ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών
Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (2018-19)
Προβλήματα (ύλη Γ. Μπαρμπάτη)

1. Έστω α_n και β_n ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στο $\mathbb{R}^n$ και το εμβαδόν επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας στο $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι
$$\text{(i)}\quad \beta_n = n\alpha_n \quad , \qquad \text{(ii)}\quad \alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}.$$

2. Να δειχθεί ότι αν $U \subset\subset \Omega$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x-y| \geq \delta$ για κάθε $x \in U$ και $y \in \partial\Omega$.

3. Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο με C^1 σύνορο και έστω $f \in C(\Omega)$ και $g \in C(\partial\Omega)$. Να δειχθεί ότι το πρόβλημα Neumann
$$\begin{cases} \Delta u = f\,, & \text{στο } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g\,, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases}$$
δεν έχει, εν γένει, λύση στο χώρο $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Βρείτε μία αναγκαία συνθήκη για τις συναρτήσεις f και g προκειμένου το πρόβλημα να έχει λύση.

4. (α) Έστω u ακτινικά συμμετρική συνάρτηση, δηλαδή συνάρτηση της μορφής $u(x) = f(r)$, $r = |x|$. Αποδείξτε ότι αν $f \in C^2(0,\infty)$ τότε $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ και ότι η Δu είναι ακτινικά συμμετρική και μάλιστα
$$\Delta u(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)\ .$$
(β) Να βρεθούν όλες οι ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις u που είναι αρμονικές στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Συμπεράνατε ότι αν μία ακτινικά συμμετρική συνάρτηση είναι αρμονική σε όλο το $\mathbb{R}^n$, τότε είναι σταθερή.

5. (i) Να δειχθεί ότι η Λαπλασιανή είναι αναλλοίωτη σε ορθογώνιους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ και S είναι ο γραμμικός τελεστής $(Su)(x) = u(Tx)$, τότε $\Delta S = S\Delta$.
(ii) Συμπεράνατε ότι ο Λαπλασιανός τελεστής Δ δεν εξαρτάται από το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $(x_1, \ldots, x_n)$ που χρησιμοποιείται κατά τον ορισμό του.

6. Έστω u C^2 συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και
$$v(x) = |x|^{2-n} u\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big) \,, \qquad x \neq 0.$$
Δείξτε ότι
$$(\Delta v)(x) = |x|^{-n-2} (\Delta u)\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big),$$
και συμπεράνετε ότι η v είναι αρμονική αν και μόνο αν η u είναι αρμονική (εξάσκηση στις πράξεις!)

7. Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο και $\Omega^* = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} \Delta u = f \,, & \text{στο } \Omega_* \;, \\ u = g \,, & \text{στο } \partial\Omega_* \;, \end{cases}$$
έχει το πολύ μία λύση u τέτοια ώστε $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$.
Υπόδειξη. Εφαρμόστε απαγωγή σε άτοπο και θεωρείστε κατάλληλη μπάλα μεγάλης ακτίνας.

8. Έστω $n \geq 3$, $\beta > \alpha > 0$ και
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \alpha < |x| < \beta\}.$$
Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω και $M(r) = \max_{|x|=r} u$, $r \in [\alpha, \beta]$. Να δειχθεί ότι
$$M(r) \leq \frac{M(\alpha)(r^{2-n} - \beta^{2-n}) + M(\beta)(\alpha^{2-n} - r^{2-n})}{\alpha^{2-n} - \beta^{2-n}} \;, \quad r \in [\alpha, \beta].$$
Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $u(x) - \lambda|x|^{2-n}$ για κατάλληλο $\lambda = \lambda(r)$.

9. Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^n$ και $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx < +\infty$, τότε η u είναι η μηδενική συνάρτηση.
Υπόδειξη. Δείξτε ότι η u είναι σταθερή.

10. Αποδείξτε πως αν η $u \in C^2(\Omega)$ είναι αρμονική και η $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ είναι κυρτή, τότε η σύνθεση $v = \phi(u)$ είναι υφαρμονική, δηλαδή $\Delta v \geq 0$ στο Ω.

11. (i) Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση $u(x)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^n$ τότε και η $v(x) = x \cdot \nabla u(x)$ είναι αρμονική. (ii) Έστω Ω_1 και Ω_2 κυρτά και φραγμένα χωρία στο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $0 \in \Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ και έστω $\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1$. Έστω $u \in C^2(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω και τέτοια ώστε $u = 1$ στο $\partial\Omega_1$ και $u = 0$ στο $\partial\Omega_2$. Να αποδειχθεί χωρίς χρήση του Λήμματος Hopf ότι $\nabla u(x) \cdot x < 0$ στο Ω.

12. Να βρεθούν όλες οι ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ για τις οποίες $\Delta^2 u = 0$.

13. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο. Να δειχθεί ότι το μη-γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμων

$$\begin{cases} \Delta u = u^3\,, & \text{στο } \Omega, \\ u = 0\,, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases}$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση. [Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε μεθόδους ενέργειας]

14. Να δειχθεί ότι η δεν υπάρχει συνάρτηση u ορισμένη στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\Delta u = 1$ και $|u(x)| \leq k(1 + |x|^{3/2})$ για κάποιο $k > 0$. *Υπόδειξη:* χρησιμοποιείστε τις εξισώσεις Cauchy ανώτερης τάξης: αν η u είναι αρμονική στο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ τότε για κάθε μπάλα $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ και κάθε πολυδείκτη α ισχύει

$$|D^\alpha v(x_0)| \leq \frac{c}{r^{n+|\alpha|}} \int_{B(x_0,r)} |v(y)| dy\,.$$