Μάθημα 15ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   15/4/2019

Θεώρημα Lax - Milgram

$\rightarrow$ (sesquiliner form)

Ορισμός. Ονομάζουμε $(3/2)$ - γραμμική μορφή στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ μια απεικόνιση $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

(i) $A(\lambda x + \mu y, z) = \lambda A(x,z) + \mu A(y,z)$

(ii) $A(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda} A(x,y) + \bar{\mu} A(x,z)$

Ορισμός: Μια $\frac{3}{2}$ - γραμμική μορφή λέγεται:

(i) φραγμένη αν υπάρχει $\Lambda > 0$ τέτοιο ώστε $|A(x,y)| \leq \Lambda \|x\| \cdot \|y\|$

(ii) ελλειπτική αν υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\operatorname{Re} A(x,x) \geq \lambda \|x\|^2$

Θεώρημα (Lax - Milgram)

Έστω A μια $3/2$ - γραμμική μορφή, ελλειπτική και φραγμένη. Για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\Pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $A(v,u) = \Pi(v)$, $\forall\, v \in \mathcal{H}$.

Επιπλέον η απεικόνιση $\Pi \to u$ είναι συνεχής.

Παρατήρηση: Αν ισχύει επιπλέον $A(x,y) = \overline{A(y,x)}$, τότε το θεώρημα Lax-Milgram είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz

Απόδειξη Θεωρήματος:

Έστω $u \in \mathcal{H}$. Η απεικόνιση $v \to A(v,u)$ $(\mathcal{H} \to \mathbb{C})$, ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathcal{H}$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $w \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε

$A(v,u) = \langle v, w \rangle \quad \forall \; v \in \mathcal{H}$.

Επίσης $\|w\| = \|\Pi_1\| \leq \Lambda \|u\|$

Η απεικόνιση $u \to w$ είναι λοιπόν γραμμική και συνεχής.

Άρα ορίζεται ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής S από τη σχέση $Su = w$. Άρα $A(v,u) = \langle v, Su \rangle \quad \forall\, u, v \in \mathcal{H}$

Έστω λοιπόν Π φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό.

Υπάρχει τότε μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε
$\Pi(v) = \langle v, y \rangle \quad \forall\, v \in H.$

Άρα ζητάμε ύπαρξη και μοναδικότητα $u \in H$ τέτοιο ώστε
$A(v,u) = \langle v, y \rangle \quad \forall\, v \in H$ δηλαδή
$\langle v, Su \rangle = \langle v, y \rangle \quad \forall\, v \in H$ δηλαδή $Su = y$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ο S^{-1} και είναι φραγμένος.

(i) S "1-1"

Έστω $x \in H$ τότε $\lambda \|x\|^2 \leq \operatorname{Re} A(x,x) = \operatorname{Re} \langle x, Sx \rangle \leq \|x\| \|Sx\|$
και άρα $\|Sx\| \geq \lambda \|x\| \quad (*)$

Άρα S 1-1

(ii) S "επί"

Η $(*)$ συνεπάγεται ότι $Ran(S)$ κλειστός υπόχωρος

Έστω $x \in Ran(S)^{\perp}$. Τότε
$\operatorname{Re} \langle \overset{}{Sx}, \overset{=0}{x} \rangle \geq \lambda \|x\|^2$, άρα $x = 0$. Άρα $Ran(S)$ πυκνός υπόχωρος.

Άρα S επί

Άρα S αντιστρέψιμος

Η $(*)$ θέτοντας $y = Sx$ γράφεται $\|S^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\| \Rightarrow S^{-1}$ φραγμένος

Θεώρημα: Έστω A μια φραγμένη, ελλειπτική, $\frac{3}{2}$-γραμμική μορφή για την οποία ισχύει επιπλέον ότι $A(x,y) = \overline{A(y,x)}$.
Έστω Π φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H.
Τότε η συνάρτηση
$$J(u) = \frac{1}{2} A(u,u) - \operatorname{Re} \Pi(u) \quad u \in H$$
έχει ένα μοναδικό ελάχιστο, το οποίο λαμβάνεται στο διάνυσμα u του Θεωρήματος Lax-Milgram

Απόδειξη

Έστω u η λύση από το θεώρημα Lax-Milgram και $v \in H$, τότε.
$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}\left(A(v,v) - A(u,u) \right) - \operatorname{Re} \Pi(v-u) = \frac{1}{2}(A(v,v) - A(u,u)) - \operatorname{Re} A(v-u, u)$$

$$= \frac{1}{2}\left[A(v,v) - A(u,u)\right] - \frac{1}{2}\left(A(v-u,u) + A(u,v-u)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}A(v,v) - \frac{1}{2}A(u,u) - \frac{1}{2}A(v,u) + \frac{1}{2}A(u,u) - \frac{1}{2}A(u,v) + \frac{1}{2}A(u,u) =$$

$$= \frac{1}{2}A(u-v,u-v) \geq \frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2$$

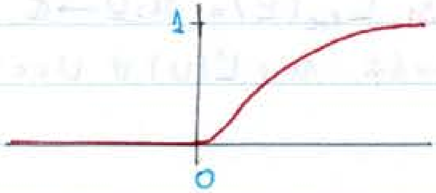
Εφαρμογή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή ανοικτό, συνεκτικό)

Ορισμός. Λέμε ότι το U περιέχεται συμπαγώς στο Ω και γράφουμε $U \subset\subset \Omega$, αν
(i) $\bar{U}$ συμπαγές
(ii) $\bar{U} \subset \Omega$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι αν $U \subset\subset \Omega$ τότε $\exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x-y| \geq \delta \quad \forall\ x \in U,\ y \in \partial\Omega$

Άσκηση: Η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ ανήκει στο $C^\infty(\mathbb{R})$



Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n τέτοιο ώστε
$f^{(n)}(t) = p_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}, \ t > 0.$

Ομαλοποιητές

Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε:
- $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Ορίζω $C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}(u) \subset\subset \Omega\}$. Αν $u \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $\exists\ \delta > 0$: $u = 0$ στο $\Omega \setminus \Omega_\delta$

Ορισμός: Ονομάζουμε φορέα (ή στήριγμα, "support") μιας συνάρτησης $u : \Omega \to \mathbb{C}$ το σύνολο $\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$

Λήμμα: Υπάρχει συνάρτηση $\rho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i) $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii) $Supp(\rho) = \overline{B(1)}$

(iii) $\rho(x) \geq 0$

(iv) ρ ακτινικά συμμετρική δηλαδή $\rho = \rho(|x|)$, (v) $\int_{B(1)} \rho(x)\,dx = 1$

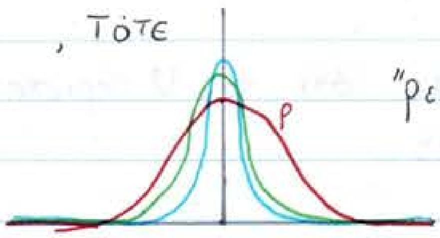
Απόδειξη:

Ορίζουμε $\rho(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases} = c \cdot \overset{\text{f της άσκησης}}{f(1-|x|^2)}$

όπου $c > 0$ τέτοιο ώστε $\int_{B(1)} \rho(x)\,dx = 1$

Παρατηρούμε ότι η ρ αυτή, έχει τις ιδιότητες που θέλουμε

Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$, τότε



"$\rho_\varepsilon \to \delta_0$"

(i) $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii) $supp(\rho_\varepsilon) = \overline{B(\varepsilon)}$

(iii) $\rho_\varepsilon \geq 0$

(iv) ρ_ε ακτινικά συμμετρική

(v) $\int_{B(\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$ $\quad \left(\int_{B(\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int_{|x|<\varepsilon} \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)\,dx \overset{\substack{x=\varepsilon y \\ dx = \varepsilon^n dy}}{=} \int_{|y|<1} \rho(y)\,dy = 1 \right)$

Ορισμός: $L^1_{loc}(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{C},\ u \text{ μετρήσιμη},\ \int_U |u|\,dx < \infty\ \forall\, U \subset\subset \Omega \}$

(δηλαδή $u \in L^1(U)\ \forall\, U \subset\subset \Omega$)