Μάθημα 7ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης   11/4/2019

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ στο } \Omega \\ u = g & , \text{ στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ φραγμένο}, \quad g \in C(\partial\Omega)$$

$A = \{ u \in C(\bar{\Omega}) : u$ υφαρμονική στο Ω, $u \leq g$ στο $\partial\Omega \}$

Θέτουμε $w(x) = \sup\limits_{u \in A} u(x)$

Πρόταση: Η w είναι αρμονική στο Ω

Απόδειξη:

Θεωρούμε δύο μπάλες $B(\xi,\rho') \subset\subset B(\xi,\rho) \subset\subset \Omega$

Θα δείξουμε ότι η w είναι αρμονική στην $B(\xi,\rho')$

Βήμα 1ο Ισχυρισμός

Για κάθε ακολουθία $(x_k) \subset B(\xi,\rho')$ υπάρχει συνάρτηση W αρμονική στη $B(\xi,\rho)$ ώστε $W(x_k) = w(x_k)$

Έστω λοιπόν $(x_k) \subset B(\xi,\rho')$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Θεωρούμε ακολουθία $(v_{k,i})_i \subset A$ ώστε

$w(x_k) = \lim\limits_i v_{k,i}(x_k)$ (1)

Θέτουμε $V_j(x) = \max\{ m, v_{1,j}(x), v_{2,j}(x), \dots, v_{j,j}(x) \}$ $(m \leq g(x) \leq M)$

Κάθε V_j είναι υφαρμονική και $V_j \leq g$ στο Ω. Άρα $V_j \in A$

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε για $j > k$ έχουμε

$v_{k,j}(x_k) \leq V_j(x_k) \leq w(x_k)$

Άρα από την (1) έχουμε $\lim\limits_j V_j(x_k) = w(x_k)$

Θέτουμε $u_j = (V_j)_{\xi\rho}$

Άρα οι (u_j) είναι αρμονικές στην $B(\xi,\rho)$ και $m \leq u_j \leq M$

Από προηγούμενο Θεώρημα (συμπάγειας) η (u_j) έχει υπακολουθία (θεωρούμε ότι είναι η ίδια η (u_j)) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της $B(\xi,\rho)$.

Αν ονομάσουμε W το όριό της, τότε W αρμονική στη $B(\xi,\rho)$ και $u_j \to W$ ομοιόμορφα στη $B(\xi,\rho')$

Ειδικότερα $u_j(x_k) \xrightarrow[j]{} W(x_k)$ για κάθε k.

Όμως $u_j \in A$, άρα $V_j(x_k) \leq u_j(x_k) \leq w(x_k)$

Ειδικότερα $u_j(x_n) \to w(x_n)$
Άρα $w(x_n) = W(x_n)$
Βήμα 2: Η w είναι συνεχής στην $B(\xi,\rho')$
Έστω λοιπόν $x \in B(\xi,\rho')$ και $(x_n) \subset B(\xi,\rho')$ με $x_n \to x$
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 = x$
Για την (x_n) θεωρούμε την συνάρτηση W του βήματος 1
Τότε $w(x_n) = W(x_n) \longrightarrow W(x) = w(x)$
Άρα w συνεχής στο x
Βήμα 3: Η w είναι αρμονική στη $B(\xi,\rho')$
Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό στη $B(\xi,\rho')$ υποσύνολο $(x_n) \subset B(\xi,\rho')$
Θεωρούμε επίσης την αντίστοιχη W από το βήμα 1. Τότε οι W, w είναι δύο συναρτήσεις συνεχείς στην $B(\xi,\rho')$, οι οποίες συμπίπτουν σε ένα πυκνό υποσύνολο της $B(\xi,\rho')$
Άρα $W = w$ στην $B(\xi,\rho')$ άρα w αρμονική στη $B(\xi,\rho')$

Παρατήρηση: Το πρόβλημα του Dirichlet δεν έχει πάντα λύση
π.χ. έστω $\Omega = B(1) \setminus \{x_0\}$ $(x_0 \in B(1))$.
Τότε $\partial\Omega = \partial B(1) \cup \{x_0\}$
Το πρόβλημα του Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (g \in C(\partial\Omega))$$

γενικά δεν έχει λύση. Για να έχει λύση πρέπει και αρκεί $g(x_0) = v(x_0)$ όπου v η λύση του προβλήματος

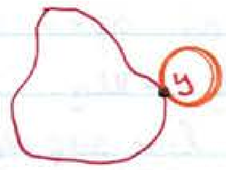
$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{στη } B(1) \\ v = g, & \text{στο } \partial B(1) \end{cases}$$

Ορισμός: Λέμε ότι το φραγμένο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την συνθήκη του εμποδίου, αν για κάθε $y \in \partial\Omega$ υπάρχει συνάρτηση $q_y \in C(\overline{\Omega})$, υφαρμονική στο Ω τέτοια ώστε $q_y(y) = 0$ και $q_y(x) < 0$, $x \in \partial\Omega$, $x \neq y$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης.   11/4/2019

Παρατήρηση: Η συνθήκη εμποδίου ικανοποιείται αν το Ω ικανοποιεί τη συνθήκη εξωτερικής μπάλας:
Για κάθε $y \in \partial\Omega$ υπάρχει μπάλα B τέτοια ώστε $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{y\}$

Η συνθήκη εξωτερικής μπάλας ισχύει για C^2 χωρία



Έστω $y \in \partial\Omega$. Έστω $B(x_0,\rho)$ εξωτερική μπάλα.
Υπάρχει αρμονική, ακτινικά συμμετρική ως προς το x_0 συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x) = \begin{cases} >0 & , \text{ στη } B(x_0,\rho) \\ =0 & , \text{ στο } \partial B(x_0,\rho) \\ <0 & , \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0,\rho)} \end{cases} \qquad \text{π.χ. } f(x) = \begin{cases} c_1|x-x_0|^{2-n}+c_2 & , n\geq 3 \\ c_1 \log|x-x_0| + c_2 & , n=2 \end{cases}$$

Τότε η $g_y(x) = f(x)$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Πρόταση: Αν το Ω ικανοποιεί τη συνθήκη εμποδίου, τότε για κάθε $y \in \partial\Omega$
$\lim\limits_{x\to y} w(x) = g(y)$

Απόδειξη:

Θεωρούμε $\varepsilon, K > 0$ και ορίζουμε $u(x) = g(y) - \varepsilon + K q_y(x)$, $x \in \overline{\Omega}$
Τότε $u \in C(\overline{\Omega})$, u υφαρμονική και

$$\begin{cases} u(y) = g(y) - \varepsilon \\ u(x) < g(y) - \varepsilon & , x \in \partial\Omega, x \neq y \end{cases}$$

Αφού g συνεχής $\exists\, \delta > 0$: αν $x \in \partial\Omega, |x-y|<\delta$ τότε $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$
άρα, αν $|x-y|<\delta$ $(x\in\partial\Omega)$ τότε
$u(x) \leq g(y) - \varepsilon \leq g(x)$. Άρα $u \in A$
άρα $u(x) \leq w(x)$ στο Ω
Άρα $\liminf\limits_{x\to y} w(x) \geq \liminf\limits_{x \to y} u(x) = g(y) - \varepsilon$, αφού ε τυχόν
$\liminf\limits_{x\to y} w(x) \geq g(y)$

Συμβολίζουμε τα A , w με A_g , w_g
και αντίστοιχα θεωρούμε τα A_{-g} , w_{-g}
Ισχυρισμός: Ισχύει ότι $w_g \leq -w_{-g}$ στο Ω
δηλαδή $\sup\limits_{u \in A_g} u(x) \leq -\sup\limits_{\bar{v} \in A_{-g}} \bar{v}(x) = \inf\limits_{\bar{v}\in A_g} (-\bar{v}(x)) = \inf\limits_{-v \in A_{-g}} (v(x))$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u \in A_g$ και $v \in -A_{-g}$ ισχυεί $u(x) \leq v(x)$ στο Ω

Έχουμε $u - v \in C(\bar{\Omega})$ και είναι υφαρμονική στο Ω

και για κάθε $x \in \partial\Omega$ $u(x) - v(v) \leq 0$ $\quad (u(x) \leq g(x)$, $-v(x) \leq -g(x))$

άρα από αρχή μεγίστου $u - v \leq 0$ στο Ω

Άρα $W_g \leq -W_{-g}$

Άρα $\limsup_{x \to y} W_g(x) \leq \limsup_{x \to y} -W_{-g}(x) = -\liminf_{x \to y} W_{-g}(x) \leq -(-g(y)) = g(y)$

Άρα $\lim_{x \to y} W(x) = g(y)$

Θεώρημα: Αν το φραγμένο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ικανοποιεί τη συνθήκη του εμποδίου, τότε το πρόβλημα του Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, για κάθε $g \in C(\partial\Omega)$