Μάθημα 8ο   Ελ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος)   13/12/2018

WKB

$\varepsilon^2 y'' = Q(x)\, y$ $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(x) = S_0(x) + \delta S_1(x) + \dots$

$y(x) = e^{S(x)/\delta} = e^{S_0/\delta + S_1 + \dots}$

$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\left[(S_0')^2 + 2\delta S_0' S_1' + O(\delta^2)\right] + \frac{\varepsilon^2}{\delta}\left[S_0'' + \delta S_1'' + O(\delta^2)\right] = Q(x)$ ← $O(1)$

εξισορρόπηση ε^2/δ^2, ε^2/δ, ε^2, $O(1)$

$\delta = \varepsilon$

$S_0'(x) = Q(x) \Longrightarrow \pm \int_\alpha^x \sqrt{Q(t)}\,dt$ (εξ. εικόνας)

$2 S_0'(x) S_1'(x) + S_0''(x) = 0$ (εξ. μεταφοράς)

$S_1'(x) = -\frac{1}{2}\frac{S_0''}{S_0'} \rightsquigarrow S_1(x) = \ln\left(Q(x)\right)^{-1/4}$

$y_{WKB}(x) = C_1 Q^{-1/4}(x) \exp\left\{ 1/\varepsilon \int_\alpha^x \sqrt{Q(t)}\,dt \right\} + C_2 Q^{-1/4}(x) \exp\left\{ -1/\varepsilon \int_\alpha^x \sqrt{Q(t)}\,dt \right\}$

$\varepsilon^2 y'' - Qy = 0$, Q = σταθερό

Αν πάρω $y = e^{mx}$ και $y'' = Q/\varepsilon^2 \cdot y = 0$ $m^2 = \frac{Q}{\varepsilon^2}$

$\longrightarrow C_1 e^{\sqrt{Q}/\varepsilon} + C_2 e^{-\sqrt{Q}/\varepsilon}$

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$\varepsilon y'' + \alpha(x) y' + b(x) y = 0$ υποθέτουμε $\alpha(x) > 0$ $x \in [0,1]$, $y(0) = A$, $y(1) = B$

$y(x) = e^{S(x)/\varepsilon}$, $\delta = \varepsilon$

Γιατί; $\delta \approx \varepsilon$ $(\delta = \varepsilon)$

$y(x) = e^{\frac{S(x)}{\delta}} = e^{\frac{S_0(x)}{\delta} + S_1(x)}$

$\varepsilon y'' = \varepsilon \cdot e^{\square}\left(\frac{S_0'}{\delta} + S_1'\right)^2 + \varepsilon e^{\square}\left(\frac{S_0''}{\delta} + S_1''\right)$

$\varepsilon\left[\frac{1}{\delta} S_0'' + \frac{1}{\delta^2} S_0'^2 + S_1'^2 + S_1'' + \frac{2}{\delta} S_0' S_1'\right] + \alpha\left[\frac{S_0'}{\delta} + S_1'\right] + b = 0$

ε/δ^2 ε/δ $1/\delta$ $O(1)$

1. $\varepsilon/\delta^2 \approx \varepsilon/\delta \Rightarrow \delta \sim 1$ ✗ έχω πρόβλημα
2. $\varepsilon/\delta^2 \approx 1/\delta \Rightarrow \delta = \varepsilon$ ✓
3. $\varepsilon/\delta \sim 1/\delta \Rightarrow \varepsilon = 1$ ✗

$\varepsilon^{-1}: \ (S_0')^2 + \alpha S_0' = 0 = (S_0')[S_0' + \alpha] = 0$ — $S_0' = 0 \Longrightarrow S_0 = 0$
$S_0' = -\alpha$

$\varepsilon^{0}: \ S_0'' + \alpha S_1' + S_0' S_1'' + b = 0 \longrightarrow -S_1' + S_1' = \dfrac{-b+\alpha'}{-\alpha}$

$y_1 = e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi}$

$y_2 = \frac{1}{\alpha(x)} e^{\left[\int_0^x \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \alpha(\xi) d\xi\right]}$

Η γενική λύση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός.

$y_{WKB}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$A = y_{WKB}(0) = C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) \Longrightarrow A = C_1 + C_2/\alpha(0)$

$B = y_{WKB}(1) = C_1 y_1(1) + C_1 y_2(1) \Longrightarrow$

$B = C_1 \exp\left\{-\int_0^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right\} + C_2 \frac{1}{\alpha(1)} \exp\left\{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right\}$

Αγνοώντας τον αμελητέο όρο τάξης $e^{-1/\varepsilon}$

$y_{WKB}(x) = B \exp\left\{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi - \int_0^x \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right\} + \frac{\alpha(0)}{\alpha(x)}\left[A - B\cdot\exp\left\{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right\}\right] \exp\left\{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right\}$

$\int_0^x \alpha(\xi) dx \cong \alpha(0) x$

$y_{WKB}(x) = B \exp\left\{\int_x^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)}\right\} + \left[A - B\exp\left\{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right\}\right] \exp\left\{-\frac{\alpha(0)x}{\varepsilon}\right\}$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Ιδιοτιμών

$$\begin{cases} -y'' = \lambda q(x) y, & q(x) > 0 \\ y(0) = y(\Pi) = 0 \end{cases}$$

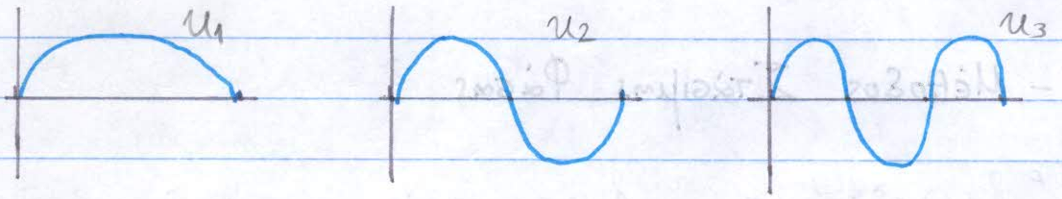
Sturm-Liouville Βιβλίο (Αλικάκος + Καλογερόπουλος §9.4)

$$\begin{cases} u'' + \hat{q}(x) u = -\lambda u, & x \in [\alpha, \beta] \\ u(0) = u(\ell) = 0 & \hat{q} \in C[0, \ell] \end{cases}$$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \longrightarrow +\infty$ απλές ιδιοτιμές, $u_1(x), \dots, u_n(x)$ αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

Ει. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 13/12/2018

Έχουμε αυτοσυζυγές πρόβλημα, έχει μεταβολική δομή
Έχει τεράστιο ενδιαφέρον ότι οι λύσεις χαρακτηρίζονται από τον αριθμό των κόμβων



$n-1 = \# \{ u_n(x) = 0,\ 0 < x < \ell \}$

$u_n(x) = v_n(x) + O(1/\sqrt{\lambda})$ (για μεγάλο λ πάει να μοιάσει με ημίτονο)

$-v'' = \lambda v$

$v(0) = v(\ell) = 0$

Γυρνάμε στο αρχικό πρόβλημα

$y_n'' = -\lambda_n q(x) y_n$ πολλαπλασιάζω με τους αντίθετους και ολοκληρώνω $\rightsquigarrow$

$y_m'' = -\lambda_m q(x) y_m$

$\int y_m y_n'' = \int -\lambda_n q(x) y_n y_m$

$\int y_n y_m'' = \int -\lambda_m q(x) y_m y_n$

$\int y_m y_n'' = \int \cancel{(y_m y_n')'} - y_m' y'$ 0 αποσυνοριακή συνθήκη

με ενδιαφέρει για λ μεγάλο $\varepsilon = 1/\lambda$ και παίρνω WKB

$y_n^{WKB}(x) = \frac{1}{(q(x))^{1/4}} \left[C_1 \sin(\sqrt{\lambda}) \int_0^x \sqrt{q(\xi)}\, d\xi + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}) \int_0^x \sqrt{q(\xi)}\, d\xi \right]$

$0 = y_n^{WKB}(0) \Rightarrow C_2 = 0$

$y_n^{WKB}(\pi) = \frac{C_1}{(q(x))^{1/4}} \left[\sin \sqrt{\lambda}\pi \int_0^\pi \sqrt{q(\xi)}\, d\xi \right]$

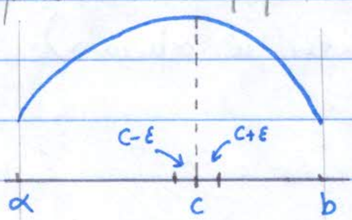
περιμένω $\sqrt{\lambda_n}\int_0^{\pi}\sqrt{q(\xi)}\,d\xi = n\pi$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\int_0^{\pi}\sqrt{q(\xi)}\,d\xi}\right)$$

Μέθοδος Laplace - Μέθοδος Στάσιμης Φάσης

Θεωρούμε $I(x)=\int_\alpha^b f(t)e^{x\varphi(t)}\,dt$, f,φ συνεχείς στο $[\alpha,b]$

μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική συμπεριφορά του $I(x)$, $x\to+\infty$



φ έχει 1 τοπικό μέγιστο στο c $\quad c\in(\alpha,b)$

$$\varphi(t)=\varphi(c)+\cancel{\varphi'(c)}(t-c)+\frac{1}{2}\varphi''(c)(t-c)^2+\dots$$

Θα δείξουμε ότι για x μεγάλο $\quad I(x)\sim\dfrac{f(c)e^{x\varphi(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-x\varphi''(c)}}$

$$I(x)\approx I(x,\varepsilon)=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(t)e^{x\varphi(t)}\,dt\sim\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(c)\exp\{\varphi(c)+(t-c)^2\varphi''(c)/2\}\,dt$$

$$=f(c)e^{x\varphi(c)}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\exp\{x(t-c)^2\varphi''(c)/2\}\,dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή

$$s^2=-x(t-c)^2\varphi''(c)/2$$

$$=\frac{f(c)\,e^{x\varphi(c)}}{\sqrt{-x\,\varphi(c)/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\,ds=\frac{f(c)-e^{x\varphi(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-x\varphi''(c)}}$$

$$I(x)\xrightarrow{x\to\infty}\frac{f(c)-e^{x\varphi(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-x\varphi''(c)}}$$