ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1

Η άσκηση αφορά την κατασκευή του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης του Gauss χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Νεύτωνα για μη γραμμικά συστήματα.

Ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης του Gauss ως προς τη (μη αρνητική) συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$ έχει τη μορφή

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(\tau_\nu) + R_n(f), \tag{1}$$

όπου τα τ_ν είναι ρίζες του ορθογωνίου πολυωνύμου (με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα) $\pi_n(\cdot) = \pi_n(\cdot; w)$, βαθμού n, και ο τύπος (1) έχει βαθμό ακριβείας $2n-1$, δηλαδή, $R_n(f) = 0$ για όλα τα $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Τα πολυώνυμα π_n έχουν, μεταξύ άλλων, τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Όλες οι ρίζες τους βρίσκονται στο (a, b).

(ii) Αν $\tau_\nu^{(n)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του π_n και $\tau_\nu^{(n+1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$, είναι οι ρίζες του π_{n+1}, ισχύει

$$a < \tau_{n+1}^{(n+1)} < \tau_n^{(n)} < \tau_n^{(n+1)} < \cdots < \tau_2^{(n+1)} < \tau_1^{(n)} < \tau_1^{(n+1)} < b, \tag{2}$$

δηλαδή οι ρίζες δύο διαδοχικών πολυωνύμων εναλλάσσονται.

Η κατασκευή του τύπου (1) συνίσταται στον υπολογισμό των κόμβων τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, και των βαρών λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, αξιοποιώντας το γεγονός ότι $R_n(t^k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στο μη γραμμικό σύστημα

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \tau_\nu^k = m_k, \quad m_k = \int_a^b t^k w(t)dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1, \tag{3}$$

$2n$ εξισώσεων ως προς τους $2n$ αγνώστους τ_ν και λ_ν. Το σύστημα (3) θα λυθεί με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

(α) Γράψτε μία υπορουτίνα $GE(n, a, x, b)$ ή χρησιμοποιήστε ένα έτοιμο πρόγραμμα για τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b, \; A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad x = (x_1, x_1, \ldots, x_n)^T, \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T,$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

(β) Ποιό είναι το σχήμα της μεθόδου του Νεύτωνα για τη λύση του μη γραμμικού συστήματος (3); Το σχήμα του Νεύτωνα απαιτεί τον υπολογισμό του αντιστρόφου του Ιακωβιανού πίνακα. Ποιό θα ήταν ένα εναλλακτικό και πιο αποτελεσματικό, από άποψη αριθμού πράξεων και θέσεων μνήμης, σχήμα της μεθόδου του Νεύτωνα;

(γ) Γράψτε ένα πρόγραμμα για τη λύση του μη γραμμικού συστήματος (3) χρησιμοποιώντας το εναλλακτικό σχήμα της μεθόδου του Νεύτωνα του ερωτήματος (β). Η αρχική προσέγγιση για μεν τα τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, μπορεί να επιλεγεί χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2), για δε τα λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, από τη λύση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει αν στο σύστημα (3) τα τ_ν αντικατασταθούν από τις προσεγγίσεις που επιλέξατε. (Θα χρειαστήτε την υπορουτίνα $GE(n, a, x, b)$ ή το έτοιμο πρόγραμμα.)

(δ) Εφαρμόστε το πρόγραμμα του (γ) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $[a, b] = [-1, 1]$, $w(t) = 1$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

(ii) $[a, b] = (-1, 1)$, $w(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.