21º Μάθημα — Ε3. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι — 19/12/2018

3.4 Πολυώνυμα του Chebyshev και σημεία παρεμβολής

Θέλουμε να βρούμε σημεία παρεμβολής που ελαχιστοποιούν το σφάλμα στην παρεμβολή και ειδικότερα το γινόμενο $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, δηλαδή

$$\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| = \min$$

(min-max πρόβλημα) Θα κινηθούμε στο $[a,b]=[-1,1]$ και θα χρειαστούμε τα πολυώνυμα του Chebyshev (πρώτου είδους), τα οποία μπορούν να οριστούν με τον ακόλουθο τρόπο

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad , \; T_n \in \mathbb{P}_n.$$

Η απόδειξη στηρίζεται στην τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \cos(k+1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta \qquad (13)$$

Επαγωγικά τώρα αποδεικνύεται ότι αν το $\cos n\theta$ είναι ένα πολυώνυμο, βαθμού n, για όλα τα $n\le k$, το ίδιο ισχύει και για το $n=k+1$. Ταυτόχρονα η (13) δίνει

$$T_{k+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cdot T_k(\cos\theta) - T_{k-1}(\cos\theta)$$

$$\overset{\cos\theta = x}{\Longleftrightarrow} T_{k+1}(x) = 2x\,T_k(x) - T_{k-1}(x) \qquad k=1,2,\ldots \qquad (14)$$

$$T_0(x)=1\,,\quad T_1(x)=x$$

Έτσι,
$$T_2(x) = 2x^2-1$$
$$T_3(x) = 4x^3-3x$$
$$T_4(x) = 8x^4-8x^2+1,$$
$$\vdots$$

Τα πολυώνυμα αυτά ορίζονται για οποιοδήποτε πραγματικό ή μιγαδικό x. Αλλά, στο διάστημα $[-1,1]$ ικανοποιούν την (12)

Οι ρίζες $x_k^{(n)}$ του πολυωνύμου T_n μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά

$$T_n(x)=0 \Leftrightarrow T_n(\cos\theta)=0 \Leftrightarrow \cos n\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$n\theta = \frac{(2k-1)\pi}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

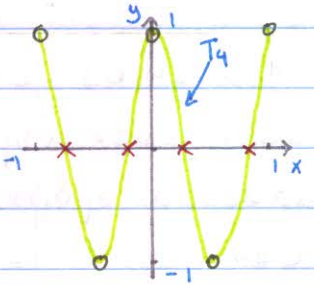
Άρα $$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \;, \quad k=1,2,\ldots,n \qquad (15)$$

Όλες οι ρίζες είναι πραγματικές, διακριτές και περιέχονται στο ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$

Από την (12) φαίνεται ότι όταν $0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq \cos\theta \leq 1$ το $T_n(x)$ κινείται μεταξύ -1 και 1, παίρνοντας τις τιμές αυτές στα σημεία

$$T_n(y_k^{(n)}) = (-1)^k \Rightarrow T_n(\cos \eta_k^{(n)}) = (-1)^k \Rightarrow \cos n\eta_k^{(n)} = (-1)^k$$

$$\Rightarrow n \cdot \eta_k^{(n)} = k\pi \Rightarrow \eta_k^{(n)} = k\pi/n \Rightarrow y_k^{(n)} = \cos \frac{k}{n}\pi \quad , k = 0, 1, \ldots, n \qquad (16)$$



Από την (14) είναι προφανές ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $T_n(x)$ είναι 2^{n-1} (για $n \geq 1$). Έτσι μπορούμε το πολυώνυμο

$$\mathring{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \quad n \geq 1 \quad , \quad \mathring{T}_0(x) = T_0(x) \qquad (17)$$

Τώρα, η χρησιμότητα (και ως ένα σημείο η σημαντικότητα) των πολυωνύμων του Chebysev (πρώτου είδους) οφείλεται στο επόμενο

Θεώρημα: Για ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο $\mathring{p}_n$, βαθμού n, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου μονάδα, ισχύει

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\mathring{p}_n(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |\mathring{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad , n \geq 1 \qquad (18)$$

Απόδειξη

Κατ' αρχήν

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\mathring{T}_n(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n-1}} \quad , n \geq 1$$

Η απόδειξη της ανισότητας είναι με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\mathring{p}_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Τότε, το πολυώνυμο $d_n(x) = \mathring{T}_n(x) - \mathring{p}_n(x)$, βαθμού $\leq n-1$ ικανοποιεί

$$d_n(y_0^{(n)}) = \mathring{T}_n(y_0^{(n)}) - \mathring{p}_n(y_0^{(n)}) = \frac{1}{2^{n-1}} - \mathring{p}_n(y_0^{(n)}) > 0$$

$$d_n(y_1^{(n)}) = \mathring{T}_n(y_1^{(n)}) - \mathring{p}_n(y_1^{(n)}) = -\frac{1}{2^{n-1}} - \mathring{p}_n(y_1^{(n)}) < 0, \quad (19)$$

$$\vdots$$

$$d_n(y_{n-1}^{(n)}) = \mathring{T}_n(y_{n-1}^{(n)}) - \mathring{p}_n(y_{n-1}^{(n)}) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \mathring{p}_n(y_{n-1}^{(n)}) \Rightarrow \operatorname{Sign} d_n(y_{n-1}^{(n)}) = (-1)^{n-1},$$

$$\operatorname{Sign} d_n(y_n^{(n)}) = (-1)^n$$

Έτσι, το d_n αλλάζει πρόσημο, το λιγότερο n φορές και επομένως έχει, το λιγότερο n διακριτές πραγματικές ρίζες. Άρα, $d_n(x)=0$, άτοπο λόγω (19)

Δεδομένου ότι στον τύπο του σφάλματος της παρεμβολής το γινόμενο $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$ με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, αν τα $\hat{x}_i^{(n)}$ είναι οι ρίζες του $\mathring{T}_{n+1}(x)$, δηλαδή

$$\hat{x}_i^{(n)} = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi, \quad i=0,1,\dots,n$$

Τότε η (9) δίνει

$$\|f(\cdot) - p_n(f;\cdot)\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\frac{1}{2^n} \quad (20)$$

Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$p_n(f, \hat{x}_0^{(n)}, \hat{x}_1^{(n)}, \dots, \hat{x}_n^{(n)}, x) \longrightarrow f(x) \quad \text{καθώς } n\to\infty,$$

ομοιόμορφα στο $[-1,1]$, υπό την προϋπόθεση ότι $f\in C^1[-1,1]$.

3.5 Βαρυκεντρικός τύπος (Barycentric formula)

Το πολυώνυμο στη μορφή Lagrange γράφεται

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i),$$

όπου $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=0,1,\dots,n$

Είναι τα στοιχειώδη πολυώνυμα του Lagrange

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

και ορίζουμε τα βαρυκεντρικά βάρη

$$w_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}, \quad i = 0, \ldots, n$$

Οπότε $\quad l_i(x) = \omega(x) \dfrac{w_i}{x - x_i} \quad i = 0, 1 \ldots, n$

και $\quad p_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \dfrac{w_i}{x - x_i} f(x_i)$

Σύμφωνα με τον Rutishauser αυτή είναι η "πρώτη μορφή" του βαρυκεντρικού τύπου παρεμβολής.