22ο Μάθημα   Ε3. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι   07/01/2019

Αν τώρα θέλουμε να προσθέσουμε ένα επιπλέον σημείο x_{n+1} (στα ήδη υπάρχοντα $x_0, x_1, \dots, x_n$) αυτό απαιτεί δύο υπολογισμούς:

- Να διαιρέσουμε κάθε ένα από τα w_i, $i=0,1,\dots,n$ με τον παράγοντα $x_i - x_{n+1}$ (συνολικά $n+1$ flops)
- Να υπολογίσουμε το $w_{n+1} = \dfrac{1}{\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1}-x_j)}$ ($n+1$ flops)

Άρα συνολικά $O(n)$ flops, δηλαδή ίδια τάξη πράξεων με αυτές που χρειάζεται η μέθοδος του Νεύτωνα.

Αν τώρα παρεμβάλλουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$, έχουμε

$$1 = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{w_i}{x-x_i}$$

Αν τώρα διαιρέσουμε την (21_1) με την παραπάνω έκφραση, απαλείφεται το $\omega(x)$ και παίρνουμε

$$p_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{w_i}{x-x_i}f(x_i)}{\sum_{i=0}^{n}\frac{w_i}{x-x_i}} \qquad (21_2)$$

Αυτή, σύμφωνα με τον Rutishauer, είναι η "δεύτερη (αληθής) μορφή του βαρυκεντρικού τύπου" και είναι αυτή που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη. Η προσθήκη ενός επιπλέον σημείου γίνεται όπως προηγουμένως.

3.6 Τύπος του Newton

Ένας άλλος τρόπος παράστασης των πολυωνύμων παρεμβολής $p_n(x) = p_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ $n = 0,1,2,\dots$ είναι ο ακόλουθος

$p_0(x) = \alpha_0$,

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \alpha_n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad , n = 1,2,\dots \qquad (22)$$

Έτσι, το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \alpha_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \qquad (23)$$

ονομάζεται πολυώνυμο παρεμβολής του Newton. Οι σταθερές $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις συνθήκες της παρεμβολής

$p_n(x_i) = f(x_i)$ $i = 0,1,\dots,n$

$\alpha_0 = f(x_0)$

$$\alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \implies \alpha_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$\alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f(x_2) \Rightarrow \alpha_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$\vdots$

Επομένως, το α_m είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$ με συντελεστές που εξαρτώνται από τα $x_0, x_1, \dots, x_m$.

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\alpha_m = [x_0, x_1, \dots, x_m] f, \quad m = 0, 1, 2, \dots \qquad (24)$$

και ονομάζουμε το δεξιό μέλος τη m-οστή διαιρεμένη διαφορά της συνάρτησης f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_m$. Το όνομα "διαιρεμένη διαφορά" προέρχεται από την ακόλουθη πολύ χρήσιμη ιδιότητα

$$[x_0, x_1, \dots, x_k] f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k] f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] f}{x_k - x_0} \qquad (25)$$

Για να αποδείξουμε την (25) ορίζουμε τα πολυώνυμα

$r(x) = p_{k-1}(f; x_1, x_2, \dots, x_k; x)$

$s(x) = p_{k-1}(f; x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x)$

Τότε,

$$p_k(f; x_0, x_1, \dots, x_k; x) = r(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[r(x) - s(x)] \qquad (26)$$

Πράγματι το πολυώνυμο στα δεξιά της (26) είναι βαθμού $\leq k$ και παίρνει τη σωστή τιμή $f(x_i)$ στα x_i, $i = 0, 1, \dots, k$

Για παράδειγμα, για $i \neq 0$ και $i \neq k$, έχουμε

$$r(x_i) + \frac{x_i - x_k}{x_k - x_0}[r(x_i) - s(x_i)] = f(x_i) + \frac{x_i - x_k}{x_k - x_0}(f(x_i) - f(x_i)) = f(x_i),$$

για $i = 0$, $$r(x_0) + \frac{x_0 - x_k}{x_k - x_0}[r(x_0) - f(x_0)] = f(x_0)$$

για $i = k$, $$r(x_k) + \frac{x_k - x_k}{x_k - x_0}[r(x_k) - s(x_k)] = f(x_k)$$

Έτσι, ο (26) ισχύει λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής.

Αν τώρα εξισώσουμε τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων στα δύο μέλη της (26) παίρνουμε την (25)

Ε3. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι 07/01/2019

Ο τύπος (25) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία του πίνακα διαιρεμένων διαφορών

x	f				
x_0	$f(x_0)=[x_0]f$	$=\alpha_0$			
x_1	$f(x_1)=[x_1]f$	$[x_0,x_1]f$	$=\alpha_1$		
x_2	$f(x_2)=[x_2]f$	$[x_1,x_2]f$	$[x_0,x_1,x_2]f$	$=\alpha_2$	
x_3	$f(x_3)=[x_3]f$	$[x_2,x_3]f$	$[x_1,x_2,x_3]f$	$[x_0,x_1,x_2,x_3]f$	$=\alpha_3$
$\vdots$					

Παράδειγμα:

x	f				
0	3	$=\alpha_0$			
1	4	$\frac{4-3}{1-0}=1$	$=\alpha_1$		
2	7	$\frac{7-4}{2-1}=3$	$\frac{3-1}{2-0}=1$	$=\alpha_2$	
4	19	$\frac{19-7}{4-2}=6$	$\frac{6-3}{4-1}=1$	$\frac{1-1}{4-0}=0$	$=\alpha_3$

$$p(x)=3+1(x-0)+1(x-0)(x-1)+0(x-0)(x-1)(x-2)=3+x+x^2-x=3+x^2$$

3.7 Παρεμβολή με τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις (splines)

Στην κλασσική πολυωνυμική παρεμβολή, όταν θέλουμε να αυξήσουμε την ακρίβεια, αυξάνουμε το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής.

Σημειώνουμε τα εξής:

- Η πολυωνυμική παρεμβολή δεν συγκλίνει για συνεχείς συναρτήσεις. (Βλέπε παράδειγμα 3, με $n=7$, στο σφάλμα της παρεμβολής)
- Για λίγα σημεία σε μικρό διάστημα, η προσέγγιση είναι καλή.

• Αν $f\in C^2[\alpha,b]$ και $x_0=\alpha$, $x_1=b$, $h=b-\alpha$:

$$\|f-p_1\|_\infty \le \frac{(b-\alpha)^2}{8}\|f''\|_\infty = \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$$

• Αν $f\in C^3[\alpha,b]$ και $x_0=\alpha$, $x_1=\frac{\alpha+b}{2}$, $x_2=b$, $h=\frac{b-\alpha}{2}$

$$\|f-p_2\|_\infty \le \frac{(b-\alpha)^3}{96}\|f'''\|_\infty = \frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty$$

• Αν $f \in C^4[\alpha, b]$ και $x_0 = \alpha$, $x_1 = \alpha + h$, $x_2 = \alpha + 2h$, $x_3 = b$, $h = \frac{b-\alpha}{3}$

$\|f - p_3\|_\infty \le \frac{(b-\alpha)^4}{1296} \|f^{(4)}\|_\infty = \frac{h^4}{96} \|f^{(4)}\|_\infty$