Μάθημα 10ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   7/5/2019

Μετασχηματισμός Laplace

$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$

Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace

$(\mathcal{L}f)(s) = F(s) := \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$: γραμμικός μετασχηματισμός

Θεώρημα (Ύπαρξης Μετασχηματισμού)

Αν f κατά τμήματα συνεχής στο $[0,\infty)$ και f εκθετικής τάξης τέτοια ώστε $\exists$ σταθερές $c,\alpha>0$: $|f(t)|\le c\cdot e^{\alpha t}$, $t\in(0,\infty)$

Τότε $\exists\ (\mathcal{L}f)(s)\quad \forall\ s>\alpha$

Συνέλιξη: $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,dt$

$\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$

Παράγωγος: $\mathcal{L}(f'(t)) = s\,F(s) - f(0)$

$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$

$\vdots$

$u=u(x,t) \qquad (\mathcal{L}u)(x,s)\equiv U(x,s)$

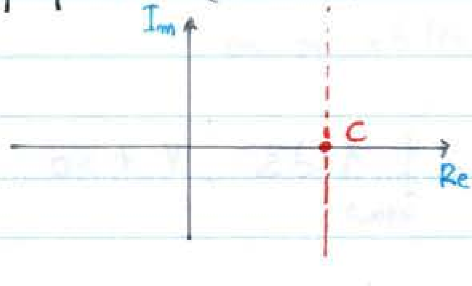
$\mathcal{L}(u_t) = s\,U(x,s) - u(x,0)$

$\mathcal{L}(u_{tt}) = s^2\cdot U(x,s) - s\cdot u(x,0) - u_t(x,0)$

$\mathcal{L}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$

$\mathcal{L}(u_{xx}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$

Αντίστροφος: $(\mathcal{L}^{-1}F(t)) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,e^{st}\,ds \longrightarrow \lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}$



Παράδειγμα: $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & , x>0, t>0 \\ u(0,t) = f(t) & , t>0 \\ u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad x \longrightarrow \infty & t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

κάνω Laplace

$U''(x,s) - (s/c)^2 U(x,s) = 0 \qquad : U(x,s) = c_1(s) e^{s/c\, x} + c_2(s) e^{-s/c\, x}$

$\left.\begin{array}{l} U(0,s) = F(s) \\ U(x,s) \to 0 \ , x \to \infty \implies c_1(s) = 0 \end{array}\right\} \implies c_2(s) = F(s)$

Άρα $U(x,s) = F(s) e^{-x/c\, s}$

Υπάρχει τύπος: $\mathcal{L}(\underset{\text{Heviside}}{H(t-b)}\, g(t-b)) = e^{-bs} G(s)$, b: σταθερά $s>0$

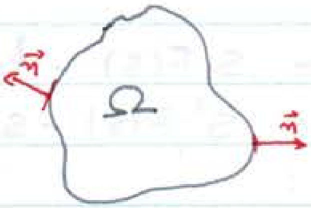
Άρα $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) e^{-\frac{x}{c}s}\} = H(t-\frac{x}{c}) f(t-\frac{x}{c}) = \begin{cases} f(t - x/c) & , x<ct \\ 0 & , x>ct \end{cases}$

Τύπος Green

$u, v \in C^2(\Omega)$,

Ω ανοικτό και φραγμένο στον $\mathbb{R}^n$

με C^1-σύνορο



1^{os} $\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds$

2^{os} $\int_\Omega Du\, Dv\, dx = -\int_\Omega v \Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds \qquad (D = \nabla = \text{grad})$

3^{os} $\int_\Omega (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$

Πολικές συντεταγμένες

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, συνεχής μετρίσιμη με $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$

- $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f\, ds \right) dr, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0,r)} f\, dx \right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f \cdot ds \ , \forall r>0$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στράτης 7/5/2019

$x \in \mathbb{R}^n,\ r>0$ $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y|\le r\}$

$\partial B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y|=r\}$

Όγκος της $B(x,r) = Vol(B(x,r)) = \dfrac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)} = \begin{cases} (\pi^k \cdot r^{2k})/k!, & n=2k \\ (2\cdot(4\pi)^k k!\, r^{2k+1})/(2k+1)!, & n=2k+1 \end{cases}$

$Vol(B(0,1)) = \alpha(n)$

Εμβαδό της επιφάνειας της $\partial B(0,1) := \overset{\text{Surface Area}}{S.A}(\partial B(0,1)) = n\cdot\alpha(n)$

$Vol(B(x,r)) = \alpha(n)\, r^n$

$S.A(\partial B(x,r)) = n\,\alpha(n)\, r^{n-1}$

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$: Μέσοι όροι

$$⨍_{B(x,r)} f(y)dy := \frac{1}{Vol(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{\alpha(n) r^n}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy$$

$$⨍_{\partial B(x,r)} f(y)ds(y) := \frac{1}{S.A(B(x,r))}\int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y) = \frac{1}{n.\alpha(n) r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} f(y)\,dS(y)$$

$n=3 \rightsquigarrow Vol(B(x,r)) = \frac{4}{3}\pi r^3,\quad S.A.(B(x,r)) = 4\pi r^2$

$$⨍_{B(0,r)} f(y)dy = \frac{3}{4\pi r^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} f(p,\varphi,\theta)\, p^2 \sin\varphi\, dp\, d\theta\, d\varphi$$

$$⨍_{\partial B(0,r)} f(y)dy = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$$

Παράδειγμα: (1) $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & (c=1,\ u(x,t) = v(x, c/t)) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

σταθεροποιούμε ένα $x\in\mathbb{R}^n$ και για $r>0$ ορίζουμε : $\bar{u}(x;r,t) := ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)ds(y)$

για $r=0$ ορίζουμε : $\bar{u}(x;r,t) := u(x,t)$

για $r<0$ ορίζουμε : $\bar{u}(x;r,t) := \bar{u}(x;-r,t)$

Αν η u "ομαλή" περιμένουμε ότι θα ισχύει $\lim_{r\to 0^+} \bar{u}(x,r,t) = u(x,t)$

Θεωρούμε ότι η u είναι λύση του (1) και αναζητώ ποιά εξίσωση ικανοποιεί η $\bar{u}$ θεωρούμενη ως συνάρτηση των r,t

Για ΜΟΝΕΣ (χωρικές) διαστάσεις.

Πρόταση: Αν η u είναι λύση του (1) τότε η $\bar{u}$ είναι λύση του ΠΑΤ

$$\bar{u}_{tt} - \left(\bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r}\bar{u}_r\right) = 0, \quad r>0,\ t>0 \qquad \text{(Euler-Poisson-Darboux)}$$

$$\bar{u}(x;r,0) = \bar{\varphi}(x;r) = \fint_{\partial B(x,r)} \varphi(y)\,ds(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\bar{u}_t(x;r,0) = \bar{\psi}(x;r) = \fint_{\partial B(x,r)} \psi(y)\,ds(y)$$

Παρατήρηση: Το $\bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r}\bar{u}_r$, είναι το ακτινικό μέρος της $\Delta\bar{u}$ σε πολικές συντεταγμένες.
Αυτή η διαδικασία λέγεται των Σφαιρικών Μέσων

Απόδειξη:

$$\bar{u}(x;r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,ds(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)\,ds(z)$$

$$\bar{u}_r(x;r,t) = \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t)\cdot z\,ds(z) = \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t)\,\frac{y-x}{r}\,ds(y) =$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial n}(y,t)\,ds(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial n}(y,t)\,ds(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\,dy =$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy \implies \boxed{r^{n-1}\cdot\bar{u}_r(x;r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy}$$

όμως $\left(r^{n-1}\bar{u}_r(x;r,t)\right)_r \overset{\text{πολικές}}{=} \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,ds(y) = \frac{r^{n-1}}{n\alpha(n)\cdot r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,ds(y) =$

$$= r^{n-1}\fint_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,ds(y) = r^{n-1}\bar{u}_{tt}(x;r,t)$$

$$\implies (n-1)r^{n-2}\cdot\bar{u}_r + r^{n-1}\bar{u}_{rr} = r^{n-1}\bar{u}_{tt}(x;r,t) \implies \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{rr} - \frac{n-1}{r}\bar{u}_r = 0$$

Euler-Poisson Darboux

και $\bar{u}(x;r,0) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,0)\,ds(y) = \fint_{\partial B(x,r)} \varphi(s)\,ds(y) = \bar{\varphi}(x;r)$

Παράδειγμα: Λύση της για $\mathbb{R}^3$

$\bar{u}(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,ds(y)$

Ορίζω $V(x;r,t) := r\cdot\bar{u}(x;r,t)$

$g(x;r) := r\cdot\bar{\varphi}(x;r)$

$h(x;r) := r\,\bar{\psi}(x;r)$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 7/5/2019

Λήμμα: Η $v(x;r,t)$ είναι λύση του μονοδιάστατου Π.Α.Σ.Τ ($\forall x \in \mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0 & , r>0 \ , t>0 \\ v(x;r,0) = g(x;r) & \\ v_t(x;r,0) = h(x,r) & \Big\} \ r>0 \\ v(x,0,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη:

- $v_{tt} = r\bar{u}_{tt} = r\left(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{u}_r\right) = r\cdot\bar{u}_{rr} + 2\bar{u}_r = (r\bar{u}_r + \bar{u})_r = (r\cdot\bar{u})_{rr} = v_{rr}$

- $v(x;r,0) = r\cdot\bar{u}(x,r,0) = r \fint_{\partial B(x,r)} u(y,0)\,ds(y) = r\cdot \fint_{\partial B(x,r)} \varphi(y)\,ds(y) = r\bar{\varphi}(x;r) = g(x,r)$

όμοια η άλλη συνθήκη

- $v(x,0,t) = 0\cdot\bar{u}(x,0,t) = 0$