<u>Πολυδείκτες</u> (συμβολισμός L. Schwartz)

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha \leq \beta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_j \leq \beta_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$$

$$\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Για επαρκώς ομαλές συναρτήσεις η σειρά παραγώγισης δεν παίζει ρόλο.

$$k \in \mathbb{N} : \ D^k := \{ D^\alpha : |\alpha| = k \}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$: ανοιχτό

$u : \Omega \to \mathbb{R}$: άγνωστη συνάρτηση

$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$: δεδομένη συνάρτηση

ΜΔΕ k-τάξης : $F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$ (*)

① Γραμμική ΜΔΕ

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

② Quasilinear

$$\sum_{|\alpha| = k} \underbrace{a_\alpha(D^{k-1} u(x), \dots, u(x), x)} D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u(x), \dots, u(x), x) = 0$$

Τίποτα από τα προηγούμενα:

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ λύση της (*)
- αν $u \in C^k(\Omega)$ (k φορές παραγωγ… με συνεχή k-παράγωγο)
- η u ικανοποιεί την (*)

Γραμμικές ΜΔΕ $2^{ης}$ τάξης

$$F(D^2u, Du, u, x) := A(x)\cdot D^2u + b(x)\cdot Du + c(x)u - f(x)$$

$c : \Omega \to \mathbb{R}$, $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A(x)\cdot D^2u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$ (εσωτ. γινομ. στον $\mathbb{R}^{n^2}$)

$$b(x)\cdot Du = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$ (εσωτ. γινομ. στον $\mathbb{R}^n$)

$u \in C^2(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $b_i \in C^1(\Omega)$, $c \in C(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad (+)$$

→ Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός · αν όχι μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με τον (συμμετρικό) $A^s := \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Αφού ο A είναι λοιπόν πραγματικός και συμμετρικός, είναι διαγωνιοποιήσιμος : $\exists$ μετασχηματισμός συντεταγμένων $T(x)$ έτσι ώστε ο $T(x)A(x)T^T(x)$ είναι διαγώνιος, με στοιχεία $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Η κατάταξη της ΜΔΕ (+) γίνεται με βάση τις ιδιοτιμές του $A(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Έστω P το πλήθος των γνήσια θετικών ιδιοτιμών και

(1) ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ στο $x \in \Omega$

$Z_1 = 0$ και είτε $P = 1$, ή $P = n-1$

(Αν $Z_1 = 0$ και $1 < P < n-1$: ULTRA-ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ)

(2) ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ στο $x \in \Omega$

$Z_1 = 1$ και είτε $P = 0$, ή $P = n-1$ $\Leftrightarrow$ $A(x)$: θετικά ημιορισμένος, όχι θετικά ορισμένος, και $\operatorname{rank}(A(x), b(x)) = n$

(3) ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ στο $x \in \Omega$

$Z_1 = 0$ και είτε $P = 0$, ή $P = n$ $\Leftrightarrow$ $A(x)$: θετικά ορισμένος ($\forall\, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : w^T A w > 0$)

Παραδείγματα

Υ : $u_{tt} - \Delta u = 0$ κυματική

Π : $u_t - \Delta u = 0$ διάχυσης ή θερμότητας

Ε : $\Delta u = 0$ Laplace

Μορφή Απόκλισης : $D \cdot (A(x) D u) + b(x) \cdot D u + c(x) u = 0$

συχνά ″—″

(συνηθέστερη γραφή : $\operatorname{div}(A(x) \nabla u) + \cdots$)

Φυσικά μια μ.δ.ε. σε μορφή απόκλισης μπορεί πάντα να γραφεί σε μορφή μη-απόκλισης:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[b_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} \right]}_{\boxed{\tilde{b}_i(x)}} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u$$

$\boxed{2 \text{ μεταβλητών}}$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + q u = f$$

a, b, c, d, e, q, f συναρτήσεις των x, y

$$b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 & \text{ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ} \\ = 0 & \text{ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ} \end{cases}$$