Μάθημα 9: ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 9/5/2019

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) \cdot u(x)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο

Ομοιόμορφη ελλειπτικότητα: $\frac{1}{\theta}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\xi_i \xi_j \leq \theta |\xi|^2$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$\left(\Rightarrow \frac{1}{\theta} \leq \alpha_{kk}(x) \leq \theta \quad \forall x \in \Omega \right)$

Υποθέτουμε ότι $c(x) = 0$

Λήμμα. Έστω $u \in C^2(\Omega)$. Αν $Lu < 0$ στο Ω, τότε η u δεν έχει τοπικό μέγιστο στο Ω

Απόδειξη.

Έστω αντίθετα ότι η u έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in \Omega$

Τότε $\nabla u(x_0) = 0$ και $Hess(u)(x_0)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος.

Διαγωνοποιούμε τον πίνακα $\{\alpha_{ij}(x_0)\}$:

Υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ και ορθογώνιος πίνακας $T = \{t_{ij}\}$ ώστε

$\alpha_{ij}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t_{ik} t_{jk}$

Έχουμε τότε

$$Lu(x_0) = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^{n} b_i \underbrace{u_{x_i}(x_0)}_{=0}$$

$$= -\sum_{i,j,k=1}^{n} \lambda_k t_{ik} t_{kj} u_{x_i x_j}(x_0) = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}(x_0) t_{ik} t_{kj} \geq 0 \quad \text{Άτοπο}$$

Θεώρημα (ασθενής αρχή μεγίστου)

Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Αν $Lu \leq 0$ στο Ω, τότε

$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

Απόδειξη.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $v \in C^2(\overline{\Omega})$ τέτοιο ώστε $Lv < 0$ στο Ω

Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $|b_i(x)| \leq M$.

Θεωρούμε $\lambda > M \cdot \theta$ και θέτουμε $v(x) = e^{\lambda x_1}$

Τότε $(Lv)(x) = -\alpha_{11}(x)\lambda^2 e^{\lambda x_1} + b_1(x)\lambda e^{\lambda x_1} = \lambda e^{\lambda x_1}(-\lambda \alpha_{11}(x) + b_1(x))$

$\leq \lambda e^{\lambda x_1}\left(-\frac{\lambda}{\theta} + M\right) < 0$

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε

$L(u+\varepsilon v) = Lu + \varepsilon Lv < 0$

Από το Λήμμα, η $u + cv$ δεν έχει τοπικό μέγιστο στο Ω

άρα $\max\limits_{\bar{\Omega}}(u+\varepsilon v) = \max\limits_{\partial\Omega}(u+\varepsilon v)$

Παίρνουμε $\varepsilon \to 0$ και προκύπτει το ζητούμενο.

Πόρισμα: Αν $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ και $Lu = 0$ τότε

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad , \forall x \in \Omega.$$

Πόρισμα. Έστω Ω φραγμένο και $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ το

π.σ.τ $\begin{cases} Lu = f & , \text{ στο } \Omega \\ u = g & , \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$

έχει το πολύ μια λύση

Παρατήρηση. Η αρχή μεγίστου δεν ισχύει εν γένει αν $C(x) \neq 0$.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$-u'' + u = 0 \qquad \text{σε κάποιο } I \subseteq \mathbb{R}$$

έχει εκτός από τη μηδενική λύση και τις λύσεις $\cos t$ ή $\sin t$

Ορισμός. Λέμε ότι το χωρίο Ω ικανοποιεί τη συνθήκη εσωτερικής μπάλας. αν $\forall x_0 \in \partial\Omega$ υπάρχει ανοικτή μπάλα $B \subset \Omega$ τέτοια ώστε $\bar{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$

(αν Ω είναι C^2 τότε ικανοποιείται)

Λήμμα (Λήμμα συνοριακού σημείου του Hopf)

Έστω Ω φραγμένο χωρίο, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη εσωτερικής μπάλας. Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ τ.ω. $Lu \leq 0$ στο Ω

Αν για το $x_0 \in \partial\Omega$ ισχύει $u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega$

τότε $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) > 0 \qquad \left(\vec{n} = \dfrac{\vec{x_0} - \vec{x_1}}{|\vec{x_0} - \vec{x_1}|} \right)$

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης 9/5/2019

Απόδειξη:

Έστω B η μπάλα της συνθήκης. χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $B = B(r)$ (κέντρο το 0) Θέτουμε

$V(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$ $(\lambda > 0)$

Αφού $u(x_0) > u(x)$ στο Ω. έχουμε $u(x_0) > u(x)$ στο $\partial B(r/2)$

άρα λόγω συμπάγειας, $\exists\ c > 0$ τέτοιο ώστε $u(x_0) - u(x) \geq c$ στη $\partial B(r/2)$

άρα για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό

$u(x_0) - u(x) \geq \varepsilon \cdot V(x)$, στη $\partial B(r/2)$

Θα εφαρμόσουμε την ασθενή αρχή μεγίστου στην

$w(x) = u(x) + \varepsilon \cdot V(x) - u(x_0)$ στο χωρίο $B(r) \setminus \overline{B(r/2)}$

Έχουμε

$V_{x_i}(x) = -2\lambda x_i e^{-\lambda|x|^2}$

$V_{x_i x_j}(x) = 4\lambda^2 x_i x_j e^{-\lambda|x|^2} - 2\lambda \delta_{ij} e^{-\lambda|x|^2}$ άρα

$$Lv(x) = \Big[-\sum_{i,j} a_{ij}(x)(4\lambda^2 x_i x_j - 2\lambda\delta_{ij}) + \sum_i b_i(x)(-2\lambda x_i) \Big] e^{-\lambda|x|^2}$$

$$\leq e^{-\lambda|x|^2} \Big\{ -4\lambda^2 \frac{1}{\theta}|x|^2 + 2\lambda\, tr(a(x)) + 2\lambda |b(x)|\cdot|x| \Big\}$$

για $|x| \in [r/2, r]$

$$\leq e^{-\lambda|x|^2} \Big\{ -\frac{\lambda^2 r^2}{\theta} + 2\lambda\, \overbrace{tr(a(x))}^{\text{φραγμένο}} + 2\lambda |b(x)| r \Big\} \leq 0$$

αν το $\lambda > 0$ είναι αρκετά μεγάλο.

Άρα $Lw = L(u + \varepsilon v - u(x_0)) = Lu + \varepsilon Lv \leq 0$ στο R → ο δακτύλιος που σχηματίζουν οι $B(r/2), B(r)$

Από την ασθενή αρχή μεγίστου έχουμε

$$\max_{\overline{R}} w = \max_{\partial R} w = \max\Big\{ \max_{\partial B(r)} w, \max_{\partial B(r/2)} w \Big\}$$

Το $\varepsilon > 0$ επιλέχθηκε ώστε $w(x) \leq 0$ στο $\partial B(r/2)$

Για $|x| = r$ έχουμε $V(x) = 0$ άρα $w(x) = u(x) - u(x_0) \leq 0$

Άρα $w(x) \leq 0$ στο R

Ισχύει όμως για το $x_0 \in \partial R$ $w(x_0) = 0$.

Άρα $\frac{\partial w}{\partial \vec{n}}(x_0) \geq 0$ Άρα $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) = \frac{\partial w}{\partial \vec{n}}(x_0) - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x_0) \geq -\varepsilon \cdot \nabla v(x_0)\cdot\vec{n}$

$$= -\varepsilon \cdot (-2\lambda\, \vec{x_0} \cdot \vec{x_0}/r) = 2 \cdot \varepsilon\lambda r > 0$$