + \alpha_0(x)\, y(x)$$

$$\tilde{G}(x,\xi) = \frac{\psi_1(\xi)\psi_2(x) - \psi_1(x)\psi_2(\xi)}{\alpha_2(\xi)\, W(\psi_1,\psi_2)(\xi)} \Longrightarrow y(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + \int_0^x \tilde{G}(x,\xi)\, \tilde{f}(\xi)\, d\xi$$

$\psi_1 : \tilde{L}\psi_1 = 0$, $\psi_2 : \tilde{L}\psi_2 = 0$

$\psi_1(0) = 0$, $\psi_2(0) \neq 0$

$\psi_1'(0) \neq 0$, $\psi_2'(0) = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x) , \quad x \in (\alpha, b) \\ y(\alpha) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

Τότε η λύση είναι:

$$y(x) = \int_\alpha^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

όπου

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)}{p(\xi)W(\xi)} , & \alpha \le \xi \le x \\ \dfrac{\varphi_1(x)\,\varphi_2(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)} , & x \le \xi \le b \end{cases}$$

- $G(\alpha,\xi) = 0$
- $G(b,\xi) = 0$
- $G(x,\xi) = G(\xi,x)$

Ιδιότητες

Θεωρώ την $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)\right) + q(x)\, G(x,\xi) = 0$, $x \neq \xi$

συνοριακές συνθήκες
- $G(\alpha,\xi)$ "ανάλογη" της $\varphi_1(\alpha)$
- $G(b,\xi)$ "ανάλογη" της $\varphi_2(b)$

συμμετρία · $G(x,\xi) = G(\xi,x)$

συνέχεια της G για $x=\xi$

$$G(\xi^+,x) = \lim_{x \searrow \xi} G(x,\xi) , \quad x > \xi$$
$$\parallel$$
$$G(\xi^-,x) = \lim_{x \nearrow \xi} G(x,\xi) , \quad x < \xi$$

- ασυνέχεια της $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ για $x = \xi$

$$\frac{\partial G(\xi^+,x)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-,x)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)}$$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 4/6/2019

άλλος τρόπος προσέγγισης

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)\right) + q(x)\,G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

$$Ly = f$$
$$LG = \delta(x-\xi)$$
$$GLy - yLG = f(x)\,G(x,\xi) - \delta(x-y)$$

$$\int_\alpha^b \ldots \qquad y(x) = \ldots$$

ορίζω τον τελεστή

$$Ly := \alpha_2(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y$$

$\alpha_j \in C[\alpha,b]$, $j=0,1,2$ $\quad \alpha_j : [\alpha,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \alpha_2(x) \neq 0$ στο $[\alpha,b]$

$$B_1y := \alpha_{11}y(\alpha) + \alpha_{12}y'(\alpha) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b)$$
$$B_2y := \alpha_{21}y(\alpha) + \alpha_{22}y'(\alpha) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b)$$

$(\alpha_{11},\alpha_{12},\beta_{11},\beta_{12})^{tr} \in \mathbb{R}$ και $(\alpha_{21},\alpha_{22},\beta_{21},\beta_{22})^{tr} \in \mathbb{R}$ γραμμικά ανεξάρτητα

Το πρόβλημά μας είναι

$$\begin{cases} Ly = f(x), & x \in (\alpha,b), \quad f \text{: κατά τμήματα συνεχής στο } [\alpha,b] \\ B_1y_1 = \gamma_1, & \gamma_1 \in \mathbb{R} \\ B_2y_2 = \gamma_2, & \gamma_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightsquigarrow y(x) = \int_\alpha^b G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi + \frac{\gamma_1}{B_2y_1}y_1(x) + \frac{\gamma_2}{B_1y_2}y_2(x)$$

$$G(x,\xi) \qquad \begin{cases} LG = 0 \\ B_1G = 0 = B_2G \qquad G \text{ συνεχής για } x=\xi \\ \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\xi^+} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\xi^-} = \frac{1}{\alpha_2(\xi)} \end{cases}$$

ή θα το γράψω $\begin{cases} LG = \delta(x-\xi) & \alpha < x,\xi < b \\ B_1G = B_2G = 0 \end{cases}$

Θεωρώ το πρόβλημα

$$\begin{cases} Ly = 0 & y_\xi(x) \text{: η λύση} \\ y(\xi) = 0 \\ y'(\xi) = \frac{1}{\alpha_2(\xi)} \end{cases} \qquad \begin{cases} Ly = 0 & y_j(x) \text{ μη τετριμμένη λύση} \\ B_jy = 0 & j=1,2 \end{cases}$$

$$b_{11} y_\xi(b) + b_{12} y_\xi'(b) + \tilde{B} \cdot B_1 y_2 = 0 \qquad \tilde{A}, \tilde{B} : \text{λύσεις}$$
$$b_{21} y_\xi(b) + b_{22} y_\xi'(b) + \tilde{A} \cdot B_2 y_1 = 0$$
$$G(x,\xi) = H(x-\xi) y(x) + \tilde{A} y_1(x) + \tilde{B} y_2(x)$$

$$L: \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \qquad , \quad u = u(\vec{x},t) \qquad , (\vec{x},t) \in \Omega \times (0,\infty) \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$
$$\Downarrow$$
$$Lu = F(\vec{x},t) \qquad , \vec{x} \in \Omega \quad , \quad t \in (0,\infty)$$
$$\left.\begin{array}{l} u(\vec{x},0) = f(\vec{x}) \\ u_t(\vec{x},0) = g(\vec{x}) \end{array}\right\} \vec{x} \in \Omega$$
$$u(\vec{x},t) = 0 \qquad (\vec{x},t) \in \partial\Omega \times (0,t) \qquad \text{αν } \Omega : \text{φραγμένο}$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(\vec{x},t) = 0 \qquad , \quad t > 0 \quad , \quad \text{αν } \Omega \text{ μη φραγμένο}$$

Τύπος Green: $\displaystyle\int_{t_i}^{t_f} \int_\Omega (uLv - vLu)\, d\vec{x}\, dt = \int_\Omega (uv_t - vu_t)\Big|_{t_i}^{t_f} d\vec{x} - \int_{t_i}^{t_f} \left(\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds(\vec{x}) \right) dt$

$$\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \delta(x_1-y_1)\cdot\delta(x_2-y_2)\cdots\delta(x_N-y_N)$$
$$LG(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,\delta(t-t_0)$$
$$G(\vec{x},0;\vec{x}_0,t_0) = 0$$
$$G_t(\vec{x},0,\vec{x}_0,t_0) = 0$$
$$\lim_{|x|\to\infty} G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0) = 0$$

Ιδιότητες

$G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0) = 0 \qquad t < t_0$ (Αρχή της Αιτιότητας)

$G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0) = G(\vec{x}, t-t_0;\vec{x}_0, 0)$ (Αρχή της Μεταφοράς)

$G(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = G(\vec{x}_0,t_0;\vec{x}_1,t_1) \qquad (t_1 > t_0)$ (Αρχή της Αμοιβαιότητας).

Η λύση του προβλήματος
$$u(\vec{x},t) = \int_0^t \int_\Omega G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0) F(\vec{x}_0,t_0)\, d\vec{x}_0\, dt - \int_\Omega \left[g(\vec{x}_0) G(\vec{x},t,\vec{x}_0,0) - f(\vec{x}_0) G_{t_0}(\vec{x},t,\vec{x}_0,0)\right] d\vec{x}_0$$

$$\begin{cases} LG_{fs}(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,\delta(t-t_0) \\ G_{fs}(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = 0 \qquad t < t_0 \end{cases}$$

G_{fs}: Η συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου (free space)

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 4/6/2019

$$G_{ts}(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\vec{\xi}|} e^{-i\vec{\xi}(\vec{x}-\vec{x}_0)} \sin\left(|\vec{\xi}|(t-t_0)\right) d\vec{\xi}$$

Για $N=1$ $G_{ts}(x,t;x_0,t_0) = \begin{cases} 0 & , |x-x_0| > t-t_0 \\ 1/2 & , |x-x_0| < t-t_0 \end{cases} = \frac{1}{2}\left[H(x-x_0+(t-t_0)) - H(x-x_0-(t-t_0))\right]$

Για $N=3$ σφαιρικές συντεταγμένες : ρ, φ, θ

$\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) = |\vec{\xi}||\vec{x}-\vec{x}_0|\cos\varphi$ $\quad \xi := |\vec{\xi}|$

$\rho = |\vec{x}-\vec{x}_0|$

$d\vec{\xi} = |\vec{\xi}|^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\xi$ $\quad ds(\vec{\xi}) = \xi^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$

$G_{ts}(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}\delta(|\vec{x}-\vec{x}_0| - (t-t_0))$ "υστερημένη"

Για $N=2$

$$G_{ts}(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{((t-t_0)^2 - |\vec{x}-\vec{x}_0|^2)^{1/2}} & , |\vec{x}-\vec{x}_0| < t-t_0 \\ 0 & , |\vec{x}-\vec{x}_0| > t-t_0 \end{cases}$$