Μάθημα 24ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   3/6/2019

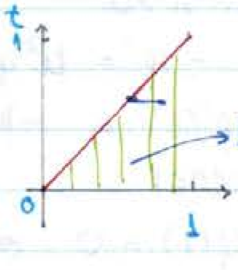
Άσκηση: Να βρεθεί η νόρμα του τελεστή Volterra στον $L^2(0,1)$,
$(Kf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $K^*K = L^{-1}$ για κατάλληλο τελεστή Sturm-Liouville L

Λύση:

Βρίσκουμε τον K^*: Έστω $f, g \in L^2(0,1)$. Τότε

$$\langle Kf, g\rangle = \int_0^1\int_0^x f(t)\,dt\,\bar{g}(x)\,dx = \iint_E f(t)\overline{g(x)}\,dA$$



$$= \int_0^1\int_t^1 f(t)\overline{g(x)}\,dx\,dt = \int_0^1 f(t)\overline{\int_t^1 g(x)\,dx}\,dt$$

Άρα
$$(K^*g)(t) = \int_t^1 g(x)\,dx$$

Άρα $(K^*Kf)(t) = \int_t^1 (Kf)(x)\,dx = \int_t^1\int_0^x f(s)\,ds\,dx$

Για κάθε $f \in L^2(0,1)$, $K^*Kf = L^{-1}f \in D(L)$

Ισχύει $(K^*Kf)(1) = 0$ Άρα $u(1) = 0$, $\forall u \in D(L)$

Επίσης $\frac{d}{dt}(K^*Kf)(t) = -\int_0^t f(s)\,ds$, Άρα $(K^*Kf)'(0) = 0$ δηλαδή
αν $u \in D(L) \Rightarrow u'(0) = 0$.

$u'(t) = -\int_0^t f(s)\,ds \Rightarrow u''(t) = -f(t) \Rightarrow -u'' = f$

Άρα ο L είναι ο $Lu = -u''$ με συνοριακές συνθήκες
$u(1) = u'(0) = 0$.

Άρα $\|K\| = \|K^*K\|^{1/2} = \|L^{-1}\|^{1/2}$ $L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$

Ισχύει $\|L^{-1}\| = \max_n |1/\lambda_n| = \frac{1}{\min_n|\lambda_n|}$ $L^{-1}\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n$

ψάχνουμε τις ιδιοτιμές του L : $L\varphi = \lambda\varphi$ $\varphi \in D(L)$

Άρα πρέπει
$$\begin{cases} -\varphi'' = \lambda\varphi \\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

(i) $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$ $\rightsquigarrow \varphi'' = \mu\varphi \rightsquigarrow \varphi(t) = Ae^{\mu t} + Be^{-\mu t}$

πρέπει $\varphi(1) = 0 \rightsquigarrow Ae^{\mu} + Be^{-\mu} = 0$

πρέπει $\varphi'(0) = 0 \rightsquigarrow \varphi'(t) = \mu Ae^{\mu t} - \mu Be^{-\mu t} \rightsquigarrow 0 = \mu A - \mu B \Rightarrow A = B$

άρα $Ae^{\mu} + Ae^{-\mu} = 0 \Rightarrow A = B = 0$. άρα δεν έχουμε $\lambda < 0$.

(ii) $\lambda = 0$ $\quad \varphi''(t) = 0 \rightarrow \varphi(t) = At + B$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1) = A + B = 0 \\ \varphi'(0) = A = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow A = B = 0$$ άρα ούτε $\lambda = 0$ ιδιοτιμή

(iii) $\lambda > 0$ $\quad \lambda = \mu^2 \ (\mu > 0)$ Τότε

$-\varphi'' = \mu^2 \varphi \sim \varphi(t) = A\cos\mu t + B\sin\mu t$

$\varphi'(t) = -\mu A \sin\mu t + \mu B \cos\mu t$

πρέπει

$\varphi(1) = 0 \Leftrightarrow A\cos\mu + B\sin\mu = 0$

$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0.$

Άρα $\cos\mu = 0 \sim \mu = \mu_n = n\pi - \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, \dots$

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι $\lambda_n = \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$

και $\min\limits_n |\lambda_n| = |\lambda_1| = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$

Άρα $\|K\| = \dfrac{1}{\min\limits_n |\lambda_n|^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}} = \dfrac{2}{\pi}$

Άσκηση: Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Έστω $f, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$, $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ και $g \in H^1(\Omega)$. Ορίστε κατάλληλα την έννοια της ασθενούς λύσης για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \{ a_{ij}(x) u_{x_i} \}_{x_j} = f + \operatorname{div}\vec{F}, & x \in \Omega \\ u = g, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Στη συνέχεια αποδείξτε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης

Λύση:

Είχαμε $A(v, w) = \int \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_{x_i} w_{x_j} \, dx$

Θέτουμε $v = u - g$

Η $u \in H^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση αν

$$\begin{cases} A(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx - \int_\Omega \vec{F}\, \nabla\varphi \, dx & \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Η απόδειξη ύπαρξης μοναδικότητας πάει όπως πριν, αντί του

$\Pi(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle - A(\varphi, g) = \int_\Omega \varphi \bar{f} - \int_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i} \bar{g}_{x_j} \, dx$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 3/6/2019

Θεωρούμε το

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi \bar{f} \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \varphi_{x_i} \bar{g}_{x_j} \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \bar{f}_i \, dx$$

το οποίο επίσης είναι φραγμένο στον $H^1(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \bar{f}_i \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi| \, |\vec{F}| \, dx \leq \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\vec{F}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\vec{F}\|_{L^2(\Omega)}$$