Μάθημα 18ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   8/5/2019

Συνέχεια απόδειξης:

$$I_i = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, dy_i\, d_1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}$$

Άρα ολοκληρώνω ως προς x_2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1\, dx_2 \le I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_2$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} I_2^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_i\, dx_2\right)^{1/n-1} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_2 dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, dx_1 dx_2 dy_i\right)^{1/n-1}$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1\, dx_2 \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1 dx_2\right)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1 dx_2\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε στην: $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx\right)^{\frac{n}{n-1}}$

$\rightarrow$ Το ζητούμενο για $p=1$

Βήμα 2ο $1 < p < n$

Έστω $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ Εφαρμόζουμε το βήμα 1 στην $v = |u|^\gamma \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Έχουμε $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|\, dx$

δηλαδή

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n\gamma}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx \le \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$$

Επιλέγουμε γ τέτοιο ώστε

$$\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1} \rightsquigarrow \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} \rightsquigarrow p^* = np/(n-p)$$

$$\text{Άρα } \left(\int |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = 1/p^*} \le \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{δηλαδή}$$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{p(n-1)}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Άσκηση: Έστω $1 \le p \le n$ και $q \ne p^*$. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ για $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ (ή $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$)

(Υπόδειξη: Θεωρήστε τυχαία $u \ne 0$ και για $\lambda > 0$ $u_\lambda(x) = u(x/\lambda)$)

Άσκηση: Να δειχθεί ότι αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και $\psi \in C^\infty$ τότε η $u\cdot\psi$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και $(u\psi)_{x_n} = u_{x_n}\psi + u\psi_{x_n}$
(Υπόδειξη: Από ορισμό ασθενούς παραγώγου)

Ίχνος

Παρατήρηση: Τα παρακάτω (για τα ίχνη) ισχύουν για κάθε χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο. Θα τα αποδείξουμε μόνο για $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i > 0\}$

Πρόταση: Ο χώρος $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$

Απόδειξη:
Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ επεκτείνουμε την u σε μια άρτια ως προς x_n συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$

$V(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) = u(x_1, \dots, x_n)$ τότε $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$v(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, \dots, x_n), & x_n > 0 \\ u(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

Άρα $\exists\ (v_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοιο ώστε $v_n \longrightarrow v$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Ορίζουμε $u_n = v_n|_{\overline{\mathbb{R}^n_+}} \rightsquigarrow u_n \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ και $u_n \longrightarrow u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$

$$\|u_n - u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(|u-u_n|^p + |\nabla u - \nabla u_n|^p\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(|v-v_n|^p + |\nabla v - \nabla v_n|^p\right) dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\ \dots\ )\, dx = \|v - v_n\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Θεώρημα: Η απεικόνιση του περιορισμού μιας συνάρτησης $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ στο $\partial\mathbb{R}^n_+$ επεκτείνεται σε έναν φραγμένο τελεστή
$$Tr: W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)$$

Απόδειξη:
Αρκεί να δείξω ότι $\forall\ u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ ισχύει $\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$
Έστω λοιπόν $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Γράφουμε το $x \in \mathbb{R}^n_+$ ως $x = (x', x_n)$ όπου $x_n > 0$
$x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Τότε $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ έχουμε

$$|u(x', x_n)|^p = |u(x', 0)|^p + \int_0^{x_n} \frac{d}{dx_n} |u(x_n, t)|^p dt = |u(x', 0)|^p + p\int_0^{x_n} |u(x', t)|^{p-2} u(x', t)\, u_{x_n}(x', t)\, dt$$

Παίρνουμε x' σταθερό και $x_n \longrightarrow +\infty \implies$

$$|u(x', 0)| = -p\int_0^\infty |u|^{p-2} u\, u_{x_n}\, dt \leq p\int_0^\infty |u|^{p-1} |\nabla u|\, dt$$

ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 8/5/2019

$$\Rightarrow \int_{\partial \mathbb{R}^{n-1}} |u(x',0)|^p dx' \leq p \int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p-1} |\nabla u| \, dx \leq p \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

δηλαδή

ανισότητα Young $\alpha b \leq \frac{1}{p} \alpha^p + \frac{p-1}{p} b^{p/p-1}$

$$\|u\|^p_{L^p(\partial \mathbb{R}^n_+)} \leq p \|u\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq p \left[\frac{p-1}{p} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \frac{1}{p} \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \right] \leq C \|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

Ίχνος

Πρόταση: Ισχύει $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+) = \{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) : Tr(u) = 0 \}$

0 στο σύνορο

Απόδειξη:

"$\subseteq$" Έστω $u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$. Τότε $\exists \, (u_n) \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$ με $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$

Προφανώς $Tr(u_n) = 0$

Άρα $Tr(u) = \lim Tr(u) = 0$

"$\supseteq$" Παραλείπεται