Μάθημα 13ο ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 6/6/2019

Άσκηση: Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\Delta u = 1$ και $|u(x)| \leq k(1+|x|^{3/2})$ για κάποιο $k>0$.

Υπόδειξη. χρησιμοποιείστε τις ανισώσεις Cauchy ανώτερης τάξης: αν η V είναι αρμονική στο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ τότε για κάθε μπάλα $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$ και κάθε πολυδείκτη α ισχύει:

$$|D^\alpha v(x_0)| \leq \frac{c}{r^{n+|\alpha|}} \int_{B(x_0,r)} |v(y)|\,dy$$

Λύση:

$x=(x_1,x_2,x_3)$ Θέτουμε $V(x) = u(x) - \frac{x_1^2}{2}$. Τότε $V(x)$ αρμονική.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Έστω $r>0$. Έστω $\alpha \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^3$

Τότε $|D^\alpha v(x_0)| \leq \frac{c}{r^{3+|\alpha|}} \int_{B(x_0,r)} |v(y)|\,dy$

Έστω $y \in B(x_0,r)$. Τότε

$$|v(y)| \leq |u(y)| + y_1^2/2 \leq k(1+|y|^{3/2}) + y_1^2/2 \leq k^*(1+|y|^2)$$
$$\leq k^*(1+(|x_0|+r)^2)$$

Άρα $|D^\alpha v(x_0)| \leq \frac{c}{r^{3+|\alpha|}} k^*(1+(|x_0|+r)^2) \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \xrightarrow{r\to\infty} 0$ αν $|\alpha| \geq 3$

Άρα $D^\alpha v(x_0) = 0$ $\forall\, \alpha$ με $|\alpha|\geq 3$ και $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^3$

Άρα $v(x)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

Άρα $u(x)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

Λόγω της $|u(x)| \leq k(1+|x|^{3/2})$ η u δεν είναι 2ου βαθμού, άρα έχει βαθμό το πολύ 1.

Άρα $\Delta u = 0$. Άτοπο.

Άσκηση: Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \alpha$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \beta$, η u λύση του

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u = g(x) \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $u(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\alpha+\beta}{2}$

Λύση:

Έχουμε ότι $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy$ όπου

$\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}$

Έστω $x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $x - y = -y^*$ τότε $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y^*,t)\,(x+y^*)\, dy^* =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y^*,t)\, g_x(y^*)\, dy^*$ όπου $g_x(y) = g(x+y)$

Ισχύει $g_x(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} \alpha$, $g_x(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \beta$

Άρα αρκεί να θεωρήσουμε $x=0$, οπότε

$u(0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y,t)\, g(y)\, dy$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε αν $y < -M$ τότε $|g(y) - \alpha| < \varepsilon$

και αν $y > M$ τότε $|g(y) - \beta| < \varepsilon$

Τότε $u(0,t) = \int_{-\infty}^{-M} \Phi(y,t)\, g(y)\, dy + \int_{-M}^{M} \Phi(y,t)\, g(y)\, dy + \int_{M}^{\infty} \Phi(y,t)\, g(y)\, dy$

Άρα

$\frac{\alpha}{2} = \int_{-\infty}^{0} \Phi(y,t)\, \alpha\, dy$, $\frac{\beta}{2} = \int_{0}^{+\infty} \Phi(y,t)\, \beta\, dy$

Άρα $u(0,t) - \frac{\alpha+\beta}{2} = \int_{-\infty}^{0} \Phi(y,t)\,(g(y)-\alpha)\, dy + \int_{0}^{\infty} \Phi(y,t)\,(g(y)-\beta)\, dy = I_1(t) + I_2(t)$

Θα δείξουμε ότι $I_2(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

παίρνουμε $\varepsilon > 0$, $M > 0$, όπως πιο πάνω

$|I_2(t)| \le \int_0^M \Phi(y,t)\, |g(y) - \beta|\, dy + \varepsilon \int_M^{\infty} \Phi(y,t)\, dy$

Έστω $N = \sup_{\mathbb{R}} |g|$ τότε

$|I_2(t)| \le (N + |\beta|) \int_0^M \Phi(y,t)\, dy + \varepsilon$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^M \Phi(y,t)\, dy \xrightarrow{t\to\infty} 0$

έχουμε

$$0 \le \int_0^M \Phi(y,t)\, dy = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^M \underbrace{e^{-\frac{y^2}{4t}}}^{\le 1} dy \le M\,(4\pi t)^{-1/2} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & , \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & t = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy \\ u(\cdot,t) = \Phi(\cdot,t) * g \\ u = \Phi * g \end{array}$$

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 6/6/2019

Ανισότητα Young

$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ όπου $1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

Άσκηση: Να βρεθούν όλες οι ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ για τις οποίες $\Delta^2 u = 0$.

Λύση:

Στο $\mathbb{R}^n$, αν $u(x) = f(|x|)$ τότε $\Delta u(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$, $r=|x|$

$\rightsquigarrow u(x) = C_1 + C_2 |x^{2-n}|$, $f(r) = C_1 + C_2 r^{2-n}$

Άρα $(\Delta^2 u)(x) = \left[f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) \right]'' + \frac{n-1}{r} \left[f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) \right]'$

έχουμε

$$\left(\frac{f'(r)}{r} \right)' = \frac{f''(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^2}$$

άρα

$$\left(\frac{f'(r)}{r} \right)'' = \frac{f'''(r)}{r} - \frac{f''(r)}{r^2} - \frac{f''(r)}{r^2} + 2\frac{f'(r)}{r^3} = \frac{f'''(r)}{r} - 2\frac{f''(r)}{r^2} + 2\frac{f'(r)}{r^3}$$

Άρα

$$(\Delta^2 u)(x) = f^{(4)}(r) + (n-1)\left[\frac{f'''(r)}{r} - 2\frac{f''(r)}{r^2} + 2\frac{f'(r)}{r} \right] + \frac{n-1}{r}\left[f'''(r) + (n-1)\left(\frac{f''(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^2} \right) \right]$$

$$= f^{(4)}(r) + 2(n-1)\frac{f'''(r)}{r^2} + (n-1)(n-3)\frac{f''(r)}{r^2} - (n-1)(n-3)\frac{f'(r)}{r^3}$$

Για $n=3$ θέλουμε $f^{(4)}(r) + 4\frac{f'''(r)}{r} = 0$

Θέτουμε $f''' = g \Rightarrow g' + 4\, g/r = 0 \Rightarrow g(r) = C_1 r^{-4} \Rightarrow f'''(r) = C_1 \cdot r^{-4}$

$\Rightarrow f''(r) = -\frac{C_1}{3} r^{-3} + C_2 \Rightarrow f'(r) = \frac{C_1}{6} r^{-2} + C_2 r + C_3 \Rightarrow$

$$f(r) = -\frac{C_1}{6} r^{-1} + \frac{C_2}{2} r^2 + C_3 r + C_4 = k_1 r^{-1} + k_2 r^2 + k_3 r + k_4$$