Μάθημα 12ο ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 30/5/2019

Ορισμός. Έστω Ω χωρίο στον $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο $\partial_* \Omega_T = \{(x,t) \in \partial \Omega_T : x \in \partial \Omega \text{ ή } t=0\}$ ονομάζεται παραβολικό σύνορο του Ω_T.

Θεώρημα (ασθενής και ισχυρή αρχή μεγίστου)
Έστω Ω φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ λύση της εξίσωσης θερμότητας στο Ω_T. Τότε
$M = \max\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \max\limits_{\partial_* \Omega_T} u$

Επιπλέον, αν $\exists$ $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ τέτοιο ώστε $u(x_0,t_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}_T} u$, τότε η u είναι σταθερή στο Ω_{t_0}. Όμοια και για το min.

Απόδειξη:
Έστω ότι υπάρχει $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ τέτοιο ώστε $u(x_0,t_0) = M$.
Έστω $r>0$ ώστε $E(x_0,t_0,r) \subset \Omega_T$. Τότε

$$M = u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0,r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2} u(y,s)\,dy\,ds \le \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0,r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2} M\,dy\,ds = M$$

άρα $u(y,s) = M$ στο $E(x_0,t_0,r)$.
Έστω ευθύγραμμο τμήμα $L \subset \Omega_T$ με άκρα (x_0,t_0) και (y_0,s_0) όπου $s_0 < t_0$. Θα δείξουμε ότι $u = M$ στο L.
Έστω αντίθετα ότι δεν είναι. Θέτουμε
$s_1 = \min\{ s,\ s \ge s_0 \text{ και } u(x,t) = M \text{ για όλα τα } (x,t) \in L \text{ με } s \le t \le t_0\}$
Τότε από τον προηγούμενο ισχυρισμό
$u(x,t) = M$ για $(x,t) \in L$ και $s_0 - \varepsilon \le t \le t_0$. Άτοπο.
Θα δείξουμε ότι $u(x,t) = M$ στο Ω_{t_0}.
Έστω Ω κυρτό. Έστω $(x,t) \in \Omega_{t_0}$, $t \le t_0$. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα L με άκρα (x,t), (x_0,t_0) περιέχεται στο Ω_T.
Άρα $u = M$ στο L, άρα $u(x,t) = M$.
Έστω Ω μη κυρτό. Θεωρούμε σημεία $x_1, x_2, \dots, x_n = x$ τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[x_{k-1}, x_k] \subset \Omega$. Θεωρούμε χρόνους $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_n = t$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο διαδοχικά στο $[(x_0,t_0), (x_1,y_1)]$, στο $[(x_1,y_1), (x_2,y_2)]$ κ.ο.κ.

Παρατηρήσεις: (1) $\min \partial_* \Omega_T \le u(x,t) \le \max \partial_* \Omega_T \quad \forall (x,t) \in \Omega_T$

(2) Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & , x \in \Omega, \ 0<t<T \\ u(x,0) = g(x) & , x \in \Omega \\ u(x,t) = h(x,t) & , x \in \partial\Omega, \ 0<t\le T \end{cases} \quad \Big\} \text{ θα πρέπει } g(x) = h(x,0)$$

έχει το πολύ μια λύση $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$

$$\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad , x \in \mathbb{R}^n \quad , t>0$$

Λήμμα: $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = 1$

Θεώρημα: Έστω $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(*) \begin{cases} u_t = \Delta u & , x \in \mathbb{R}^n, t>0 \\ u(x,0) = g(x) & , x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Έχει μοναδική φραγμένη λύση, η οποία είναι

$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy$

Απόδειξη:

Μοναδικότητα παραλείπεται

Θα δείξω ότι η $u(x,t)$ είναι λύση του $(*)$

Παραγωγίζοντας κάτω από το ολοκλήρωμα έχουμε

$u_t - \Delta u = \iint_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t(x-y,t) - \Delta \Phi(x-y,t)]\, g(y)\, dy = 0.$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$

Έστω $M>0$ τέτοιο ώστε $|g(x)| \le M$. Έστω $\varepsilon>0$

Υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $|y-x_0|<\delta$ τότε $|g(y)-g(x_0)| < \varepsilon/2$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x_0)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(g(y)-g(x_0))\, dy \Big| \\ &\le \int_{|y-x_0|<\delta} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|\, dy + \int_{|y-x_0|>\delta} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|\, dy \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης   30/5/2019

Έχουμε $I_1 \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{|y-x_0|<\delta} \Phi(x-y,t)\,dy < \varepsilon/2$

$$I_2 \le 2M(4\pi t)^{-n/2}\int_{|y-x_0|>\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy$$

Έστω $y : |y-x_0|>\delta \Rightarrow |x-y| \ge |y-x_0| - |x-x_0| = \frac{|y-x_0|}{2}+\frac{|y-x_0|}{2} - |x-x_0|$

και $|x-x_0|\le \delta/2$ $\quad > \frac{|y-x_0|}{2}+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2} = \frac{|y-x_0|}{2}$

Άρα για $|x-x_0|\le\delta/2$

$$I_2 \le 2M(4\pi t)^{-n/2}\int_{|y-x_0|>\delta} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\,dy = 2M(4\pi t)^{-n/2} b_n\int_\delta^\infty e^{-s^2/16t}s^{n-1}\,ds = F(\delta,t)$$

Θα δείξω ότι για σταθερό $\delta>0$ $\quad F(\delta,t)\xrightarrow{t\to 0}0$

Θέτουμε $s/\sqrt{t} \to \sigma \qquad ds = \sqrt{t}\,d\sigma$

$$I_2 \le 2M(4\pi t)^{-n/2} b_n \int_{\delta/\sqrt{t}}^\infty e^{-\sigma^2/16}\, t^{\frac{n-1}{2}}\sigma^{n-1}t^{1/2}\,d\sigma = 2M(4\pi)^{-n/2}b_n\int_{\delta/\sqrt{t}}^\infty e^{-\sigma^2/16}\sigma^{n-1}\,d\sigma \xrightarrow{t\to 0} 0$$

Άσκηση: Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\beta$, η u λύση του $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0\\ u=g(x)\end{cases}$

Να δειχθεί ότι $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad u(x,t)\xrightarrow{t\to\infty}\frac{\alpha+\beta}{2}$