Μάθημα 9º ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 16/4/2019

$$(*)\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & 0<x<L,\ t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & x\in[0,L] \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & ,t\geq 0 \end{cases}$$

Υπάρχει το πολύ μια (κλασσική) λύση $\left(E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (w_t^2 + c^2 w_x)dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow E(t)=0, w=u_1-u_2\right)$

Άσκηση: Δείξτε ότι υπάρχει το πολύ μια λύση για το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & 0<x<L,\ t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & x\in[0,L] \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u_x(0,t) - 2u_t(0,t) = g(t) & t\geq 0 \\ u_x(L,t) + 3u_t(L,t) = h(t) & \end{cases}$$

Έστω το πρόβλημα (*). Ορίζω $V := u_t$ και το γράφω στη μορφή

$$\begin{cases} U_t + AU = F \\ U(x,0) = \Phi(x) \end{cases} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},\ \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο ΠΑΤ

και η λύση $U(x,t) = S(t)\Phi(x) + \int_0^t S(t-s)F(x,s)ds$

$S(t)$: Επιλύων τελεστής του ομογενούς. Γράφω $S(t)\Phi = \begin{pmatrix} S_1(t)\Phi \\ S_2(t)\Phi \end{pmatrix}$

Τότε η λύση του ΠΑΣΤ είναι

$$u(x,t) = S_1(t)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^t S_1(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) & ,\ 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & x\in[0,\pi] \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t\geq 0 \end{cases}$$

Θεωρώ το ομογενές πρόβλημα

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{xx} = 0 \\ V(x,0) = \varphi(x) \\ V_t(x,0) = \psi(x) \\ V(0,t) = V(\pi,t) \end{cases}$$

Η λύση του (από χωριζόμενων μεταβλητών) είναι

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\varphi(x)dx$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx)\psi(x)dx$$

Ο επιλύων τελεστής του ομογενούς ΠΑΣΤ είναι

$$S_1(t)\binom{\varphi}{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin x$$

$$\downarrow$$

$$S_1(t-s)\binom{\varphi}{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n(s)\cos(n(t-s)) + D_n(s)\sin(n(t-s))\right)\sin(nx)$$

όπου $C_n(s) = 0$

$$D_n(s) = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin(nx) f(x,s)\,dx \quad \text{για} \quad 0 \le s \le t$$

άρα $u(x,t) = V(x,t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} D_n(s)\sin(n(t-s))\sin(nx)\, ds$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < L, \ t \ge 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u(0,t) = g(t) & t \ge 0 \\ u(L,t) = h(t) & \end{cases}$$

μη ομογενής συνοριακή συνθήκη Dirichlet

Αν $g(t) = h(t) \equiv 0$ ξέρουμε τη λύση.

Θεωρούμε $u(x,t) = v(x,t) + \tilde{u}(x,t)$ $(v = u - \tilde{u})$, τότε έχουμε

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 V_{xx} = f(x,t) - \tilde{u}_{tt} + c^2\tilde{u}_{xx} =: \tilde{f}(x,t) \\ V(x,0) = \varphi(x) - \tilde{u}(x,0) =: \tilde{\varphi}(x) \\ V_t(x,0) = \psi(x) - \tilde{u}_t(x,0) =: \tilde{\psi}(x) \\ V(0,t) = g(t) - \tilde{u}(0,t) \\ V(L,t) = h(t) - \tilde{u}(L,t) \end{cases}$$

Θα επιλέξω την $\tilde{u}$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xx} = 0 \\ \tilde{u}(0,t) = g(t) \\ \tilde{u}(L,t) = h(t) \end{cases} \longrightarrow \tilde{u}(x,t) = \frac{1}{L}(h(t) - g(t))x + g(t)$$

και έτσι η εύρεση του $V(x,t)$ είναι εύκολο να γίνει, από ήδη γνωστά

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 16/4/2019

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = g_0 \text{ σταθερό} \\ u(L,t) = h_0 \text{ σταθερό} \end{cases}$$

Τότε η $\hat{u}(x,t) = \tilde{u}(x)$ και εφαρμόζω τα ίδια

Άσκηση Εξοικίωσης:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \pi^2 \sin(\pi x) \quad , \; 0<x<1 \; , t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \pi \\ u_t(x,0) = 2\pi \sin(2\pi x) \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier

$u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Ορίζω $(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$

$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) = u(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi) \cdot e^{-i\xi x} d\xi$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

1. ο $\mathcal{F}$ είναι γραμμικός
2. Αν u απολύτως ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \exists \, \hat{u}$
3. Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$
4. Υποθέτουμε u ομαλή $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\lim_{|x|\to 0} [x u(x)] = 0 \Rightarrow \hat{u}'(\xi) = -i\xi \cdot \hat{u}(\xi)$

   $\lim_{|x|\to 0} [x^2 u(x)] = 0 \Rightarrow \hat{u}''(\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi)$ και γενικά $\hat{u}^{(m)}(\xi) = (-i\xi)^m \hat{u}(\xi)$
5. Κλάση του Schwartz

   $\mathcal{S} := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}) : |u^{(k)}(x)| = O(\frac{1}{|x|^N}) , \; x \to \infty \quad k=0,1,2,\dots , \; \forall N \in \mathbb{N} \}$

   - $u \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}$
   - $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}) = \hat{u}$, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u) = u$
   - $u, v \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(u * v)(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$ και $(u*v)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi))$, όπου $(u*v)(x) := \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)v(y)\, dy}$ συνέλιξη

$u(x,t)$: Ορίζω $(\mathcal{F}u)(\xi,t) \equiv \hat{u}(\xi,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\xi x} dx$

$(\mathcal{F}u_x)(\xi,t) = -i\xi \hat{u}(\xi,t) \qquad (\mathcal{F}u_t)(\xi,t) = \hat{u}_t(\xi,t)$

$(\mathcal{F}u_{xx})(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t) \qquad (\mathcal{F}u_{tt})(\xi,t) = \hat{u}_{tt}(\xi,t)$

Παράδειγμα:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , x \in \mathbb{R},\ t>0$

$u(x,0) = g(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = 0$

με $u(x,t) \to 0$, $u_x(x,t) \to 0$ καθώς $x \to \pm\infty$, $t>0$.

Μετασχηματισμός Fourier στο ΠΑΤ

$\hat{u}''(\xi,t) + c^2\xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \quad t>0 \quad , \xi$ σταθερά : συνήθης διαφορική εξίσωση

Η λύση της είναι

$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(c\xi t) + c_2(\xi)\sin(c\xi t)$

με αρχικές συνθήκες $\hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi)$ και $\hat{u}'(\xi)=0$ $\Rightarrow$ $c_1(\xi) = \hat{g}(\xi)$, $c_2(\xi) = 0$

Επομένως $\hat{u}(\xi,t) = \hat{g}(\xi)\cos(c\xi t) = \hat{g}(\xi)\frac{1}{2}\left(e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}\right)$

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)\cos(c\xi t)e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)\left(e^{-i\xi(x-ct)} + e^{-i\xi(x+ct)}\right)d\xi = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right)$$

Στο $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , x\in\mathbb{R}, t>0 \qquad \hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(c\xi t) + c_2(\xi)\sin(c\xi t)$

$u(x,0) = g(x)\ ,\ x \in \mathbb{R} \quad \to \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi)$

$u_t(x,0) = h(x) \qquad \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{h}(\xi)$

άρα $c_1(\xi) = \hat{g}(\xi)$, $c_2(\xi) = \hat{h}(\xi)/c\xi$

αν ορίσουμε $q(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\tau)d\tau \implies \hat{q}(\xi) = \frac{1}{i}\frac{\hat{P}(\xi)}{\xi}$

Άσκηση:

Να αποδειχθεί η ασυμπτωτική ισοκατανομή της ενέργειας με τη χρήση μετασχηματισμών Fourier (στον $\mathbb{R}^1$)