ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 0.913x_1 + 0.659x_2 &= 0.254, \\ 0.780x_1 + 0.563x_2 &= 0.217, \end{aligned}$$

με ακριβή λύση $x_1 = 1,\ x_2 = -1$. Αν το δεύτερο μέρος μεταβληθεί σε $(0.253, 0.218)^T$, η λύση μεταβάλλεται σε $x_1 = 1223,\ x_2 = -1694$. Εξηγήστε αυτήν τη διαταραχή.

2. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A αντιστρέψιμος. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια φυσική νόρμα πινάκων και

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

αποδείξτε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι για οποιονδήποτε μη αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει

$$\frac{1}{\kappa(A)} \le \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

3. (α) Έστω A αντιστρέψιμος άνω ή κάτω τριγωνικός πίνακας. Αποδείξτε ότι για τον δείκτη κατάστασης του A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ ισχύει

$$\kappa_\infty(A) \ge \frac{\|A\|_\infty}{\min\limits_{1\le i\le n} |a_{ii}|}.$$

(β) Χωρίς να υπολογίσετε τον A^{-1} αποδείξτε ότι για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι $\kappa_\infty(A) \ge 100$.
(*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το τελευταίο αποτέλεσμα της Άσκησης 2 για κατάλληλο μη αντιστρέψιμο πίνακα B.)

4. Έστω ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και συμμετρικός. Αποδείξτε ότι

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|},$$

όπου $\lambda_i(A)$ οι ιδιοτιμές του A.

5. Έστω $0 \ne x \in \mathbb{R}^n$ η ακριβής λύση του συστήματος $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας και $b \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ μια προσέγγιση της x και έστω $r = A\tilde{x} - b$ το υπόλοιπο της $\tilde{x}$. Αποδείξτε ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ (και αντίστοιχη φυσική νόρμα πινάκων) ισχύει

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}, \quad \text{όπου } \kappa(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|\ \|\mathrm{A}^{-1}\|.$$

Πως ερμηνεύετε την ανισότητα αυτή;

6. Αποδείξτε ότι για αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, ισχύει για τον δείκτη κατάστασης $\kappa(A)$, ως προς οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ του R^n, ότι

$$\kappa(\lambda A) = \kappa(A).$$

7.(α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ax\| = \|x\|$. Αποδείξτε ότι ο δείκτης κατάστασης του A ως προς αυτήν τη νόρμα είναι μονάδα.
(β) Έστω $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε $U^TU = I_n$. Αποδείξτε ότι

$$\kappa_2(U) = \|U\|_2\ \|U^{-1}\|_2 = 1.$$

8. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η παραγόμενη από αυτήν νόρμα στον $\mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και $\kappa(A)$ ο δείκτης κατάστασης του A ως προς $\|\cdot\|$.
(α) Αν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας, αποδείξτε ότι

$$\frac{\|B^{-1}-A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|A-B\|}{\|A\|}.$$

(β) Αν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\alpha := \|A^{-1}B\| < 1$, αποδείξτε ότι

$$\|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|A^{-1}\|.$$

9. Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(α) Αποδείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x^TAx > 0$.
(β) Αποδείξτε ότι για τη μέθοδο του Jacobi γι' αυτόν τον πίνακα ισχύει ότι $\rho(T_J) > 1$, δηλαδή ότι η μέθοδος του Jacobi αποκλίνει. (Εκτελέστε μερικά βήματα του αλγορίθμου με $b = (6,7,6)^T$ - οπότε $x = (1,1,1)^T$ - και $x^0 = 0$ για να πεισθείτε ότι αποκλίνει).
(γ) Αποδείξτε όμως ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για κάθε 2×2 συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα.

10. Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει για 3×3 συστήματα με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

11. Θεωρούμε γραμμικά συστήματα της μορφής $Ax = b$ με πίνακα συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x^0 \in \mathbb{R}^3$, ενώ η μέθοδος των Gauss-Seidel γενικά αποκλίνει.