

3.2 Σφάλμα της παρεμβολής

Για το σφάλμα της παρεμβολής ισχύει ο τύπος

$$f(x) - p_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad x \in [\alpha, b], \quad \alpha < \xi(x) < b, \quad (9)$$

υπό την προϋπόθεση ότι $f \in C^{n+1}[\alpha, b]$

Μια κομψή απόδειξη, οφειλόμενη στον Cauchy, έχει ως εξής:

Σταθεροποιούμε $x \in [\alpha, b]$, $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (για $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

η απόδειξη είναι τετριμμένη) και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(t) - p_n(f, t) - \frac{f(x) - p_n(f, x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \prod_{i=0}^n (t - x_i), \quad t \in [\alpha, b]$$

Κατ' αρχήν, εφόσον $f \in C^{n+1}[\alpha, b]$, $n F \in C^{n+1}[\alpha, b]$

Επιπλέον, $F(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $F(x) = 0$

Έτσι, $n F$ έχει (τουλάχιστον) $n+2$ διακριτές ρίζες στο $[\alpha, b]$

Εφαρμόζοντας επανειλημμένως το θεώρημα του Rolle, βρίσκουμε

Η F' έχει το λιγότερο $n+1$ διακριτές ρίζες στο (α, b)

Η F'' έχει το λιγότερο n διακριτές ρίζες στο (α, b)

⋮

Η $F^{(n+1)}$ έχει το λιγότερο 1 διακριτή ρίζα στο (α, b)

Εφόσον $n F^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$

Έστω $\xi(x)$ μια ρίζα του $F^{(n+1)}$. Τότε $\alpha < \xi(x) < b$. Τώρα,

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - p_n(f, x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)!$$

$$\Rightarrow 0 = F^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - \frac{f(x) - p_n(f, x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)! \Rightarrow$$

$$f(x) - p_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \text{Σημάδι } n \text{ (9)}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο δείχνουμε ότι το $\xi(x)$ βρίσκεται στο εσωτερικό

1

του μικρότερου διαστήματος που περιέχει τα x_0, x_1, \dots, x_n, x ($= \text{supp}(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$)

Παραδείγματα

1) Γραμμική Παρεμβολή ($n=1$)

Έστω $x_0 \leq x \leq x_1$, δηλαδή $[a, b] = [x_0, x_1]$ και $h = x_1 - x_0$. Τότε

$$f(x) - p_1(f, x) = (x-x_0)(x-x_1) \frac{f''(\xi)}{2}, \quad x_0 < \xi < x_1 \quad \text{και}$$

$$\|f(\cdot) - p_1(f, \cdot)\|_\infty \leq \frac{M_2}{8} h^2, \quad M_2 = \|f''\|_\infty$$

Έτσι, σε μικρά διαστήματα μικρούς h , το σφάλμα είναι της τάξης $O(h^2)$

2) Τετραγωνική Παρεμβολή ($n=2$) με ισαπέχοντα σημεία

$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ Έχουμε για $x_0 \leq x \leq x_2$, δηλαδή $[a, b] = [x_0, x_2]$

Έχουμε $f(x) - p_2(f, x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{f'''(\xi(x))}{6}, \quad x_0 \leq \xi(x) \leq x_2$ και

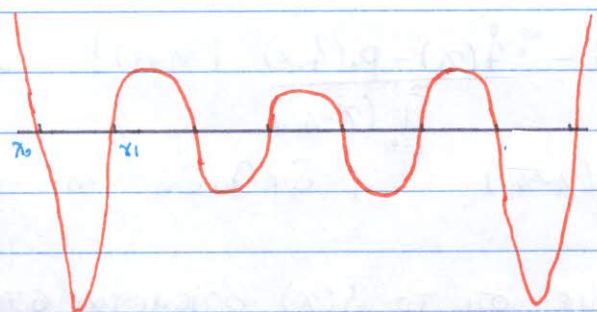
$$\|f(\cdot) - p_2(f, \cdot)\|_\infty \leq \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3, \quad M_3 = \|f'''\|_\infty$$

Έτσι για μικρά υποδιαστήματα μικρούς h , το σφάλμα είναι της τάξης $O(h^3)$

3) Παρεμβολή με $n+1$ ισαπέχοντα σημεία $x_i = x_0 + ih, i=0, 1, \dots, n$

Όταν το h είναι μικρό και $x_0 \leq x \leq x_n$, το $\xi(x)$ είναι περιορισμένο σ' ένα μικρό διάστημα και το $f^{(n+1)}(\xi(x))$ δεν μεταβάλλεται και πολύ

Έτσι η συμπεριφορά του σφάλματος εξαρτάται κυρίως από το γινόμενο $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$. Η γραφική του παράσταση για $n=7$ έχει ως εξής



Ε3. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι

12/12/2018

Η γραμμική παράσταση είναι συμμετρική ως προς το σημείο $\frac{x_0+x_m}{2}$ και υποδεικνύει ότι η παρεμβολή πρέπει να αποφεύγεται σε σημεία που είναι κοντά στα άκρα του διαστήματος $[x_0, x_m]$. Επιπλέον, δημιουργούνται κάποιες αμφοβολίες για το κατά πόσο η διαδικασία της παρεμβολής συχθίνει καθώς το $n \rightarrow \infty$

3.3 Σύγκλιση της παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν τριγωνικό πίνακα σημείων παρεμβολής $x_i = x_i^{(m)}$, $i=0,1,\dots,m$, $m=0,1,2,\dots$ τα οποία περιέχονται στο διάστημα $[a,b]$

$x_0^{(0)}$					p_0
$x_0^{(1)}$	$x_1^{(1)}$				p_1
$x_0^{(2)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$			p_2
\vdots					\vdots
$x_0^{(m)}$	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	\dots	$x_m^{(m)}$	p_m
\vdots					

(10)

Για κάθε n , $p_n(x) = p_n(x, x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$, $x \in [a,b]$. Λέμε ότι η παρεμβολή κατά Lagrange συχθίνει αν $p_n(x) \rightarrow f(x)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$, ομοιόμορφα για όλα τα $x \in [a,b]$

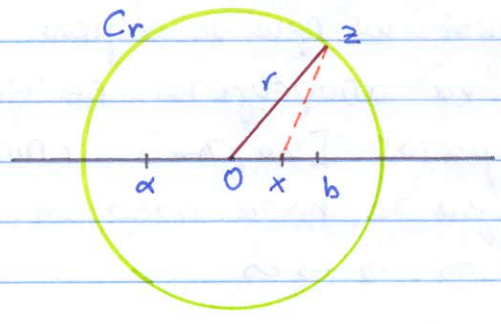
As υποθέσουμε ότι $f \in C^\infty[a,b]$ και ότι $|f^{(k)}(x)| \leq M_k, a \leq x \leq b, k=0,1,2,\dots$
 τότε: $|f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!} |(x-x_0^{(n)})(x-x_1^{(n)}) \dots (x-x_n^{(n)})|$
 $\leq \frac{(b-a)^{n+1} \cdot M_{n+1}}{(n+1)!}, x \in [a,b]$

Επομένως, έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση (για κάθε $x \in [a,b]$) αν $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^k M_k}{k!} = 0$ (11)

Αν η f είναι αναλυτική στον κλειστό δίσκο C_r με κέντρο του διαστήματος $[a,b]$ και αντίστοιχα r αρκετά μεγάλο και βίβουρα

2

$r > \frac{1}{2}(b-\alpha)$ ώστε $[\alpha, b] \subset C_r$



Ο τύπος του Cauchy δίνει $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial C_r} \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}} dz, x \in [\alpha, b]$.

Παρατηρώντας ότι

$$|z-x| = \left| z - \frac{\alpha+b}{2} + \frac{\alpha+b}{2} - x \right| \geq \left| z - \frac{\alpha+b}{2} \right| - \left| \frac{\alpha+b}{2} - x \right| \geq r - \frac{1}{2}(b-\alpha)$$

βρίσκουμε

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{2\pi} \oint_{\partial C_r} \frac{|f(z)|}{|z-x|^{k+1}} dz \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{\left[r - \frac{1}{2}(b-\alpha)\right]^{k+1}} \oint_{\partial C_r} dz = M_k$$

$$\Rightarrow M_k = \frac{r \max_{|z|=r} |f(z)|}{r - \frac{1}{2}(b-\alpha)} \cdot \frac{k!}{\left[r - \frac{1}{2}(b-\alpha)\right]^k}$$

Έτσι η (1) ισχύει όταν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{b-\alpha}{r - \frac{1}{2}(b-\alpha)} \right]^k = 0$$

$$\text{Σημειώνω } b-\alpha < r - \frac{1}{2}(b-\alpha) \Leftrightarrow r > \frac{3}{2}(b-\alpha)$$

Ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα, ως προς την περιοχή στην οποία $n \neq$ πρέπει να είναι αναλυτική, είναι το ακόλουθο:

Έστω $d\mu(t)$ είναι η κατανομή (στο όριο) των σημείων παρεμβολής, δηλαδή

$$\int_{\alpha}^x d\mu(t), \quad \alpha < x \leq b,$$

είναι ο λόγος του αριθμού των $x_i^{(n)}$ στο διάστημα $[\alpha, x]$ προς τον συνολικό αριθμό τους, $n+1$, ασυμπτωτικά καθώς $n \rightarrow \infty$.

Για παράδειγμα, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο διάστημα $[\alpha, b]$, τότε $d\mu(t) = dt/(b-\alpha)$.

Θεωρούμε την καμπύλη $u(z) = \gamma$, $u(z) = \int_{\alpha}^z \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$, όπου γ είναι μια σταθερή. Για μεγάλα αρνητικά γ , οι καμπύλες αυτές μοιάζουν με κύκλους με μεγάλες ακτίνες και κέντρο το $\frac{\alpha+b}{2}$. Καθώς το γ αυξάνεται, οι καμπύλες "συρρικνώνονται" γύρω από το διάστημα $[\alpha, b]$.

Έστω $\Gamma = \sup \gamma$, όπου το supremum λαμβάνεται σε όλες τις καμπύλες $u(z) = \gamma$ που περιέχουν το $[\alpha, b]$ στο εσωτερικό τους. Αντικαθιστώντας το C_r με την περιοχή

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : u(z) \geq \Gamma\}$$

μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $n \neq$ είναι αναλυτική σε μια οποιαδήποτε περιοχή που περιέχει το C_r στο εσωτερικό της (οσοδήποτε κοντά και αν καλύπτει αυτή το C_r), τότε

$$|f(z) - p_n(f; z)| \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } n \rightarrow \infty, \text{ ομοιόμορφα για όλα τα } z \in C_r$$

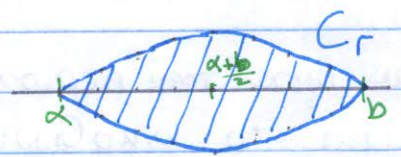
V.I. Krylov, Approximate Calculation of Integrals, Dover 2005

Παραδείγματα

1 Ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία παρεμβολής

$$d\mu(t) = \frac{dt}{b-\alpha}, \quad \alpha \leq t \leq b. \quad \text{Στην περίπτωση αυτή η περιοχή } C_r \text{ έχει την}$$

ακόλουθη μορφή.



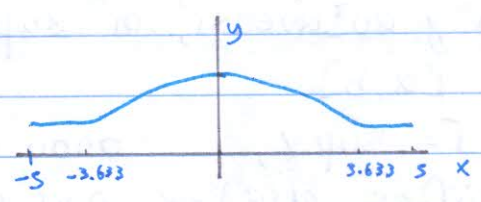
2) Κατανομή τύπου arc sine

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Εδώ τα σημεία της παρεμβολής είναι πιο πυκνά κατανεμημένα κοντά στα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$. Σε αυτή την περίπτωση, $C_r = [-1, 1]$, έτσι η παρεμβολή Lagrange συχνώνει ομοιόμορφα στο $[-1, 1]$ αν η f είναι "αναλυτική στο $[-1, 1]$ ", δηλαδή σε μια περιοχή, αδιάφορο πόσο "λεπτή" είναι, αρκεί να περιέχει στο εσωτερικό της το $[-1, 1]$.

3) Παράδειγμα του Range

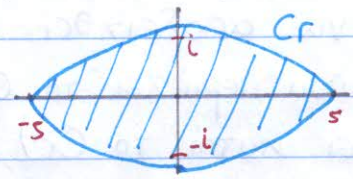
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$$



$$x_k^{(m)} = -5 + k \frac{10}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

Τα σημεία παρεμβολής είναι ισαπέχοντα επομένως ομοιόμορφα κατανεμημένα.

Η f έχει πόλους στα $z = \pm i$. Οι πόλοι αυτοί βρίσκονται μέσα στην περιοχή C_r για το διάστημα $[-5, 5]$.



Έτσι η f δεν είναι αναλυτική στο C_r .

Άρα, δεν μπορούμε να περιμένουμε σύχνηση σε ολόκληρο το διάστημα $[-5, 5]$. Πράγματι,

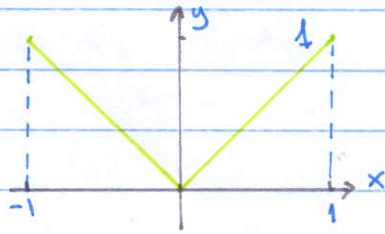
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(f; x)| = \begin{cases} 0, & \text{αν } |x| < 3.633 \\ \infty, & \text{αν } |x| > 3.633 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε σύχνηση στο κεντρικό κομμάτι του διαστήματος και απόκλιση στα κομμάτια που είναι κοντά στα άκρα του διαστήματος. Αυτό συνάδει με αυτό που έχουμε παρατηρήσει στο παράδειγμα β) στο σχήμα της παρεμβολής.

4 Παράδειγμα του Bernstein

$$f(x) = |x|, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$x_k^{(m)} = -1 + \frac{2k}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$



Εδώ ασφαλώς δεν υπάρχει αναλυτικότητα της f , αφού αυτή στο $x=0$ δεν είναι καν παραγωγίσιμη.

Έτσι $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(f; x)| = \infty$ για όλα τα $x \in [-1, 1]$ εκτός των $x = -1, x = 0$ και $x = 1$.

Η αποτυχία σύγκλισης οφείλεται κατά ένα μέρος στην ανεπαρκή ομαλότητα της συνάρτησης f και κατά ένα άλλο στην ομοιόμορφη κατανομή των σημείων παρεμβολής (ισαπέκοντα σημεία).

Υπάρχουν, όπως θα δούμε στη συνέχεια, πολύ καλύτερες κατανομές σημείων, όπως η κατανομή τύπου \arcsin του παραδείγματος (2)

Θεώρημα (Faber 1914) Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_i \in [-1, 1]$ $i=0, 1, \dots, n$, υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1, 1]$, τέτοιες ώστε αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο το οποίο παρεμβάλλεται στην f στα σημεία x_0, x_1, \dots, x_n , τότε ισχύει

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_{\infty} = \infty$$